MATEMÁTICAS AVANZADAS – 2014/2015

Hoja 1. Diagonalización

1-1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ calcúlense sus autovalores, sus autovectores y una matriz de paso que diagonalice A.

1-2. Dadas las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula sus autovalores, autovectores y los subespacios vectoriales asociados.
(b) Diagonalízalas, en los casos en que sea posible.

1-3. ¿Para qué valores del parámetro a es diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

1-4. Demostrar que:

(a) Si A es una matriz diagonalizable, entonces A^n también lo es para cada número natural n.

(b) Sea A una matriz diagonalizable. A es regular $\Leftrightarrow$ ninguno de sus autovalores es nulo.

(c) Si A tiene inversa, entonces A y su inversa A^{-1} tienen los mismos autovectores y los autovalores de A son los inversos de los de A^{-1}.

(d) A y A^t tienen los mismos autovalores.

1-5. Estúdiese para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

1-6. Decir cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1-7. ¿Para qué valores de α es posible diagonalizar la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha+1 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 1 \end{pmatrix}$?

1-8. Dadas las matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

determinar si son diagonalizables y, en caso afirmativo, calcular las potencias n-ésimas de cada una de ellas.

1-9. Sabiendo que los polinomios siguientes son los polinomios característicos de algunas matrices, determinar cuáles de ellos corresponden a matrices que son diagonalizables. En algunos casos, la respuesta puede depender del valor del parámetro α.

$p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ $\quad p(\lambda) = \lambda^2 - 1$
$p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha$ $\quad p(\lambda) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + 1$
$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ $\quad p(\lambda) = (\lambda - 1)^3$
$p(\lambda) = \lambda^3 - 1$

1-10. Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables. Calcular las potencias n-ésimas cuando sean diagonalizables.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1-11. Estudiar para qué valores de los parámetros las siguientes matrices son diagonalizables. Obtener los valores y vectores propios de dichas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1-12. La matriz $\begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$ admite como vectores propios a los vectores $(1,1,0)$, $(-1,0,2)$ y $(0,1,-1)$. Halla los valores propios de la matriz.

1-13. Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables. Y si lo son, escríbelas en forma diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 \\ -6 & -5 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 8 \\ -10 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 \\ -18 & 0 & 3 \\ -21 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$