# TEMAS DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA

Hoja 7. Ecuaciones Diferenciales (3)

Soluciones

7-1. *Responde las siguientes cuestiones:*

*a*) *Halla la EDO homogénea asociada a la ecuación característica:*

1) $r^2 - 3r + 5 = 0$;

2) $r(r+2) = 0$.

*b*) *Halla la EDO homogénea asociada a partir de las raíces de la ecuación característica:*

1) $r_1 = 1$, $r_2 = 4$;

2) $r_1 = 3 - 4i$, $r_2 = 3 + 4i$.

*c*) *Halla la EDO homogénea asociada a partir de su solución general:*

1) $C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$;

2) $C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$;

3) $e^{-t/2}(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t)$.

**Solución:**

*a*) 1) $x'' - 3x' + 5x = 0$.

2) $x'' + 2x' = 0$.

*b*) 1) $(r-1)(r-4) = r^2 - 5r + 4 \Rightarrow x'' - 5x' + 4x = 0$.

2) $(r - (3+4i))(r - (3-4i)) = r^2 - (3+4i)r - (3-4i)r + (3+4i)(3-4i) = r^2 - 6r + 25 \Rightarrow$ $\ddot{x} - 6\dot{x} + 25x = 0$.

*c*) 1) Las raíces son $-2$, luego la ecuación característica es $(r-1)(r+2) = 0$, obeniendo $x'' + x' - 2x = 0$.

2) La raíz es $-2$ (double), luego la ecuación característica es $(r+2)^2 = 0$, obteniendo $x'' + 4x' + 4x = 0$.

3) Las raíces son complejas conjugadas, con parte real $-1/2$ y parte imaginaria 2, luego la ecuación característica es

$$\left(r - \left(-\frac{1}{2} + 2i\right)\right)\left(r - \left(-\frac{1}{2} - 2i\right)\right) = r^2 + r + \frac{17}{4} = 0 \Rightarrow x'' + x' + \frac{17}{4}x = 0.$$

7-2. *Soluciona las siguientes ecuaciones.*

*a*) $x'' - ax = t$, *donde* $a \in \mathbb{R}$,

*b*) $x'' - 2x + x = \operatorname{sen} t$, $x(0) = x'(0) = 1$.

*c*) $x'' - 3x' + 2x = (t^2 + t)e^{3t}$.

**Solución:**

*a*) Consideramos el caso $a = 0$ en primer lugar. La ecuación es $x'' = t$. Integrando, $\dot{x} = \frac{1}{2}t^2 + C_1$, y integrando de nuevo, $x(t) = \frac{1}{6}t^3 + C_1 t + C_2$, para constantes arbitrarias $C_1$, $C_2$.

Cuando $a \neq 0$, vamos a determinar una solución particular de la ecuación completa. Será de la forma $x_p(t) = At + B$. Sustituyendo en la ecuación

$$-a(At + B) = t \Rightarrow A = -\frac{1}{a}, \quad B = 0.$$

Luego $x_p(t) = -t/a$.
La solución general de la ecuación homogénea, $x_h$, se obtiene resolviendo la ecuación característica $r^2 - a = 0$, distinguiendo dos casos.

1) $a > 0$. Entonces $x_h(t) = C_1 e^{\sqrt{a}t} + C_2 e^{-\sqrt{a}t}$ y

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{a}t} + C_2 e^{-\sqrt{a}t} - \frac{t}{a}.$$

2) $a < 0$. Entonces $x_h(t) = C_1 \cos(t\sqrt{-a}) + C_2 \sin(t\sqrt{-a})$ y
$$x(t) = C_1 \cos(t\sqrt{-a}) + C_2 \sin(t\sqrt{-a}) - \frac{t}{a}.$$

*b*) La solución general es $e^t(C_1 + C_2 t) + \frac{\cos t}{2}$ y la solución satisfaciendo las condiciones iniciales es
$$e^t\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right) + \frac{\cos t}{2}.$$

