

# TEMAS DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA

## Hoja 4. Ecuaciones en diferencias (3)

### Soluciones

4-1. Demuestra la equivalencia de las dos afirmaciones siguientes:

- (a) La raíces de la ecuación cuadrática  $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$  satisfacen  $|\lambda| < 1$ ;  
 (b)  $|p| < 1 + q$  y  $q < 1$  (Condición de Jury).

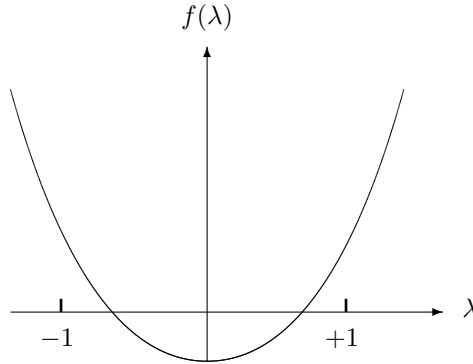
**Solución:** The function  $f(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda + q$  is a convex parabola. Let us distinguish two different cases.

- Complex roots. This happens when  $q > p^2/4$  (so  $q > 0$ ). The roots are

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( p \pm i\sqrt{4q - p^2} \right),$$

with modulus  $|\lambda_{1,2}| = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q - p^2} = \sqrt{q}$ . Hence (b) implies (a). Now, to prove the reverse, suppose that (a) holds. Then,  $q < 1$ . On the other hand, as  $f(\lambda) > 0$  for all  $\lambda$ ,  $f(1) = 1 - p + q > 0$  and  $f(-1) = 1 + p + q > 0$ . These inequalities are equivalent to  $|p| < 1 + q$ , hence (a) implies (b).

- Real roots. This happens when  $q \leq p^2/4$ . Note in the drawing below that  $\lambda_{1,2} \in (-1, 1)$  if and only if  $f(1) = 1 - p + q > 0$ ,  $f(-1) = 1 + p + q > 0$ ,  $f'(-1) = 2 - p > 0$  and  $f'(1) = 2 + p < 0$ . The first two inequalities give  $|p| < 1 + q$  and the second ones  $|p| < 2$ . They are equivalent to  $|p| < 1 + q$  and  $q < 1$ .



4-2. Encuentra el intervalo de valores del parámetro  $a$  para los que el sistema

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

es globalmente asintóticamente estable. Encuentra (si existe) la variedad estable para los valores  $a = -5/3$  y  $a = 5/2$ .

**Solución:** We will apply the Jury condition proved in the problem above. The characteristic polynomial of the matrix of the system is

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)\lambda + 1 + \frac{a}{2}.$$

Here,  $p = a + \frac{1}{2}$  and  $q = 1 + \frac{a}{2}$ . The roots are smaller than 1 in module iff  $|p| < 1 + q$  and  $q < 1$ . The second inequality gives

$$1 + \frac{a}{2} < 1 \Rightarrow a < 0.$$

The first inequality can be decomposed into

$$a + \frac{1}{2} < 2 + \frac{a}{2} \Rightarrow a < 3$$

and

$$-\left(a + \frac{1}{2}\right) < 2 + \frac{a}{2} \Rightarrow a > -\frac{5}{3}.$$

Thus, the system is g.a.s. iff  $-\frac{5}{3} < a < 0$ .

To answer the other questions, suppose first that  $a = -5/3$ . In this case the eigenvalues are  $-1$  and  $-1/6$ . The stable manifold is the eigenspace  $S(-1/6)$ . It is easy to find

$$S(-1/6) = \{(x, y) : 3x + y = 0\}.$$

Thus, trajectories with initial conditions  $3x_0 + y_0 = 0$  converge to the equilibrium point  $(0, 0)$ . When  $a = 5/2$  there is a double eigenvalue,  $\lambda = 3/2 > 1$ , thus there is no stable manifold.

