TEMAS DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA – 2021/2022

Hoja 3. Ecuaciones en diferencias de segundo orden

Soluciones

3-1. *Halla la solución de las ecuaciones (a)* $x_{t+2} - \frac{1}{4}x_t = \sin\frac{\pi}{2}t$*,* $x_0 = 1/2$*,* $x_1 = 0$*; (b)* $x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = e^{-t} + 1$*.*

Solución:

(a) La ecuación característica es $r^2 - \frac{1}{4} = 0$, con raíces $r_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. La solución general de la homogénea es $A2^{-t} + B(-2)^{-t}$, $A, B \in \mathbb{R}$. Una solución particular es de la forma

$$x_t^* = C\sin\pi t/2 + D\cos\pi t/2, \qquad C, D \in \mathbb{R};$$

Para determinar estas constantes sustituimos x_t^* en la ecuación para obtener

$$C\sin\frac{\pi}{2}(t+2) + D\cos\frac{\pi}{2}(t+2) - \frac{1}{4}\left(C\sin\frac{\pi}{2}t + D\cos\frac{\pi}{2}t\right) = \sin\frac{\pi}{2}t. \tag{1}$$

Recordando que $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$, $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$, we get

$$\sin\frac{\pi}{2}(t+2) = \sin\frac{\pi}{2}t\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2}t\sin\pi = -\sin\frac{\pi}{2}t$$
$$\cos\frac{\pi}{2}(t+2) = \cos\frac{\pi}{2}t\cos\pi - \sin\frac{\pi}{2}t\sin\pi = -\cos\frac{\pi}{2}t$$

y reagrupando términos en la ecuación (1) tenemos

$$-C - \frac{1}{4}C = 1,$$
$$-D - \frac{1}{4}D = 0.$$

La solución es $C = -4/5$ y $D = 0$. La solución general es

$$x_t = A2^{-t} + B(-2)^{-t} - \frac{4}{5}\sin\pi t/2. \tag{2}$$

Para hallar la solución que satisface las condiciones iniciales $x_0 = 1/2$ y $x_1 = 0$ elegimos constantes A y B adecuadas en la expresión (2). Obtenemos el sistema

$$\frac{1}{2} = x_0 = A + B,$$
$$0 = x_1 = \frac{A}{2} - \frac{B}{2} - \frac{4}{5}$$

Resolviendo tenemos $A = 21/20$ y $B = -11/20$. En consecuencia, la solución es

$$x_t = \frac{21}{20}2^{-t} - \frac{11}{20}(-2)^{-t} - \frac{4}{5}\sin\pi t/2.$$

(b) La ecuación característica es $r^2 - r + 1 = 0$, con raíces $r_{1,2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. El módulo es $\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$. La solución general de la ecuación homogénea es

$$A\cos\theta t + B\sin\theta t,$$

donde $\tan\theta = \sqrt{3}$, hence $\theta = \pi/3$. Una solución particular es de la forma $x_t^* = Ce^{-t} + D$. Sustituyendo en la ecuación completa, tenemos

$$Ce^{-t-2} + D - Ce^{-t-1} - D + Ce^{-t} + D = e^{-t} + 1.$$

Por tanto,

$$Ce^{-2} - Ce^{-1} + C = 1,$$
$$D = 1,$$

es decir, $C = (e^{-2} - e^{-1} + 1)^{-1}$ y $D = 1$. La solución general es

$$x_t = A\cos\frac{\pi}{3}t + B\sin\frac{\pi}{3}t + \frac{e^{-t}}{e^{-2} - e^{-1} + 1} + 1.$$

3-2. *Estudia la estabilidad de las ecuaciones: (a) $x_{t+1} - \frac{1}{4}x_t = b_t$, (b) $x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = c_t$, donde $\{b_t\}$ y $\{c_t\}$ son sucesiones dadas.*

Solución: Recordamos que la estabilidad de la ecuación lineal de segundo orden depende exclusivamente del comportamiento de la solución general de la ecuación homogénea, y que la estabilidad de ésta queda determinada por el hecho de que las raíces de la ecuación característica sean o no menores que 1 en valor absoluto.

(a) La ecuación característica es $r^2 - \frac{1}{4} = 0$, con raíces $r_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. Ambas raíces son menores que uno en valor absoluto, por lo que la solución general de la ecuación homogénea converge a 0 cuando $t \to \infty$. En consecuencia, cualquier solución de la completa converge a una misma solución particular, independientemente de las condiciones iniciales x_0, x_1 y del término independiente b_t.

(b) La ecuación característica es $r^2 - r + 1 = 0$, con raíces $r_{1,2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. El módulo de las soluciones es $\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, por lo que la ecuación no es g.a.e. Sin embargo, es estable, ya que el término general de la solución homogénea es
$$A\cos\theta t + B\sin\theta t,$$
que oscila en torno a 0 con oscilaciones uniformes. Aquí, $\tan\theta = \sqrt{3}$, por lo que $\theta = \pi/3$. Concluimos que toda solución de la completa oscila alrededor de una cierta solución particular.

