TEMAS DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMíA – 2021/2022

Hoja 2. Ecuaciones en diferencias (1)

Soluciones

2-1. *Clasificar las ecuaciones en diferencias siguientes.*
(a) $x_{t+1} = x_t^2 - e^t$;
(b) $x_{t+1} = x_t - e^t$;
(c) $x_{t+1} = 3.2x_t(1 - 0.25x_t)$;
(d) $x_{t+1} - x_t = -\frac{4}{3}x_t$;
(e) $x_{t+1}(2 + 3x_t) = 4x_t$;
(f) $x_{t+2} = 3x_{t+1} - x_t + t$;
(g) $x_{t+4} - x_{t+3} = \sqrt[3]{x_{t+1}}$.

Solución:
(a) primer orden, no lineal, no autónoma;
(b) primer orden, lineal, no autónoma;
(c) primer orden, no lineal, autónoma;
(d) primer orden, lineal, autónoma con coeficientes constantes;
(e) primer orden, no lineal, autónoma;
(f) segundo orden, lineal, no autónoma;
(g) tercer orden, no lineal, autónoma.

2-2. *Comprobar que las sucesiones siguientes son solución de las correspondientes ecuaciones en diferencias.*
(a) $x_t = 2^t$; $x_{t+2} = x_{t+1} + 2x_t$;
(b) $x_t = \frac{t(t+1)}{2}$; $x_{t+1} = x_t + t + 1$;
(c) $x_t = \cos \pi t$; $x_{t+1} = -x_t$.

Solución:
Al sustituir la solución propuesta en las ecuaciones comprobamos que se cumplen:
(a) $x_{t+1} + 2x_t = 2^{t+1} + 22^t = 2^{t+1} + 2^{t+1} = 2^{t+2} = x_{t+2}$;
(b) $x_t + t + 1 = \frac{t(t+1)}{2} + t + 1 = \frac{t(t+1)+2(t+1)}{2} = \frac{(t+1)(t+2)}{2} = x_{t+1}$.
(c) $-x_t = -\cos \pi t = \cos(\pi t + \pi) = \cos \pi(t + 1) = x_{t+1}$.

2-3. *Se considera la ecuación en diferencias $x_{t+1} = \sqrt{x_t - 1}$ con $x_0 = 5$. Calcular x_1, x_2 y x_3. ¿Qué sucede con x_4?*

Solución: $x_1 = \sqrt{5 - 1} = 2$, $x_3 = \sqrt{2 - 1} = 1$, $x_4 = \sqrt{1 - 1} = 0$ y $x_5 = \sqrt{0 - 1}$ no tiene sentido. Es importante tener en cuenta el dominio de la función f que define la ecuación en diferencias. Para que la ecuación esté bien definida en algún intervalo $[a, b]$, es necesario que el intervalo esté en el dominio de f y que $f([a, b]) \subset [a, b]$.

2-4. *Econtrar las soluciones de las ecuaciones en diferencias siguientes, teniendo en cuenta el valor inicial x_0.*
(a) $x_{t+1} = 2x_t + 4$, $x_0 = 1$;
(b) $x_{t+1} = -0.5x_t + 3$, $x_0 = 1$;
(c) $2x_{t+1} + 3x_t + 2 = 0$, $x_0 = -1$;
(d) $x_{t+1} - x_t = -\frac{4}{3}x_t$, $x_0 = 3$.
Estudiar el comportamiento en el largo plazo de las soluciones.

