MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA – 2014/2015

Hoja 2. Ecuaciones en diferencias

2-1. Clasificar las ecuaciones en diferencias siguientes.
(a) $x_{t+1} = x_t^2 - e^t$;
(b) $x_{t+1} = x_t - e^t$;
(c) $x_{t+1} = 3.2x_t(1 - 0.25x_t)$;
(d) $x_{t+1} - x_t = -\frac{4}{3}x_t$;
(e) $x_{t+1}(2 + 3x_t) = 4x_t$;
(f) $x_{t+2} = 3x_{t+1} - x_t + t$;
(g) $x_{t+4} - x_{t+3} = \sqrt[3]{x_{t+1}}$.

2-2. Comprobar que las sucesiones siguientes son solución de las correspondientes ecuaciones en diferencias.
(a) $x_t = 2^t$; $x_{t+2} = x_{t+1} + 2x_t$;
(b) $x_t = \frac{t(t+1)}{2}$; $x_{t+1} = x_t + t + 1$;
(c) $x_t = \cos \pi t$; $x_{t+1} = -x_t$.

2-3. Se considera la ecuación en diferencias $x_{t+1} = \sqrt{x_t - 1}$ con $x_0 = 5$. Calcular x_1, x_2 y x_3. ¿Qué sucede con x_4?

2-4. Econtrar las soluciones de las ecuaciones en diferencias siguientes, teniendo en cuenta el valor inicial x_0.
(a) $x_{t+1} = 2x_t + 4$, $x_0 = 1$;
(b) $x_{t+1} = -0.5x_t + 3$, $x_0 = 1$;
(c) $2x_{t+1} + 3x_t + 2 = 0$, $x_0 = -1$;
(d) $x_{t+1} - x_t = -\frac{4}{3}x_t$, $x_0 = 3$.
Estudiar el comportamiento en el largo plazo de las soluciones.

2-5. En un país la renta nacional Y_t se dedica al consumo y la inversión

$$Y_{t+1} = C_t + I_t,$$

donde C_t denota consumo y I_t la inversión. Suponiendo que $C_t = mY_t + c$, con $0 \leq m < 1$, $c > 0$ y que $I_t = I$ es constante, encontrar una ecuación en diferencias para la renta nacional Y_t, resolverla, y estudiar el comportamiento a largo plazo de la solución.

2-6. Sea S_0 una cantidad inicial de dinero. Existen principalmente dos dos maneras de calcular el interés generado en un período, por ejemplo, en un año:
(a) S_0 genera *interés simple* al tanto de interés r si en cada período el interés es una fracción r de S_0.
(b) S_0 genera *interés compuesto* al tanto de interés r si en cada período el interés es una fracción r de la suma acumula al inicio de dicho período.
Hallar una ecuación en diferencias para los dos modelos anteriores y encontrar la solución.

2-7. Dadas las funciones de demanda y de oferta para el modelo de la telaraña que se especifican más abajo, encontrar el precio de equilibrio y dterminar si el equilibrio es estable.
(a) $Q_d = 18 - 3P$, $Q_s = -3 + 4P$;
(b) $Q_d = 22 - 3P$, $Q_s = -2 + P$;

(c) $Q_d = 16 - 6P$, $Q_s = 6P - 5$;

2-8. Consideramos una variante del modelo de la telaraña, donde se supone que la condición de vaciado de mercados se cumple, $Q_{d,t} = Q_{s,t}$, pero la función de oferta no está determinada por el precio del período anterior, $Q_{s,t} = S(P_{t-1})$, sino por el *precio esperado* P_t^* en el período t:

$$Q_{s,t} = -\gamma + \delta P_t^*.$$

Los vendedores forman sus expectativas sobre el precio de acuerdo a la regla adaptativa:

$$P_{t+1}^* = P_t^* + \eta(P_t - P_t^*), \qquad 0 < \eta \leq 1,$$

donde η es un parámetro de ajuste de las expectativas.

(a) Dar una interpretación económica de la ecuación precedente;
(b) ¿Es el modelo de la telaraña un caso particular de este modelo?
(c) Encontrar una ecuación en diferencias que describa este modelo;
(d) Encontrar la trayectoria seguida por el precio. ¿Es esta trayectoria necesariamente oscilante? ¿Qué condiciones garantizan un comportamiento oscilante?
(e) Demostrar que cuando P_t es oscilante, será convergente sólo si $1 - 2/\eta < -\delta/\beta$. Si se compara este modelo con el de la telaraña sin expectativas adaptadas, ¿tiene este modelo un rango más amplio o más reducido de valores de $-\delta/\beta$ que garantizan la estabilidad de los precios?