# TEMAS DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA

Hoja 7. Ecuaciones Diferenciales (3)

Soluciones

7-1. *Responde las siguientes cuestiones:*

*a)* *Halla la EDO homogénea asociada a la ecuación característica:*
1) $r^2 - 3r + 5 = 0$;
2) $r(r+2) = 0$.

*b)* *Halla la EDO homogénea asociada a partir de las raíces de la ecuación característica:*
1) $r_1 = 1$, $r_2 = 4$;
2) $r_1 = 3 - 4i$, $r_2 = 3 + 4i$.

*c)* *Halla la EDO homogénea asociada a partir de su solución general:*
1) $C_1e^t + C_2e^{-2t}$;
2) $C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}$;
3) $e^{-t/2}(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t)$.

**Solución:**

*a)* 1) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 5x = 0$.
2) $\ddot{x} + 2\dot{x} = 0$.

*b)* 1) $(r-1)(r-4) = r^2 - 5r + 4 \Rightarrow \ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = 0$.
2) $(r-(3+4i))(r-(3-4i)) = r^2 - (3+4i)r - (3-4i)r + (3+4i)(3-4i) = r^2 - 6r + 25 \Rightarrow \ddot{x} - 6\dot{x} + 25x = 0$.

*c)* 1) The roots are 1 and 2, thus the characteristic equation is $(r-1)(r+2) = 0$, from which $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$.
2) The root is 2 (double), thus the characteristic equation is $(r-2)^2 = 0$, from which $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$.
3) The roots are complex conjugates, with real part $-1/2$ and imaginary part 1, thus the characteristic equation is

$$(r - (-\frac{1}{2} + i))(r - (-\frac{1}{2} - i)) = r^2 + r + \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \dot{x} + \frac{5}{4}x = 0.$$

7-2. *Soluciona las siguientes ecuaciones.*

*a)* $x'' - ax = t$, *where* $a \in \mathbb{R}$,

*b)* $x'' - 2x + x = \sin t$, $x(0) = \dot{x}(0) = 1$.

*c)* $x'' - 3x' + 2x = (t^2 + t)e^{3t}$,

**Solución:**

*a)* Let us consider first the special case $a = 0$. The equation reduces to $\ddot{x} = t$. Integrating, $\dot{x} = \frac{1}{2}t^2 + C_1$, and integrating again, $x(t) = \frac{1}{6}t^3 + C_1t + C_2$, for arbitrary constants $C_1$, $C_2$.

Now, for $a \neq 0$ let us find a particular solution of the complete equation. It will of the form $x_p(t) = At + B$. Plugging this into the equation we find

$$a(At + B) = t \Rightarrow A = -\frac{1}{a}, \quad B = 0.$$

Hence $x_p(t) = -1/a$. To find $x_h$ we solve the characteristic equation $r^2 - a = 0$ and distinguish two cases.

1) $a > 0$. Then $x_h(t) = C_1e^{\sqrt{a}t} + C_2e^{-\sqrt{a}t}$ and

$$x(t) = C_1e^{\sqrt{a}t} + C_2e^{-\sqrt{a}t} + \frac{1}{a}.$$

2) $a < 0$. Then $x_h(t) = C_1 \cos(t\sqrt{-a}) + C_2 \sin(t\sqrt{-a})$ and

$$x(t) = C_1 \cos(t\sqrt{-a}) + C_2 \sin(t\sqrt{-a}) + \frac{1}{a}.$$

*b*) The general solution is $e^t(C_1 + C_2 t) + \frac{\cos t}{2}$ and the solution satisfying the initial conditions is

$$e^t\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right) + \frac{\cos t}{2}.$$

*c*) The general homogeneous solution is $x_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^t$ and a particular solution of the complete equation is $x_p(t) = (0{,}5t^2 - t + 1)e^{3t}$. Hence

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + (0{,}5t^2 - t + 1)e^{3t}.$$

7-3. *Una ecuación de la forma*

$$t^2 x'' + atx' + bx = 0,$$

*donde $a$ y $b$ son números reales es una* ecuación de Euler. *Demuestra que el cambio de variable independiente $s = \ln t$ transforma transforma una ecuación de Euler in una lineal de coeficientes constantes para la nueva variable dependiente $y(s) = x(e^s)$. Aplica lo anterior para resolver la ecuación $t^2x'' - 4tx' - 6x = 0$ for $t > 0$.*

**Solución:** The equation

$$t^2 x'' + atx' + bx = 0$$

transforms into a linear one by a change of "time" $t = e^s$, or $s = \ln t$. Notice that $t'(s) = e^s = t$. Let us define a new function $y(s) = x(t) = x(e^s)$. We have, applying the chain rule

$$\begin{aligned} y'(s) &= x'(t)t' = x'(t)t, \\ y''(s) &= (x'(t)t)' = x''(t)t't + x'(t)t' = x''(t)t^2 + x'(t)t = x''(t)t^2 + y'(s). \end{aligned}$$

Thus, we have found $tx' = y'$ and $t^2x'' = y'' - y'$. Substituting into the equation we have

$$y''(s) - y'(s) + ay'(s) + by(s) = 0,$$

which is a linear equation for $y(s)$.