3-3. *Resuelve la ecuación de Fibonacci $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$, $x_0 = x_1 = 1$ y comprueba que*
$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \equiv \varphi, \quad \textit{la proporción aúrea.}$$

Solución: La ecuación característica, $r^2 - r - 1 = 0$, tiene raíces $r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Por tanto, la solución general es
$$x_t = Ar_1^t + Br_2^t, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$
Al imponer las condiciones iniciales tenemos
$$\begin{aligned} A + B &= 1, \\ Ar_1 + Br_2 &= 1, \end{aligned}$$
de lo que se deduce $A = r_1\sqrt{5}/5$ y $B = -r_2\sqrt{5}/5$. Por tanto, la solución es
$$x_t = \frac{\sqrt{5}}{5}(r_1^{t+1} - r_2^{t+1}), \qquad t = 0, 1, \ldots$$
y el límite
$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{r_1^{t+2} - r_2^{t+2}}{r_1^{t+1} - r_2^{t+1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{r_1 - r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{t+1}}{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{t+1}} = r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$
porque $|r_2| < r_1$.

3-4. *Considera la ecuación del modelo del multiplicador–acelerador del crecimiento que se obtuvo en las notas de clase*
$$Y_{t+2} - a(1+c)Y_{t+1} + acY_t = b,$$
con $a > 0$, $c > 0$ y $a \neq 1$.

(a) *Halla una solución particular de la ecuación;*

(b) *Discute cuándo las soluciones de la ecuación característica son reales o complejas.*

(c) *Halla la solución general en cada uno de los siguientes casos.*

  (i) $a = 4$, $c = 1$;

  (ii) $a = \frac{3}{4}$, $c = 3$;

  (iii) $a = 0.5$, $c = 1$.

Solución:

(a) Una solución particular es $Y_t^* = A$, con $A \in \mathbb{R}$. Esta constante se determina al imponer que sea solución en la ecuación completa
$$A - a(1+c)A + acA = b,$$
por lo que $A = b/(1-a)$.

(b) De $r^2 - a(1+c)r + ac = 0$ obtenemos

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}a(1+c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2(1+c)^2 - 4ac}.$$

Si $a^2(1+c)^2 - 4ac > 0$ hay dos raíces reales diferentes, si es cero, una raíz real doble, y si es < 0, dos raíces complejas conjugadas (es decir, tienen la misma parte real y parte imaginaria cambiada de signo). En este último caso

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}a(1+c) \pm i\frac{1}{2}\sqrt{|a^2(1+c)^2 - 4ac|}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria.

(c) En lo que sigue, A y B son constantes arbitrarias.

(i) $r_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$, por tanto

$$Y_t = A(4+2\sqrt{3})^t + B(4-2\sqrt{3})^t - \frac{b}{3}.$$

(ii) $r_{1,2} = \frac{3}{2}$, por tanto

$$Y_t = A\left(\frac{3}{2}\right)^t + Bt\left(\frac{3}{2}\right)^t + 4b.$$

(iii) $r_{1,2} = 0.5 \pm i\,0.5$, por lo que $\rho = \sqrt{2}/2$ and $\tan\theta = 1$ implica $\theta = \pi/4$. En consecuencia

$$Y_t = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(A\cos\frac{\pi t}{4} + B\sin\frac{\pi t}{4}\right) + 2b.$$

La solución oscila alrededor de la solución particular Y_t^* encontrada en la parte (a) y dichas oscilaciones son amortiguadas. De hecho, $\lim_{t\to\infty} Y_t = 2b$ independientemente de las constantes A, B elegidas (y, por tanto, independientemente de los valores iniciales x_0, x_1), por lo qe la solución g.a.e. para $a = 0.5$ y $c = 1$.

3-5. *Sea C_t el consumo, K_t el stock de capital y Y_t el producto nacional neto. Se supone que estas tres variables están relacionadas por*

$$\begin{aligned} C_t &= cY_{t-1}, \\ K_t &= \sigma Y_{t-1}, \\ Y_t &= C_t + K_t - K_{t-1}, \end{aligned}$$

donce c y σ son constantes positivas.

(a) *Da una interpretación económica de las relaciones anteriores.*

(b) *Halla una ecuación en diferencias de orden dos para Y_t.*

(c) *Establece condiciones necesarias y suficientes para que Y_t muestre oscilaciones explosivas.*

Solución:

(a) Las dos primeras igualdades establecen que el consumo y el capital son proporcionales al producto nacional neto del período anterior. La tercera indica que el producto nacional neto se divide entre consumo e inversión neta, $K_t - K_{t-1}$.

(b) En primer lugar reemplazamos t por $t+2$ en la tercera ecuación para obtener $Y_{t+2} = C_{t+2} + K_{t+2} - K_{t+1}$. Dado que $C_{t+2} = cY_{t+1}$, $K_{t+2} = \sigma Y_{t+1}$, y $K_{t+1} = \sigma Y_t$, obtenemos

$$Y_{t+2} - (c+\sigma)Y_{t+1} + \sigma Y_t = 0.$$

(c) La ecuación característica es $r^2 - (c+\sigma)r + \sigma = 0$. Dado que buscamos solucines explosivas, necesitamos que las soluciones de la ecuación característica sean complejas, con módulo mayor que 1. El discriminante es $(c+\sigma)^2 - 4\sigma$, que es negativo cuando

$$(c+\sigma)^2 < 4\sigma.$$

El módulo ρ de las soluciones es

$$\rho = \sqrt{\sigma}.$$

Es mayor que 1 sii $\sigma > 1$.