Solución: Sabemos que la solución de la ecuación $x_{t+1} = ax_t + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ con condición inicial x_0 está dada por

$$x_t = a^t(x_0 - x^0) + x^0, \quad \text{donde} \quad x^0 = \frac{b}{1-a} \quad \text{es el punto de equilibrio,}$$

cuando $a \neq 1$ y por $x_t = x_0 + tb$ cuando $a = 1$. Aplicaremos estas fórmulas para resolver las ecuaciones propuestas.
(a) Aquí $a = 2$ y $b = 4$, luego $x^0 = 4/(1 - 2) = -4$ y por tanto $x_t = 5\,2^t - 4$ diverge a $+\infty$;
(b) Aquí $a = -0.5$ y $b = 3$, luego $x^0 = 3/(1 + 0.5)$=2 y por tanto $x_t = -(-0.5)^t + 2$ converge a 2;
(c) Aquí $a = -1.5$ y $b = -1$, luego $x^0 = -1/(1+1.5) = -0.4$ y por tanto $x_t = -0.6(-1.5)^t - 0.4$ oscila entre valores positivos y negativos cada vez más grandes, y no converge;

(d) Aquí $a = -1/3$ y $b = 0$, luego $x_t = 3(-1/3)^t$ converge a 0.

2-5. *En un país la renta nacional Y_t se dedica al consumo y la inversión*

$$Y_t = C_t + I_t,$$

donde C_t denota consumo y I_t la inversión. Suponiendo que $C_t = mY_t + c$, con $0 \leq m < 1$, $c > 0$ y que $I_t = I$ es constante, encontrar una ecuación en diferencias para la renta nacional Y_t, resolverla, y estudiar el comportamiento a largo plazo de la solución.

Solución: Sustituimos C_t en la ecuación para Y_t y encontramos

$$Y_{t+1} = mY_t + c + I.$$

Dado Y_0 la solución es

$$Y_t = \frac{c+I}{1-m} + m^t\left(Y_0 - \frac{c+I}{1-m}\right)$$

(ver el problema 2-4). La solución Y_t converge a $\dfrac{c+I}{1-m}$ cuando $t \to \infty$.

2-6. *Sea S_0 una cantidad inicial de dinero. Existen principalmente dos dos maneras de calcular el interés generado en un período, por ejemplo, en un año:*

(a) *S_0 genera* interés simple *al tanto de interés r si en cada período el interés es una fracción r de S_0.*

(b) *S_0 genera* interés compuesto *al tanto de interés r si en cada período el interés es una fracción r de la suma acumula al inicio de dicho período.*

Hallar una ecuación en diferencias para los dos modelos anteriores y encontrar la solución.

Solución:

Sea S_t el capital en el periodo t. Tenemos:

(a) (Interés simple). $S_{t+1} = S_t + rS_0$. La solución de esta ecuación en diferencias lineal y de primer orden es

$$S_t = S_0(1 + tr).$$

(b) (Interés compuesto). $S_{t+1} = S_t + rS_t$. Es una sucesión geométrica, cuyo término general es

$$S_t = (1 + r)^t S_0.$$

2-7. *Dadas las funciones de demanda y de oferta para el modelo de la telaraña que se especifican más abajo, encontrar el precio de equilibrio y dterminar si el equilibrio es estable.*

(a) $Q_d = 18 - 3P$, $Q_s = -3 + 4P$;

(b) $Q_d = 22 - 3P$, $Q_s = -2 + P$;

(c) $Q_d = 16 - 6P$, $Q_s = 6P - 5$;

Solución: Siguiendo las notas de teoría, si $Q_d = \alpha - \beta P$ y $Q_s = -\gamma + \delta P$, entonces la solución converge al precio de equilibrio $(\alpha + \gamma)/(\beta + \delta)$ sii $\delta/\beta < 1$.

(a) $Q_d = 18 - 3P$, $Q_s = -3 + 4P$. Aquí $\delta = 4$, $\beta = 3$, $\delta/\beta = 4/3$, luego P_t no converge.

(b) $Q_d = 22 - 3P$, $Q_s = -2 + P$. Aquí $\delta = 1$, $\beta = 3$, $\delta/\beta = 1/3$, luego P_t converge a $P^0 = 6$.

(c) $Q_d = 16 - 6P$, $Q_s = 6P - 5$. Aquí $\delta = 6$, $\beta = 6$, $\delta/\beta = 1$, luego $P_t = P_0$ para cada t.