The equation $t^2x'' - 4tx' - 6x = 0$ has $a = -4$ and $b = -6$, thus it transforms into

$$y'' - 5y' - 6y = 0.$$

The solution is

$$y(s) = C_1 e^{6s} + C_2 e^{-s} \Rightarrow x(t) = y(\ln t) = C_1 e^{6\ln t} + C_2 e^{-\ln t} = C_1 t^6 + C_2 t^{-1}.$$

7-4. *Un activo con riesgo $X$ se revaloriza en media a una tasa exponencial $\alpha$, pero está sujeto a fluctuaciones aleatorias con volatilidad (desviación típica) instantánea $\sigma$. Sea $V(x)$ el valor de un título que tiene como subyacente a $X$, y que consiste en que el poseedor del título percibe de manera perpetua $x\,dt$ euros cuando es $x$ el precio del activo $X$. Asumiendo que $r$ es la tasa de interés constante y sin riesgo que existe en la economía, $r < \alpha$, la condición de no arbitraje (no hay posibilidades de hacer dinero partiendo de 0 euros) permite hallar una ecuación diferencial de segundo orden de Euler para el título $V(x)$*

$$\frac{\sigma^2}{2}x^2V''(x) + \alpha xV'(x) - rV(x) = x.$$

*Determina la solución general y selecciona aquélla que consideres es la que tiene sentido económico.*

**Solución:** Let us write the equation as

$$x^2V''(x) + axV'(x) - bV(x) = cx,$$

where

$$\begin{aligned} a &= \frac{2\alpha}{\sigma^2}, \\ b &= \frac{2r}{\sigma^2} > 0, \\ c &= \frac{1}{2\sigma^2}. \end{aligned}$$

By the problem above, the change $s = \ln x$ ($x = e^s$) transforms the equation into

$$y''(s) + (a-1)y'(s) - by(s) = ce^s. \tag{1}$$

The general solution of the homogeneous equation is

$$C_1 e^{r_1 s} + C_2 e^{r_2 s},$$

since the roots of the characteristic equation $r^2 + (a-1)r - b = 0$ are both real and distinct,

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}(1 - a \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4b}\,).$$

A particular solution we guess the form $Ae^s$, so that substituting into (1) we have

$$A(1 + (a-1) - b) = c \Rightarrow A = \frac{c}{a-b} = \frac{1}{\alpha - r}.$$

We have found thus that

$$y(s) = C_1 e^{r_1 s} + C_2 e^{r_2 s} + \frac{1}{\alpha - r} e^s.$$

Turning back to the original variables

$$V(x) = y(\ln x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} + \frac{1}{\alpha - r} x.$$

Finally, to select the solution that makes sense, notice that it is plausible that if $X$ doubles its value to $x$, then the value $V(2x) = 2V(x)$. Since that in general both $r_1$ and $r_2$ are $\neq 0$, we need to impose $C_1 = C_2 = 0$, so that

$$V(x) = \frac{1}{\alpha - r} x$$

should be the "correct" value.

7-5. *Se supone que las funciones de demanda y de oferta en un mercado con un único bien son*

$$\begin{aligned} D(t) &= 42 - 4P(t) - 4\dot{P}(t) + \ddot{P}(t), \\ S(t) &= -6 + 8P(t). \end{aligned}$$

*La demanda depende no sólo del precio actual, $P$, sino también sobre las expectativas sobre su variación instantánea, reflejadas en las derivadas primera y segunda, $\dot{P}$ y $\ddot{P}$. Suponiendo que el mercado está en equilibrio en cada instante de tiempo $t$, i.e. $D(t) = S(t)$, determinar $P(t)$. Hallar una relación lineal en tre las condiciones iniciales $P(0)$ y $\dot{P}(0)$ de forma que la solución $P(t)$ está acotada.*