*c*) La solución general de la ecuación homogénea es $x_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^t$ y una solución particular de la completa es $x_p(t) = (0{,}5t^2 - t + 1)e^{3t}$. Luego
$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + (0{,}5t^2 - t + 1)e^{3t}.$$

7-3. *Una ecuación de la forma*
$$t^2 x'' + atx' + bx = 0,$$
*donde $a$ y $b$ son números reales es una* ecuación de Euler*. Demuestra que el cambio de variable independiente $s = \ln t$ transforma transforma una ecuación de Euler in una lineal de coeficientes constantes para la nueva variable dependiente $y(s) = x(e^s)$. Aplica lo anterior para resolver la ecuación $t^2x'' - 4tx' - 6x = 0$ for $t > 0$.*

**Solución:** La ecuación
$$t^2 x'' + atx' + bx = 0$$
se convierte en una EDO lineal mediante el cambio de variable $t = e^s$, o $s = \ln t$. Notar que $t'(s) = e^s = t$. Se la función $y(s) = x(t) = x(e^s)$. Aplicando la regla de la cadena, obtenemos
$$\begin{aligned} y'(s) &= x'(t)t' = x'(t)t, \\ y''(s) &= (x'(t)t)' = x''(t)t't + x'(t)t' = x''(t)t^2 + x'(t)t = x''(t)t^2 + y'(s). \end{aligned}$$
Luego $tx' = y'$ y $t^2x'' = y'' - y'$. Sustituyendo en la EDO original, tenemos
$$y''(s) - y'(s) + ay'(s) + by(s) = y''(s) + (a-1)y'(s) + by(s) = 0,$$
que es una ecuación lneal para $y(s)$.

La ecuación $t^2x'' - 4tx' - 6x = 0$ tiene $a = -4$ y $b = -6$, luego la EDO transformada es
$$y'' - 5y' - 6y = 0.$$
La solución es
$$y(s) = C_1 e^{6s} + C_2 e^{-s} \Rightarrow x(t) = y(\ln t) = C_1 e^{6\ln t} + C_2 e^{-\ln t} = C_1 t^6 + C_2 t^{-1}.$$

7-4. *Un activo con riesgo $X$ se revaloriza en media a una tasa exponencial $\alpha$, pero está sujeto a fluctuaciones aleatorias con volatilidad (desviación típica) instantánea $\sigma$. Sea $V(x)$ el valor de un título que tiene como subyacente a $X$, y que consiste en que el poseedor del título percibe de manera perpetua $x\,dt$ euros cuando es $x$ el precio del activo $X$. Asumiendo que $r$ es la tasa de interés constante y sin riesgo que existe en la economía, $r < \alpha$, la condición de no arbitraje (no hay posibilidades de hacer dinero partiendo de 0 euros) permite hallar una ecuación diferencial de segundo orden de Euler para el título $V(x)$*
$$\frac{\sigma^2}{2}x^2V''(x) + \alpha xV'(x) - rV(x) = x.$$
*Determina la solución general y selecciona aquélla que consideres es la que tiene sentido económico.*

**Solución:** Reescribimos la EDO
$$x^2V''(x) + axV'(x) - bV(x) = cx,$$

donde

$$a = \frac{2\alpha}{\sigma^2},$$
$$b = \frac{2r}{\sigma^2} > 0,$$
$$c = \frac{1}{2\sigma^2}.$$

Por el problema anterior, el cambio de variable $s = \ln x$ ($x = e^s$) transforma la ecuación en

(1) $$y''(s) + (a-1)y'(s) - by(s) = ce^s.$$

La ecuación homogénea tiene solución general

$$C_1 e^{r_1 s} + C_2 e^{r_2 s},$$

dado que las soluciones de la ecuación característica $r^2 + (a-1)r - b = 0$ son reales y distintas

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}(1 - a \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4b}\,).$$

