Capítulo 3: Ecuaciones Diferenciales

1. Introducción. Definiciones y clasificación

En este tema consideramos funciones $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o vectores de funciones $\mathbf{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ descritas por ecuaciones de la forma

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)),$$

y posiblemente que satisfacen una condición inicial del tipo $x(t_0) = x_0$.

Objetivos:

(1) Determinar $x(t)$ en forma cerrada;
(2) estudiar las propiedades cualitativas de $x(t)$ (estabilidad);
(3) analizar modelos económicos que se plantean mediante ecuaciones diferenciales.

Notación:

- x es la función incógnita y t la variable independiente;
- $\frac{d}{dt}x(t) \equiv \frac{dx}{dt}, x'(t)$, x', $\dot{x}(t)$, $\dot{x}$, $x^{(1)}(t)$, $x^{(1)}$.
- Derivadas de orden superior: $\frac{d^k}{dt^k}x(t) \equiv x^{(k)}(t)$. Special case $k = 2$, x'', $\ddot{x}$, $x^{(2)}$.
- Pueden considerarse otros nombres para las variables, e.g. $\frac{d}{dx}y(x)$, $y'(x)$.

Definición 1.1. Una ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) escalar de orden k es una ecuación de la forma

$$x^{(k)}(t) = f(t, x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)). \tag{1.1}$$

Observar que k es la derivada de orden superior que aparece en la ecuación.

Definición 1.2. Un sistema de EDOs de primer orden es un sistema de ecuaciones de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \tag{1.2}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)'$, $x_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_i : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

Definición 1.3. Un poblema de valores inciales o problema de Cauchy para un sistema de primer orden está formado por el sistema de EDOs (1.2) junto con una condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Definición 1.4. Un problema de valores iniciales o problema de Cauchy para una EDO de orden k consiste en resolver (1.1) junto con las condiciones

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1},$$

donde $(t_0, x_0, x_1, \ldots, x_k) \in D$.

Por ejemplo,

$$\dot{x} = t \operatorname{sen} x, \quad x(0) = \pi$$

es un problema de Cauchy, así como

$$\ddot{x} = e^{\dot{x}} - tx, \quad x(1) = 2, \quad \dot{x}(1) = -1.$$

Bajo condiciones adecuadas, un problema de Cauchy admite una única solución.

Definición 1.5.
- La EDO (1.2) es lineal si para cada t fijo, la aplicación $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ es lineal.
- La ODE (1.2) es autńoma si $\mathbf{f}$ es independiente de t.

2. Métodos elementales de integración

Estudiamos algunos casos particulares en los que la ecuación escalar de primer orden

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{2.1}$$

puede resolverse explícitamente.

El caso más simple es cuando f es independiente de x,

$$\dot{x}(t) = f(t), \quad t \in I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}.$$

Determinar $x(t)$ consiste en *integrar* f. El Teorema Fundamental del Cálculo Integral afirma que

$$x(t) = C + \int_a^t f(s)\, ds,$$

con C una constante. La solución que pasa por (a, x_0), es decir, que cumple $x(a) = x_0$, se determina tomando la constante $C = x_0$. Incluso en este caso simple la solución encontrada puede ser de poco interés práctico y su estudio cualitativo puede ser más interesante. La aproximación numérica de la solución es otra posibilidad.

La solución de $\dot{x}(t) = t$ que satisface $x(0) = 1$ es $x(t) = 1 + \int_0^t s\, ds = 1 + \frac{s^2}{2}$, pero la solución de $\dot{x}(t) = e^{t^2}$ no admite una expresión cerrada, $x(t) = 1 + \int_0^t e^{-s^2}\, ds$, puesto que esta integral no puede encontrarse explícitamente.

2.1. Ecuaciones Separables.

Definición 2.1. Una EDO de primer orden es separable si f es de la forma $f(t, x) = g(t)h(x)$, es decir

$$\dot{x}(t) = g(t)h(x(t)).$$

Método de solución: Sean $H(x)$ y $G(t)$ primitivas de $1/h(x)$ y de $g(t)$ respectivamente ($H' = 1/h$ y $G' = g$). Seguimos los siguientes pasos:

$$\begin{array}{ll} \text{(i) Separación de variables:} & \dfrac{\dot{x}}{h(x)} = g(t), \\ \text{(ii) Regla de la cadena:} & \dfrac{d}{dt}H(x(t)) = \dfrac{d}{dt}G(t), \\ \text{(iii) Integración con respecto a } t\text{:} & H(x(t)) = G(t) + C. \end{array}$$

La expresión así obtenida define a $x(t)$ implícitamente. La constante C de determina en general de manera única al fijar una condición $x(t_0) = a$.