2-8. *Consideramos una variante del modelo de la telaraña, donde se supone que la condición de vaciado de mercados se cumple, $Q_{d,t} = Q_{s,t}$, pero la función de oferta no está determinada por el precio del período anterior, $Q_{s,t} = S(P_{t-1})$, sino por el* precio esperado *P_t^* en el período t:*

$$Q_{s,t} = -\gamma + \delta P_t^*.$$

Los vendedores forman sus expectativas sobre el precio de acuerdo a la regla adaptativa:

$$P_{t+1}^* = P_t^* + \eta(P_t - P_t^*), \qquad 0 < \eta \leq 1,$$

donde η es un parámetro de ajuste de las expectativas.

(a) *Dar una interpretación económica de la ecuación precedente;*

(b) *¿Es el modelo de la telaraña un caso particular de este modelo?*

(c) *Encontrar una ecuación en diferencias que describa este modelo;*

(d) *Encontrar la trayectoria seguida por el precio. ¿Es esta trayectoria necesariamente oscilante? ¿Qué condiciones garantizan un comportamiento oscilante?*

(e) *Demostrar que cuando P_t es oscilante, será convergente sólo si $1 - 2/\eta < -\delta/\beta$. Si se compara este modelo con el de la telaraña sin expectativas adaptadas, ¿tiene este modelo un rango más amplio o más reducido de valores de $-\delta/\beta$ que garantizan la estabilidad de los precios?*

Solución:

(a) La ecuación

$$P^*_{t+1} - P^*_t = \eta(P_t - P^*_t) \tag{1}$$

indica que los vendedores revisan sus expectativas previas sobre el precio en cada periodo en proporción a la diferencia entre el precio real y el precio que ellos esperaban. El precio esperado para el periodo $t+1$ sube (baja) si el precio real en el período t está por encima (debajo) del esperado en ese periodo.

(b) Cuando $\eta = 1$ el precio esperado en el periodo siguiente es simplemente el precio que hubo en el periodo anterior, $P^*_{t+1} = P_t$, luego recaemos en el modelo de la telaraña.

(c) De la condición de equilibrio $Q_{d,t} = \alpha - \beta P_t = -\gamma + \delta P^*_t = Q_{s,t}$ podemos despejar P^*_t

$$P^*_t = \frac{1}{\delta}(\alpha + \gamma - \beta P_t),$$

y entonces

$$P^*_{t+1} = \frac{1}{\delta}(\alpha + \gamma - \beta P_{t+1}).$$

Sustituyendo P^*_t y P^*_{t+1} en (1) y reagrupando términos, tenemos

$$P_{t+1} = \left(1 - \eta - \frac{\eta\delta}{\beta}\right) P_t + \frac{\eta(\alpha+\gamma)}{\beta}, \qquad t = 0, 1, \ldots.$$

(d) La solución de la ecuación en diferencias anterior es

$$P_t = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} + \left(1 - \eta - \frac{\eta\delta}{\beta}\right)^t \left(P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

La trayectoria oscila sii

$$1 - \eta - \frac{\eta\delta}{\beta} < 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{1+\frac{\delta}{\beta}} < \eta, \tag{2}$$

que no se cumple para valores pequeños de η; en estos casos, la trayectoria del precio es monótona, mientras que en el modelo de la telaraña es oscilante.

(e) El precio converge al precio de equilibrio sii

$$|1 - \eta - \frac{\eta\delta}{\beta}| < 1,$$

es decir, si

$$-1 < 1 - \eta - \frac{\eta\delta}{\beta} < 1 \;\Rightarrow \frac{\delta}{\beta} < \frac{2}{\eta} - 1.$$

En el modelo de la telaraña la condición de estabilidad es $\delta/\beta < 1$. Con expectativas adaptadas la región de estabilidad aumenta, ya que contamos con el parámetro adicional η.

Por el apartado anterior, la convergencia será oscilante si se cumple (2), luego deben darse las dos desigualdades

$$-1 < 1 - \eta - \frac{\eta\delta}{\beta} < 0,$$

es decir,

$$\frac{1}{\eta} - 1 < \frac{\delta}{\beta} < \frac{2}{\eta} - 1.$$