Una solución particular es de la forma $Ae^s$; hallamos $A$ sustituyendo en (1)

$$A(1 + (a-1) - b) = c \Rightarrow A = \frac{c}{a-b} = \frac{1}{\alpha - r}.$$

Hemos encontrado

$$y(s) = C_1 e^{r_1 s} + C_2 e^{r_2 s} + \frac{1}{\alpha - r} e^s.$$

En las variables originales

$$V(x) = y(\ln x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} + \frac{1}{\alpha - r} x.$$

Finalmente, queremos determinar una solución de entre todas las posibles. Atenderemos al siguiente criterio:

If $X$ duplica su valor, pasando de $x$ a $2x$, entonces $V$ también duplica su valor, $V(2x) = 2V(x)$. Dado que en general $r_1$ y $r_2$ son no nulas, impondremos $C_1 = C_2 = 0$, de forma que

$$V(x) = \frac{1}{\alpha - r} x$$

debería ser el valor que buscamos.

7-5. *Se supone que las funciones de demanda y de oferta en un mercado con un único bien son*

$$D(t) = 42 - 4P(t) - 4\dot{P}(t) + \ddot{P}(t),$$
$$S(t) = -6 + 8P(t).$$

*La demanda depende no sólo del precio actual, $P$, sino también sobre las expectativas sobre su variación instantánea, reflejadas en las derivadas primera y segunda, $\dot{P}$ y $\ddot{P}$. Suponiendo que el mercado está en equilibrio en cada instante de tiempo $t$, i.e. $D(t) = S(t)$, determinar $P(t)$. Hallar una relación lineal en tre las condiciones iniciales $P(0)$ y $\dot{P}(0)$ de forma que la solución $P(t)$ está acotada.*

**Solución:** In equilibrium,

$$42 - 4P(t) - 4\dot{P}(t) + \ddot{P}(t) = -6 + 8P(t)$$

thereby

$$\ddot{P}(t) - 4\dot{P}(t) - 12P(t) = -48.$$

The solution is $P(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-2t} + 4$. For having bounded solutions it is needed $C_1 = 0$. Since

$$P(0) = C_1 + C_2 + 4,$$
$$\dot{P}(0) = 6C_1 - 2C_2,$$

imposing $C_1 = 0$ we get

$$2P(0) + \dot{P}(0) = 8.$$

7-6. *Una amante de la naturaleza estudia dos poblaciones vecinas de hormigas rojas y negras. Ha estimado que el número de hormigas negras es de* $60,000$ *y el de rojas de* $15,000$. *Las hormigas comienzan a luchar y la entomóloga observa que el número de hormigas muertas de una población es proporcional al número de hormigas vivas de la otra. Sin embargo, las rojas son más agresivas que las negras, de manera que su efectividad en la lucha es cuatro veces las de las negras. La observadora recibe una llamada y debe regresar al campamento base, pensando que ambas poblaciones se extinguirán simultáneamente, dado que las dos especies luchan hasta que una de ellas es completamente aniquilada y dado que las poblaciones están en proporción 4 a 1 para las negras pero la efectividad es de 4 a 1 para las rojas. Las siguientes cuestiones tratan de clarar si nuestra protagonista esá o no en lo cierto.*

*a*) *Qué especie sobrevive?*
*b*) *Cuántas hormigas de la especie vencedora quedan cuando se extingue la otra especie?*
*c*) *Cuál debería haber sido la proporción inicial en las poblaciones para que ambas especies se hubieran extinguido prácticamente a la vez?*

*Pista: Denotando* $x(t) =$ *hormigas negras en el tiempo* $t$, $y(t) =$ *rojas en el tiempo* $t$ *(ambas en miles), justifica que la interacción descrita obedece al sistema de EDOs*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -4ky(t),\\ \dot{y}(t) &= -kx(t),\end{aligned}$$

*donde* $k > 0$ *es una constante que significa la efectividad en la lucha de las hormigas negras. Este sistema puede convertirse en una EDO de segundo orden para* $x(t)$ *o para* $y(t)$. *Una vez hecho esto, resolver y hallar las soluciones sabiendo que* $x(0) = 60$ *y* $y(0) = 15$.