- 4-3. *Una empresa comienza su actividad con 100 máquinas de la misma antigüedad. Tras dos años de trabajo, las máquinas dejan de ser útiles y deben reemplazarse por otras nuevas. Además, se sabe que un 11% de las máquinas sufren una avería tras el primer año y deben ser reemplazadas. Escriba la ecuación del sistema dinámico que describe la evolución de la maquinaria de la empresa.*

**Solución:** We will apply the Jury condition proved in the problem above. The characteristic polynomial of the matrix of the system is

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + \frac{1}{2})\lambda + 1 + \frac{a}{2}.$$

Here,  $p = a + \frac{1}{2}$  and  $q = 1 + \frac{a}{2}$ . The roots are smaller than 1 in module iff  $|p| < 1 + q$  and  $q < 1$ . The second inequality gives

$$1 + \frac{a}{2} < 1 \Rightarrow a < 0.$$

The first inequality can be decomposed into

$$a + \frac{1}{2} < 2 + \frac{a}{2} \Rightarrow a < 3$$

and

$$-\left(a + \frac{1}{2}\right) < 2 + \frac{a}{2} \Rightarrow a > -\frac{5}{3}.$$

Thus, the system is g.a.s. iff  $-\frac{5}{3} < a < 0$ .

To answer the other questions, suppose first that  $a = -5/3$ . In this case the eigenvalues are  $-1$  and  $-1/6$ . The stable manifold is the eigenspace  $S(-1/6)$ . It is easy to find

$$S(-1/6) = \{(x, y) : 3x + y = 0\}.$$

Thus, trajectories with initial conditions  $3x_0 + y_0 = 0$  converge to the equilibrium point  $(0, 0)$ . When  $a = 5/2$  there is a double eigenvalue,  $\lambda = 3/2 > 1$ , thus there is no stable manifold.

- 4-4. *Consideramos una versión determinista de un modelo de transmisión de la desigualdad a través de generaciones de Gary Solon<sup>1</sup>. Los padres invierten  $I_{t-1}$  en capital humano de los hijos,  $h_t$ , de manera que  $h_t = \theta \ln I_{t-1} + g_t$ , donde  $\theta > 0$  y  $g_t$  resume las características genéticas que el hijo recibe de los padres y que es independiente de la inversión (herencia genética). Suponemos que  $g_t = \delta + \lambda g_{t-1}$ ,  $0 < \lambda < 1$  (modelo autorregresivo de primer orden). Los ingresos totales del hijo están dados por  $\ln y_t = \mu + p h_t$ .*

- Interprete los coeficientes  $\theta$ ,  $\lambda$  y  $p$ .
- Supongamos que la inversión de los padres es una proporción constante de sus ingresos,  $I_{t-1} = e^k y_{t-1}$ ,  $k \leq 0$ . Encuentre una ecuación en diferencias de segundo orden para  $\ln y_t$ .
- Demostrar que en este modelo, el logaritmo de los ingresos dependen de manera positiva del de los padres, pero de manera negativa del de los abuelos.
- Pruebe que la solución nunca es oscilante.
- Calcule la solución general cuando  $\lambda = \gamma$  y demuestre que en este caso los ingresos convergen hacia un valor límite.

**Solución:**

- $\theta$  marginal product for human capital investment;  $\lambda$  heritability coefficient;  $p$  earnings return to human capital.
- Let  $z_t = \ln y_t$ . After plugging both human capital and the investment into the equation for  $\ln y_t$  we get

$$z_t = \mu^* + \gamma z_{t-1} + p g_t,$$

where  $\mu^* = \mu + \gamma k$  and  $\gamma = \theta p$ . Lagging the equation one period we get

$$z_{t-1} = \mu^* + \gamma z_{t-2} + p g_{t-1}.$$

Multiplying this equation by  $\lambda$  and subtracting to the former equation we obtain

$$z_t = \mu^*(1 - \lambda) + p\delta + (\gamma + \lambda)z_{t-1} - \gamma\lambda z_{t-2}.$$

<sup>1</sup>Gary Solon. "Theoretical models of inequality transmission across multiple generations". (18790), February 2013.

- (c)  $\gamma + \lambda > 0$  and  $-\gamma\lambda < 0$ .  
 (d) The characteristic equation is

$$r^2 - (\gamma + \lambda)r + \gamma\lambda = 0.$$

The discriminant is  $(\gamma + \lambda)^2 - 4\gamma\lambda = (\lambda - \gamma)^2 \geq 0$ .

- (e)  $z_t = C_1\lambda^t + C_2t\lambda^t + z^*$ , where  $z^* = \frac{\mu^*(1-\lambda)+p\delta}{(1-\lambda)^2}$ .