**Solución:** In equilibrium,

$$42 - 4P(t) - 4\dot{P}(t) + \ddot{P}(t) = -6 + 8P(t)$$

thereby

$$\ddot{P}(t) - 4\dot{P}(t) - 12P(t) = -48.$$

The solution is $P(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-2t} + 4$. For having bounded solutions it is needed $C_1 = 0$. Since

$$\begin{aligned} P(0) &= C_1 + C_2 + 4, \\ \dot{P}(0) &= 6C_1 - 2C_2, \end{aligned}$$

imposing $C_1 = 0$ we get

$$2P(0) + \dot{P}(0) = 8.$$

7-6. *Una amante de la naturaleza estudia dos poblaciones vecinas de hormigas rojas y negras. Ha estimado que el número de hormigas negras es de* $60,000$ *y el de rojas de* $15,000$. *Las hormigas comienzan a luchar y la entomóloga observa que el número de hormigas muertas de una población es proporcional al número de hormigas vivas de la otra. Sin embargo, las rojas son más agresivas que las negras, de manera que su efectividad en la lucha es cuatro veces las de las negras. La observadora recibe una llamada y debe regresar al campamento base, pensando que ambas poblaciones se extinguirán simultáneamente, dado que las dos especies luchan hasta que una de ellas es completamente aniquilada y dado que las poblaciones están en proporción 4 a 1 para las negras pero la efectividad es de 4 a 1 para las rojas. Las siguientes cuestiones tratan de clarar si nuestra protagonista esá o no en lo cierto.*

*a)* *Qué especie sobrevive?*
*b)* *Cuántas hormigas de la especie vencedora quedan cuando se extingue la otra especie?*
*c)* *Cuál debería haber sido la proporción inicial en las poblaciones para que ambas especies se hubieran extinguido prácticamente a la vez?*

*Pista: Denotando* $x(t) =$ *hormigas negras en el tiempo* $t$, $y(t) =$ *rojas en el tiempo* $t$ *(ambas en miles), justifica que la interacción descrita obedece al sistema de EDOs*

$$\dot{x}(t) = -4ky(t),$$
$$\dot{y}(t) = -kx(t),$$

*donde* $k > 0$ *es una constante que significa la efectividad en la lucha de las hormigas negras. Este sistema puede convertirse en una EDO de segundo orden para* $x(t)$ *o para* $y(t)$. *Una vez hecho esto, resolver y hallar las soluciones sabiendo que* $x(0) = 60$ *y* $y(0) = 15$.

**Solución:** The system

$$\dot{x}(t) = -4ky(t),$$
$$\dot{y}(t) = -kx(t),$$

can be analyzed in the following way. Write $dx = \dot{x}$ and $dy = \dot{y}$ and divide both equations to obtain

$$\frac{dx}{dy} = 4\frac{y}{x} \Rightarrow x\,dx - 4y\,dy = 0.$$

This is an exact equation that can be solved to get

$$\frac{x^2}{2} - 2y^2 = C.$$

Using the initial conditions we can determine $C$:

$$\frac{x^2(0)}{2} - 2y^2(0) = C \Rightarrow C = \frac{60^2}{2} - 215^2 = 1350.$$

Hence the evolution of both populations of ants is linked by

$$\frac{x^2(t)}{2} - 2y^2(t) = 1350.$$

*a)* Notice that $x(t) = 0$ is impossible, but $y(t) = 0$ is possible, hence the survival species is that of black ants.

*b)* Plugging $y = 0$ we find

$$x^2 = 2700 \Rightarrow x \approx 51962 \text{ black ants.}$$

*c)* We look for $x(0)$ and $y(0)$ such that the equation $\frac{x^2}{2} - 2y^2 = C$ admits the solution $(0,0)$. This obviously implies $C = 0$. Hence

$$\frac{x^2}{2} - 2y^2 = 0 \Rightarrow x = 2y.$$

The proportion should be $2 : 1$ and not $4 : 1$.

It is possible to find the time–path of the populations by means of a second order differential equation as follows. Deriving in $\dot{x} = -4ky$ we have

$$\ddot{x} = -4k\dot{y} = 4k^2x.$$

This equation holds whenever $y > 0$, because if $y = 0$, then $\ddot{x} = \dot{x} = 0$. The solution is

$$x(t) = C_1e^{2kt} + C_2e^{-2kt}.$$

The constants are determined with the initial conditions, $x(0) = 60$ and $\dot{x}(0) = -4ky(0) = -60k$. Therefore

$$\begin{aligned} 60 &= C_1 + C_2, \\ -60k &= 2kC_1 - 2kC_2. \end{aligned}$$

Solving, we get $C_1 = 15$ and $C_2 = 45$. Hence

$$x(t) = 15e^{2kt} + 45e^{-2kt} \qquad (y(t) > 0).$$

On the other hand $y = -\frac{1}{4k}\dot{x}$, thus

$$y(t) = 7{,}5e^{2kt} - 22{,}5e^{-2kt}.$$

Red ants become extinct at time

$$\widehat{t} = \frac{\ln 3}{k} \approx \frac{0{,}275}{k}.$$

The evolution of black ants is thus

$$x(t) = \begin{cases} 15e^{2kt} + 45e^{-2kt}, & \text{if } 0 \le t \le \widehat{t}; \\ 51962, & \text{if } t \ge \widehat{t}. \end{cases}$$