**Solución:** The system

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -4ky(t),\\ \dot{y}(t) &= -kx(t),\end{aligned}$$

can be analyzed in the following way. Write $dx = \dot{x}$ and $dy = \dot{y}$ and divide both equations to obtain

$$\frac{dx}{dy} = 4\frac{y}{x} \Rightarrow x\,dx - 4y\,dy = 0.$$

This is an exact equation that can be solved to get

$$\frac{x^2}{2} - 2y^2 = C.$$

Using the initial conditions we can determine $C$:

$$\frac{x^2(0)}{2} - 2y^2(0) = C \Rightarrow C = \frac{60^2}{2} - 2 \cdot 15^2 = 1350.$$

Hence the evolution of both populations of ants is linked by

$$\frac{x^2(t)}{2} - 2y^2(t) = 1350.$$

*a*) Notice that $x(t) = 0$ is impossible, but $y(t) = 0$ is possible, hence the survival species is that of black ants.
*b*) Plugging $y = 0$ we find

$$x^2 = 2700 \Rightarrow x \approx 51{,}962 \text{ thousand black ants, or } 51{,}962.$$

*c*) It is impossible that $x(s) = y(s) = 0$ at some finite $s$, but it could be $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

To see this, let us find the time–path of the populations by means of a second order differential equation. Deriving in $\dot{x} = -4ky$ we have

$$\ddot{x} = -4k\dot{y} = 4k^2x.$$

This equation holds whenever $y > 0$, because if $y = 0$, then $\ddot{x} = \dot{x} = 0$. The solution is

$$x(t) = C_1e^{2kt} + C_2e^{-2kt}.$$

Thus,

$$y(t) = -\frac{1}{2}C_1e^{2kt} + \frac{1}{2}C_2e^{-2kt}.$$

If we choose initial populations $x_0$, $y_0$ such that $C_1 = 0$, then the limit is 0. Thus we need

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 + C_2, \\ y_0 &= -\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}. \end{aligned}$$

Plugging $C_1 = 0$ and eliminating $C_2$ we find $x_0 = 2y_0$, that is, it should be half red ants than black ants.

To complete this problem, let us find the solution with the data given above. The constants are determined with the initial conditions, $x(0) = 60$ and $\dot{x}(0) = -4ky(0) = -60k$. Therefore

$$\begin{aligned} 60 &= C_1 + C_2, \\ -60k &= 2kC_1 - 2kC_2. \end{aligned}$$

Solving, we get $C_1 = 15$ and $C_2 = 45$. Hence

$$x(t) = 15e^{2kt} + 45e^{-2kt} \qquad (y(t) > 0).$$

On the other hand $y = -\frac{1}{4k}\dot{x}$, thus

$$y(t) = 7{,}5e^{2kt} - 22{,}5e^{-2kt}.$$

Red ants become extinct at time

$$\widehat{t} = \frac{\ln 3}{k} \approx \frac{0{,}275}{k}.$$

The evolution of black ants is thus

$$x(t) = \begin{cases} 15e^{2kt} + 45e^{-2kt}, & \text{if } 0 \le t \le \widehat{t}; \\ 51{,}962, & \text{if } t \ge \widehat{t}. \end{cases}$$

7-7. *Se considera la ecuación funcional*

(2) $$g(x) + \alpha\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = f(x), \quad \textit{para todo } x \ge 0,$$

*donde $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función dada, de clase$C^2$, $\alpha \neq 0$ es una constante y la función $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función incógnita que queremos determinar, una solución de clase $C^2$ de la ecuación funcional.*