- 4-5. *K es una estudiante con el siguiente hábito de estudio: si estudia un día, la probabilidad de que no estudie al día siguiente es 0.7. Por otro lado, la probabilidad de que K no estudie dos días consecutivos es 0.6. Suponiendo que K estudia hoy, ¿con qué probabilidad estudiará K en el largo plazo?*

**Solución:** Let us denote  $E_t$  ( $N_t$ ) the event of studying (not studying) at day  $t$ , and by  $e_t$  ( $n_t$ ) the probability of  $E_t$  ( $N_t$ ). Note that  $e_t + n_t = 1$  for all  $t$ . We have the following data

$$P(N_{t+1}|E_t) = 0.7, \quad P(N_{t+1}|N_t) = 0.6,$$

where  $P(A|B)$  means the probability of event  $A$  conditioned by event  $B$ . Hence  $P(E_{t+1}|E_t) = 0.3$  and  $P(E_{t+1}|N_t) = 0.4$ . Since

$$P(E_{t+1}) = P(E_{t+1}|E_t)P(E_t) + P(E_{t+1}|N_t)P(N_t)$$

we get the difference equation

$$e_{t+1} = 0.3e_t + 0.4n_t.$$

Analogously, we have

$$n_{t+1} = 0.7e_t + 0.6n_t.$$

The eigenvalues of the matrix system  $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{pmatrix}$  are  $\lambda_1 = 1$  and  $\lambda_2 = -0.1$ . The matrix is diagonalizable, with  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}$ . It is easy to find that a diagonalization matrix is

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hence, recalling the formula for the solution

$$\begin{pmatrix} e_t \\ n_t \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ n_0 \end{pmatrix},$$

where  $e_0$  ( $n_0$ ) is the probability that K. studies (not study) today. One finds

$$e_t = \frac{1}{11}\lambda_2^t(7e_0 - 4n_0) + \frac{4}{11}(e_0 + n_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{4}{11}(e_0 + n_0).$$

Thus,  $(e_t, n_t)$  converges to the stationary distribution  $(4/11, 7/11)$  independently of the values of  $e_0$  and  $n_0$ , that means that K. will study in the long run with probability 0.3636.

**Remark.** 1) Note that as  $n_t = 1 - e_t$ , we can reduce the system to the single equation

$$e_{t+1} = -0.1e_t + 0.4.$$

The equilibrium point is of course  $e^* = 4/11$  and the solution converges to  $e^*$  since the coefficient of  $e_t$  is smaller than 1 in absolute value. The solution is

$$e_t = e^* + (-0.1)^t(e^* - e_0).$$

2) The matrix  $A - I$  is not regular. This is the reason why the homogeneous system above has equilibrium points different from  $(0, 0)$ . Note that this case has not been studied in the theory notes. However, the problem can be solved because we know the solution.

- 4-6. *Un experimentador sitúa a un ratón en una jaula que tiene dos puertas, A y B. Al pasar por A, el ratón recibe una pequeña descarga eléctrica, por lo que nunca visita la puerta A dos veces seguidas. Tras la puerta B se oculta comida. Al principio del experimento (un lunes), el ratón elige A o B con la misma probabilidad. Después de elegir B, la probabilidad de que al día siguiente elija de nuevo B es de 0.6.*
- (a) *¿Con qué probabilidad se dirigirá el ratón hacia la puerta A el jueves de la primera semana?*  
 (b) *¿Cuál es la distribución estacionaria de este experimento?*  
 (c) *Posiblemente, ¿qué pensará el ratón sobre el experimentador?*

**Solución:** Denote by  $a_t$  ( $b_t$ ) the probability of choosing door  $A$  ( $B$ ) in day  $t$ . We suppose that  $a_t + b_t = 1$  for every  $t$ , that is, the mouse cannot go out of the jail. The data of the problem says that  $a_0 = b_0 = 1/2$  (thus,  $t = 0$  corresponds to the first Monday). Then, the probabilities must satisfy (see problem above for details)

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= 0a_t + (1 - 0.6)b_t, \\ b_{t+1} &= a_t + 0.6b_t. \end{aligned}$$

The matrix system has eigenvalues  $\lambda = 1$  and  $\lambda = -0.4$ . It is easy to show that a diagonalization matrix is given by

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

The solution is then

$$\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-0.4)^t \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

from which

$$a_t = \frac{2}{7} + \frac{3}{14}(-0.4)^t, \quad t \geq 0.$$

(a) Thursday corresponds with  $t = 3$ , thus the probability of choosing door  $A$  in Thursday is

$$a_3 = 0.272.$$

(b) There exists an stationary distribution, given by the limit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_t = \frac{2}{7} \approx 0.2857.$$

The stationary distribution is to choose door  $A$  with probability  $2/7$  and door  $B$  with probability  $5/7$ .