Ejemplo 2.2. Para encontrar la solución de $\dot{x} = tx^2$, seguimos los pasos anteriores

$$\frac{\dot{x}}{x^2} = t \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = t\,dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} = \int t\,dt.$$

Integrando, encontramos

$$-x^{-1} = \frac{t^2}{2} + C.$$

Resolviendo, tenemos

$$x(t) = -\frac{1}{\frac{t^2}{2} + C}.$$

Si queremos hallar la solución que pasa por $(0, 1)$, entonces

$$1 = x(0) = -\frac{1}{C} \Rightarrow C = -1,$$

luego

$$x(t) = -\frac{1}{\frac{t^2}{2} - 1}.$$

La solución existe sólo en el intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

2.2. **Ecuaciones exactas.** Supongamos que tenemos una EDO de primer orden

$$\dot{x}(t) = -\frac{P(t, x(t))}{Q(t, x(t))}, \tag{2.2}$$

para ciertas funciones P, Q, tal que $Q(t, x) \neq 0$ para cada punto (t, x) en algún conjunto D.

La ecuación puede escribirse como $Q(t, x)\dot{x} = -P(t, x)$, e interpretando $\dfrac{dx}{dt}$ como un cociente (esto no es riguroso, pero su consideración como un cociente hace muy intuitiva la resolución de estas ecuaciones) podemos reescribir esta EDO como

$$P(t, x)\,dt + Q(t, x)\,dx = 0. \tag{2.3}$$

Sea V una función de las variables (t, x), de clase C^2 (las derivadas parciales de segundo orden existen y son funciones continuas). La diferencial de V es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}\,dt + \frac{\partial V}{\partial x}\,dx.$$

Supongamos que es posible encontrar la función V tal que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = P. \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Q. \tag{2.5}$$

Entonces la diferencial de V es idénticamente nula a lo largo de las soluciones de la EDO:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}\,dt + \frac{\partial V}{\partial x}\,dx = P\,dt + Q\,dx = 0$$

Por tanto, las soluciones de la EDO están dadas implícitamente por la ecuación

$$V(t, x(t)) = C.$$

Esta importante observación motiva la siguiente definición:

Definición 2.3. La EDO (2.2) (o (2.3)) es *exacta* en un entorno D del punto (t_0, x_0) si $Q(t_0, x_0) \neq 0$ y existe una función V de clase C^2 en D que satisface (2.4) y (2.5).

Nos preguntamos cuándo existe una función V satisfaciendo (2.4) y (2.5). Si se cumplieran ambas condiciones, entonces

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = \frac{\partial P}{\partial x}. \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{2.7}$$

Dado que el orden de derivación da el mismo resultado para un función de clase C^2,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x},$$

obtenemos las condiciones necesarias y suficientes

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x).$$

Teorema 2.4. *Supongamos que P y Q son C^1 en un entorno D del punto (t_0, x_0). La condición necesaria y suficiente para que la EDO* (2.2) *(o* (2.3)*) sea exacta en D es que se cumpla*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} \tag{2.8}$$

en D.

Ejemplo 2.5. La EDO $(2t - x^2)\,dt + 2tx\,dx = 0$ no es exacta, dado que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -2x \neq 2x = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Por otra parte, la EDO

$$(2t - x^2)\,dt - 2tx\,dx = 0$$

es exacta. Resolvámosla. Una vez que determinamos V, el problema está finalizado. Para encontrar V comenzamos con la ecuación (2.4)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = P(t,x) = 2t - x^2.$$

Integrando con respecto a t tenemos

$$V(t,x) = \int (2t - x^2)\, dt = t^2 - tx^2 + \psi(x), \tag{2.9}$$

donde ψ es una función de x que debemos determinar utilizando la otra condición, (2.5), es decir,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Q(t,x) = -2tx.$$

Derivando en (2.9) con respecto a x tenemos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2tx + \psi'(x)$$

e igualando ambas expresiones

$$\psi'(x) = 0.$$

Elegimos $\psi = 0$. Finalmente, $V(t,x) = t^2 - tx^2$ y dado que la solución satisface $V(t,x(t)) = C$, tenemos

$$t^2 - tx^2(t) = C \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{t - \frac{C}{t}} \quad (t \neq 0).$$

2.3. **Ecuaciones no exactas. Factor integrante.** Si la ecuación

$$P(t,x)\, dt + Q(t,x)\, dx = 0$$

no fuera exacta, podríamos multiplicarla por una función no nula $\mu(t,x)$ tal que la ecuación

$$\mu(t,x)P(t,x)\, dt + \mu(t,x)Q(t,x)\, dx = 0$$

se torne exacta. La función μ se llama *factor integrante*. Desafortunadamente, encontrar factores integrantes es difácil, excepto en los dos siguientes casos:

(1) El cociente

$$a(t) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q}$$

es independiente de x. Entonces

$$\mu(t) = e^{\int a(t)\, dt}$$

es un factor integrante.