*a) Pruebe que si $f$ es solución de (2), entonces satisface la EDO con valores iniciales:*

$$f''(x) - \alpha f(x) = g''(x), \quad f(0) = g(0), \;\; f'(0) = g'(0).$$

*b) Utilizando el apartado (a) anterior, encuentre $f$ en los siguientes casos*[1]*:*
   1) *$g(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ (hay dos casos a considerar, $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$.)*
   2) *$|\alpha| = 1$ y $g(x) = e^{ax}$ (en el caso $\alpha = 1$, distinguir los casos $a = 1$, $a = -1$ y $|a| \neq 1$.)*

[1] Puede probarse que de hecho es la única solución de clase $C^2$ de (2)

**Solución:** (a) If we derive the functional equation (for this we need to use Leibniz's Rule of derivation of parametric integrals), we obtain that the function $f$ must satisfy

$$g'(x) + (x-x)f(x) + \alpha \int_0^x \left( \frac{\partial}{\partial x}(x-t)f(t) \right) dt = f'(x),$$

that is,

$$g'(x) + \alpha \int_0^x f(t)\, dt = f'(x). \tag{3}$$

Deriving this equation, we obtain

$$g''(x) + \alpha f(x) = f''(x), \text{ or } f''(x) - \alpha f(x) = g''(x).$$

On the other hand, from the functional equation we get the initial condition

$$f(0) = g(0) + \alpha \int_0^0 (x-t)f(t)\, dt = g(0)$$

and from (3),

$$f'(0) = g'(0) + \alpha \int_0^0 f(t)\, dt = g'(0).$$

(bi) Note that $g''(x) = 0$, thus the ODE satisfied by $f$ is homogeneous of constant coefficients

$$f''(x) - \alpha f(x) = 0.$$

The roots of the characteristic polynomial are real if $\alpha > 0$, $\pm\sqrt{\alpha}$, and complex if $\alpha < 0$, $\pm i\sqrt{|\alpha|}$. Thus, the general solution of the ODE is

$$C_1 e^{\sqrt{\alpha}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}x}, \quad \text{if } \alpha > 0, \tag{4}$$

$$C_1 \cos\sqrt{|\alpha|}x + C_2 \sin\sqrt{|\alpha|}x, \quad \text{if } \alpha < 0. \tag{5}$$

The initial conditions are $f(0) = g(0) = b$ and $f'(0) = g'(0) = a$, thus we have to solve the systems

$$(\text{if } \alpha > 0) \begin{cases} b = C_1 + C_2 \\ a = C_1\sqrt{\alpha} - C_2\sqrt{\alpha} \end{cases} \qquad (\text{if } \alpha < 0) \begin{cases} b = C_1 \\ a = \sqrt{|\alpha|}C_2 \end{cases}$$

to isolate the suitable solutions from the general solutions given in (4)-(5) above.

In the case $\alpha > 0$ the solution is

$$\left( \frac{b\sqrt{\alpha} + a}{2\sqrt{\alpha}} \right) e^{\sqrt{\alpha}x} + \left( \frac{b\sqrt{\alpha} - a}{2\sqrt{\alpha}} \right) e^{-\sqrt{\alpha}x}$$

and in the case $\alpha < 0$ the solution is

$$b\cos\sqrt{|\alpha|}x + \frac{a}{\sqrt{|\alpha|}} \sin\sqrt{|\alpha|}x.$$

(bii) The ODE is non-homogeneous:

$$f''(x) - \alpha f(x) = e^{ax}.$$

- When $\alpha = 1$ and $a = 1$, a particular solution is of the form: $Axe^x$. Plugging this choice into the ODE we get $A(x+2)e^x - Axe^x = e^x$, that is, $A = \frac{1}{2}$. Hence, the general solution is

  $$C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x.$$

  The initial conditions are $f(0) = g(0) = 1$ and $f'(0) = g'(0) = 1$, hence we set the system:

  $$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 1 = C_1 - C_2 + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