(c) It's a joke.

#### 4-7. *Curva de Phillips I.*

La curva de Phillips relaciona negativamente la tasa de crecimiento de los salarios monetarios  $w$  y la tasa de desempleo  $U$

$$(1) \quad w = f(U), \quad f'(U) < 0.$$

Esta relación fue justificada empíricamente para el Reino Unido por A.W. Phillips en un trabajo muy influyente<sup>2</sup>. Más tarde, se postuló que dicha relación podía también establecerse entre la tasa de inflación  $p$  y la tasa de desempleo, dado que un incremento en los salarios monetarios debería tener efectos inflacionarios<sup>3</sup>. Si se tiene en cuenta la productividad laboral, la tasa de inflación es

$$p = w - T,$$

donde  $T$  es el incremento de la productividad laboral, que se considera constante y exógena (hay inflación sólo si los salarios crecen más rápido que la productividad). Suponiendo una forma lineal para la función  $f$ ,  $f(U) = \alpha - \beta U$ , tenemos que para todo  $t \geq 1$

$$(2) \quad p_t = \alpha - T - \beta U_t, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Por otra parte, la tasa de desempleo puede relacionarse con la tasa de inflación de la siguiente forma:

$$(3) \quad U_{t+1} - U_t = -k(m - p_t), \quad 0 < k \leq 1,$$

donde  $m$  es la tasa de crecimiento de los saldos nominales<sup>4</sup>. Dado que  $m - p$  es la tasa de crecimiento del dinero real en la economía, (3) establece que la tasa de crecimiento del desempleo está negativamente relacionada con la tasa de crecimiento de los saldos reales.

Se pide encontrar una ecuación para  $U_t$  y estudiar su estabilidad.

**Solución:** Substituting the Phillips relation into the equation satisfied by the unemployment rate we get

$$U_{t+1} - U_t = -k(m - \alpha + T + \beta U_t)$$

<sup>2</sup>A.W. Phillips (1956) "The relationship between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom," *Economica*, November 1958, pp. 283–299.

<sup>3</sup>La tasa de crecimiento de los salarios es  $(W_{t+1} - W_t)/W_t$ , donde  $W_t$  es el salario en el tiempo  $t$ ; la tasa de inflación es la tasa de crecimiento de los precios,  $p_t = (P_{t+1} - P_t)/P_t$ .

<sup>4</sup>Es decir,  $m = (M_{t+1} - M_t)/M_t$ , donde  $M_t$  son los saldos nominales, fijado por la autoridad monetaria, que se supone constante, independiente de  $t$ .

and rearranging terms

$$U_{t+1} = (1 - k\beta)U_t - k(m - \alpha + T).$$

The particular solution  $U^*$ , that is also the equilibrium point of the equation is given by

$$U^* = (1 - k\beta)U^* - k(m - \alpha + T) \Rightarrow U^* = \frac{\alpha - m - T}{\beta}.$$

As we know, the equation is g.a.s. and converges to  $U^*$  as  $t \rightarrow \infty$  iff

$$|1 - k\beta| < 1 \Leftrightarrow 0 < k\beta < 2.$$

Moreover, observe that when  $0 < k\beta < 1$ , the solution converges monotonically to  $U^*$ ; when  $1 < k\beta < 2$  converges to  $U^*$  in a oscillating fashion, since the coefficient of  $U_t$  in the difference equation for  $U$  is  $1 - k\beta < 0$ , and when  $k\beta = 1$  we have an uninteresting case.