(2) El cociente

$$b(x) = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}}{P}$$

es independiente de t. Entonces

$$\mu(x) = e^{\int b(x)\,dx}$$

es un factor integrante.

Ejemplo 2.6. La ecuación

$$(t^2 + x^2)\,dt - 2tx\,dx = 0 \tag{2.10}$$

no es exacta, dado que $\partial P/\partial x = 2x \neq -2x = \partial Q/\partial t$. Para encontrar un factor integrante consideramos los dos cocientes anteriores:

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}}{P} = \frac{-4x}{t^2 + x^2},$$

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q} = \frac{4x}{-2tx} = -\frac{2}{t}, \text{ independiente de } x.$$

Luego

$$\mu(t) = e^{-\int 2/t} = e^{-2\ln t} = e^{\ln t^{-2}} = t^{-2}$$

es un factor integrante. Multiplicamos la ecuación (2.10) por μ, transformando la ecuación en otra equivalente

$$\frac{t^2 + x^2}{t^2}\,dt + \left(-\frac{2x}{t}\right)\,dx = 0,$$

que es exacta, dado que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2x}{t^2} = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Ahora hallamos V utilizando (2.4)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = P = \frac{t^2 + x^2}{t^2} = 1 + x^2 t^{-2},$$

luego

$$V(t,x) = \int (1 + x^2 t^{-2})\,dt = t - x^2 t^{-1} + \psi(x).$$

Derivando con respecto a x tenemos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2xt^{-1} + \psi'(x).$$

Por otra parte, por (2.5)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Q = -2\frac{x}{t},$$

obtenemos $\psi = 0$, y la solución está dada por

$$t - x(t)^2 t^{-1} = C.$$

2.4. **Ecuaciones lineales.**

Definición 2.7. La EDO de primer orden
$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = b(t)$$
se denomina *lineal*. Aquí, $a(t)$ y $b(t)$ son funciones dadas.

Para resolver la EDO lineal, procederemos como sigue. Sea $\mu(t) = e^{\int a(t)\,dt}$ y multiplicamos la ecuación por $\mu(t)$
$$(\dot{x} + a(t)x)\mu(t) = b(t)\mu(t).$$
Observamos que $\dot{\mu}(t) = a(t)\mu(t)$ luego,
$$(\dot{x}(t) + a(t)x(t))\mu(t) = \dot{x}(t)\mu(t) + x(t)a(t)\mu(t) = \dot{x}(t)\mu(t) + x(t)\dot{\mu}(t) = \frac{d}{dt}(x(t)\mu(t)).$$
Integrando, tenemos
$$\int \frac{d}{dt}(x(t)\mu(t))\,dt = \int b(t)\mu(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad x(t)\mu(t) = \int b(t)\mu(t)\,dt.$$
Resolviendo para $x(t)$ encontramos
$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int b(t)\mu(t)\,dt. \tag{2.11}$$
Recordando que la integral indefinida denota una primitiva más una constante arbitraria, tenemos que para cada constante t_0
$$\int_{t_0}^{t} b(s)\mu(s)\,ds$$
es una primitiva de $b(t)\mu(t)$, así que podemos escribir
$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int_{t_0}^{t} b(s)\mu(s)\,ds + C \right),$$
y podemos determinar la constante C si estamos tratando de identificar la solución que satisface $x(t_0) = x_0$:
$$x_0 = \frac{1}{\mu(t_0)} C \Rightarrow C = x_0\mu(t_0),$$
$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int_{t_0}^{t} b(s)\mu(s)\,ds + x_0\mu(t_0) \right). \tag{2.12}$$
Recopilando, hemos demostrado el siguiente resultado:

Teorema 2.8. *La única solución de $\dot{x}(t) + a(t)x(t) = b(t)$ que pasa a través de (t_0, x_0) está dada por* (2.12).

Por supuesto, no es necesario recordar la fórmula. Es más útil recordar los pasoso que nos han llevado a ella.

Ejemplo 2.9. Resolver el problema de Cauchy $t^2\dot{x} + tx = 1$, $x(1) = 2$.