  Solving for $C_1$ and $C_2$ gives the solution to (2)

  $$f(x) = \frac{1}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x.$$

- When $\alpha = 1$ and $a = -1$, a particular solution is of the form: $Axe^{-x}$. Plugging this choice into the ODE we get $A(x-2)e^{-x} - Axe^{-x} = e^{-x}$, that is, $A = -\frac{1}{3}$. Hence, the general solution is
$$C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{3} x e^{-x}.$$
The initial conditions are $f(0) = g(0) = 1$ and $f'(0) = g'(0) = -1$, hence we set the system:
$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ -1 = C_1 - C_2 - \frac{1}{3}. \end{cases}$$
Solving for $C_1$ and $C_2$ gives the solution to (2)
$$f(x) = \frac{1}{6} e^x + \frac{5}{6} e^{-x} - \frac{1}{3} x e^{-x}.$$
- When $\alpha = 1$ and $|a| \neq 1$, a particular solution is of the form: $Ae^{ax}$. Plugging this choice into the ODE we get $Aa^2 e^{ax} - Ae^{ax} = e^{ax}$, that is, $A = \frac{1}{a^2-1}$. Hence, the general solution is
$$C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{a^2-1} e^x.$$
The initial conditions are $f(0) = g(0) = 1$ and $f'(0) = g'(0) = a$, hence we set the system:
$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + \frac{1}{a^2-1} \\ a = C_1 - C_2 + \frac{a}{a^2-1}. \end{cases}$$
Solving for $C_1$ and $C_2$ gives the solution to (2) (complete the details!).
- When $\alpha = -1$, a particular solution is $Ae^{ax}$ (for all $a$) as in the previous case and we obtain now $A = \frac{1}{a^2+1}$. Hence, the general solution is
$$C_1 \cos \sqrt{|\alpha|} x + C_1 \sin \sqrt{|\alpha|} x + \frac{1}{a^2+1} e^{ax}.$$
The initial conditions are again $f(0) = g(0) = 1$ and $f'(0) = g'(0) = a$, hence we set the system:
$$\begin{cases} 1 = C_1 + \frac{1}{a^2+1} \\ a = -C_2 + \frac{a}{a^2+1}. \end{cases}$$
Solving for $C_1$ and $C_2$ gives the solution to (2) (complete the details!).

7-8. *Sea $u(x)$ la función de utilidad de un agente cuya riqueza es $x$. La función $u$ es estrictamente creciente y estrictamente cóncava ($u' > 0$, $u'' < 0$). El índice absoluto de Arrow–Pratt de aversión al riesgo, $r(x)$, depende de la riqueza, y se define como*
$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

a) *Encontrar todas las funciones de aversión al riesgo constante (Constant Relative Risk Aversion en inglés, CARA), i.e. con $r(x) \equiv a > 0$.*
b) *Encontrar todas las funciones cuyo índice de Arrow–Pratt es inversamente proporcional a la riquea, i.e. $r(x) = a/x$, $a > 0$. Estas funciones se denominan en inglés de Constant Relative Risk Aversion (CRRA).* Pista*: Transformar la EDO de segundo orden en una de primer orden, tomando como nueva incógnita $v(x) = u'(x)$.*

**Solución:**
(a) The ODE for $u$ is $u'' + au' = 0$, which general solution is $u(x) = C_1 e^{-ax} + C_2$.

(b) The ODE for $u$ is $u'' + \frac{a}{x} u' = 0$, that can be converted into a first order ODE for $v = u'$,
$$v' + \frac{a}{x} v = 0 \quad \text{or} \quad v' = -\frac{a}{x} v.$$
It is a separable ODE
$$\frac{dv}{v} = -a \frac{dx}{x}.$$
Integrating we have
$$\ln v = -a \ln x + C_1 = \ln x^{-a} + C_1,$$

where $C_1$ is a constant, thus

$$v(x) = C_1 x^{-a},$$

where we have renamed the constant. Since $u' = v$, we have $u(x) = \int v\,dx = C_1 \frac{x^{1-a}}{1-a} + C_2$, if $a \neq 1$, and $u(x) = C_1 \ln x + C_2$, if $a = 1$.