#### 4-8. *Curva de Phillips II.*

*Continuando con el modelo de Phillips, analizamos ahora una modificación introducida por M. Friedman<sup>5</sup>, que es la versión de la curva de Phillips aumentada por expectativas*

$$(4) \quad w = f(U) + g\pi, \quad (0 < g \leq 1),$$

*donde  $\pi$  denota la tasa de inflación esperada. La idea es que si se ha observado una tendencia inflacionaria suficientemente sostenida, entonces la gente crea ciertas expectativas de que la inflación va a seguir creciendo. Esta creencia afecta a la demanda de salarios.*

*Al incorporar este comportamiento en (2), resulta la relación*

$$(5) \quad p_t = \alpha - T - \beta U_t + g\pi_t, \quad t \geq 0.$$

*Queda por determinar cómo se forman las expectativas sobre la inflación. Es habitual utilizar la hipótesis de expectativas adaptadas*

$$(6) \quad \pi_{t+1} - \pi_t = j(p_t - \pi_t), \quad 0 < j \leq 1.$$

*La interpretación es que cuando la tasa de inflación real  $p$  supera a la tasa esperada  $\pi$ , ésta, dado que ha sido una estimación demasiado baja, se revisa al alta para el próximo período. Recíprocamente, si  $p$  es inferior a  $\pi$ , entonces  $\pi$  se revisa a la baja. La velocidad del ajuste depende de  $j$ .*

*Considera el modelo dado por la ecuaciones (3), (5) y (6).*

- Elimina  $p_t$  y escribe un sistema de ecuaciones en diferencias para las variables  $(U_t, \pi_t)$ .*
- Utilizando la condición de Jury, determina si el sistema es g.a.e.*
- Encuentra e interpreta los puntos fijos o soluciones de equilibrio del sistema.*

#### **Solución:**

- Substituting  $p_t$  into (3) and (6) we have

$$\begin{pmatrix} U_{t+1} \\ \pi_{t+1} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 - k\beta & kg \\ 1 - j(1 - g) & -\beta j \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} U_t \\ \pi_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k(\alpha - m - T) \\ j(\alpha - T) \end{pmatrix}$$

- The characteristic polynomial is

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \overbrace{(2 - j(1 - g) - k\beta)}^p \lambda + \overbrace{(1 - j(1 - g) - k\beta(1 - j))}^q.$$

Recall that the Jury condition assuring that the module of the roots are smaller than 1 is  $|p| < 1 + q < 2$ . Applied to our model obtains

$$|2 - j(1 - g) - k\beta| < 2 - j(1 - g) - k\beta(1 - j) < 2.$$

Note that the second inequality is always true because all the parameters are positive and  $0 < g, j \leq 1$ . Thus, the condition reduces to

$$(7) \quad |2 - j(1 - g) - k\beta| < 2 - j(1 - g) - k\beta(1 - j).$$

We have two cases to consider.

- $2 - j(1 - g) - k\beta \geq 0$ . Then, the Jury condition is obviously fulfilled.
- $2 - j(1 - g) - k\beta < 0$ . Then, Eqn. (7) is

$$k\beta(2 - j) + 2j(1 - g) < 4.$$

<sup>5</sup>M. Friedman (1968) "The role of monetary policy," *American Economic Review*, pp. 1-17.

Resuming, the system is g.a.s. iff

$$j(1 - g) + k\beta \leq 2$$

or

$$j(1 - g) + k\beta > 2 \quad \text{and} \quad k\beta(2 - j) + 2j(1 - g) < 4.$$

To put an example, suppose that  $j = g = 0.5$  and consider the product  $k\beta$  as the parameter. Then the above two conditions show that the system is g.a.s. iff  $k\beta \in (0, \frac{7}{3})$ .

- (c) The fixed point of the system  $(U^*, \pi^*)$  is easily found without resorting to the inverse matrix  $(I_2 - A)^{-1}$  as follows. It is clear that in any equilibrium solution, the inflation rate  $p$  must be also constant,  $p^*$  say. After plugging  $U_t = U^*$  into (3) we find

$$0 = -k(m - p^*).$$

Thus,  $p^* = m$ . The equilibrium rate of inflation is equal to the rate of monetary expansion. In the same way, putting  $\pi_t = \pi^*$  into (6)

$$0 = j(p^* - \pi^*).$$

Thus,  $\pi^* = p^* = m$ , the expected inflation rate is exactly equal to the actual inflation rate. Finally, substituting  $U_t = U^*$  into (5) we get

$$p^* = \alpha - T - \beta U^* + gp^*$$

or

$$U^* = \frac{1}{\beta}(\alpha - T - (1 - g)p^*).$$

This is called the *long-run* Phillips relation. As  $g \leq 1$ , it shows a downward sloping relation between rate of unemployment and inflation rate. When  $g = 1$ ,  $U^*$  is independent of  $p^*$ . The value of  $U^*$  in this case is referred as the *natural rate of unemployment*, which is consistent with any equilibrium rate of inflation.