SOLUCIÓN: Primero dividimos por el coeficiente de $\dot{x}$ para llegar a la forma estándar

$$\dot{x} + \frac{x}{t} = \frac{1}{t^2}.$$

Identificamos $a(t) = -1/t$ y $b(t) = 1/t^2$. Dado que $\int a(t)\,dt = \ln t$, tenemos $\mu(t) = t$. Utilizando (2.11) llegamos a

$$x(t) = \frac{1}{t}\int \frac{1}{t^2} t\,dt = \frac{1}{t}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{t}(\ln t + C).$$

Esta es la solución general. La solución particular pasando por $(1, 2)$ da $2 = C$, luego $x(t) = \frac{1}{t}(\ln t + 2)$.

Ejemplo 2.10. Resolver la ecuación lineal $\dot{x} + ax = b$ con valor inicial $x(t_0) = x_0$, donde $a \neq 0$ y b son constantes.

SOLUCIÓN: Aquí, $\mu(t) = e^{\int a\,dt} = e^{at}$ y de (2.11)

$$x(t) = e^{-at}\int be^{at}\,dt = e^{-at}\left(\frac{b}{a}e^{at} + C\right) = \left(\frac{b}{a} + Ce^{-at}\right). \tag{2.13}$$

Imponiendo $x(t_0) = x_0$ determinar la constante C como sigue:

$$x_0 = \left(\frac{b}{a} + Ce^{-at_0}\right) \Rightarrow C = \left(x_0 - \frac{b}{a}\right)e^{at_0}$$

y poniendo el valor de C en la ecuación (2.13), tenemos

$$x(t) = \frac{b}{a} + \left(x_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-a(t-t_0)}.$$

Por ejemplo, la solución de la ecuación $\dot{x} + 2x = 10$ con $x(0) = -1$ es

$$x(t) = 5 - 6e^{-2t}.$$

2.5. **Diagrama de fases para ecuaciones escalares de primer orden.** Realizar el *diagrama de fases* de la *ecuación autónoma* $\dot{x} = f(x)$ consiste en representar la gráfica de f en el plano $(x, \dot{x})$. Los ceros de f corresponden a los *estados estacionarios*, o *puntos de equilibrio* de la ecuación, es decir, soluciones constantes de la ODE.

Definición 2.11 (Puntos de equilibrio)**.** Un punto de equilibrio de la ODE autónoma $\dot{x} = f(x)$ es cualquier número real x^0 que satisface $f(x^0) = 0$.

Los puntos de equilibrio son muy importantes para conocer el comportamiento de la dinámica de las soluciones. Analizando la gráfica de F puede obtenerse información de la monotonía de las soluciones. Si $f > 0$ en un intervalo, entonces $x(t)$ crece en este intervalo, lo que puede indicarse marcando una flecha apuntando hacia la derecha. Igualmente, si $f < 0$, entonces $x(t)$ decrece en este intervalo y la flecha que describe el movimiento de x apuntará hacia la izquierda.

Tenemos las siguientes posibilidades.

- $f > 0$ en (a, x^0) y $f > 0$ en (x^0, b). La solución x converge a x^0 a partir de condiciones iniciales $a < x_0 < x^0$ y diverge de x^0 si $b > x_0 > x^0$ (**solución inestable**);
- $f > 0$ en (a, x^0) y $f < 0$ en (x^0, b). La solución x converge a x^0 desde cualquier condición inicial $a < x_0 < b$ (**solución estable**);
- $f < 0$ en (a, x^0) y $f > 0$ en (x^0, b). La solución x diverge de x^0 desde cualquier condición inicial $a < x_0 < b$ (**solución inestable**);
- $f < 0$ en (a, x^0) y $f < 0$ en (x^0, b). La solución x diverge de x^0 desde condiciones iniciales $a < x_0 < x^0$ y converge a x^0 desde $b > x_0 > x^0$ (**solución inestable**).

Podemos resumir estos casos de la siguiente forma: un punto de equilibrio x^0 es *localmente asintt́icametne estable* si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x^0 - \delta, x^0 + \delta)$, $x \neq x^0$ tenemos

$$(x - x^0)f(x) < 0$$

y es *inestable* en otro caso:

$$(x - x^0)f(x) < 0.$$

Ejemplo 2.12. La EDO $\dot{x} = f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ tiene tres puntos de equilibrio $f(x) = 0$: $x_1^0 = -2$, $x_2^0 = 1$ and $x_0^3 = 3$. La función es negativa en $(-\infty, -2)$, positiva en $(-2, 1)$, negativa en $(1, 3)$ y positiva en $(3, \infty)$. Luego,

$$x_1^0 = -2 \text{ es inestable;}$$
$$x_2^0 = 1 \text{ es localmente asintóticamente estable;}$$
$$x_0^3 = 3 \text{ es inestable.}$$

3. Aplicaciones

Ejemplo 3.1 (Mecanismo de ajuste de Walras)**.** Los modelos económicos analizan a menudo las tasas de variación de ciertas variables. En la Teoría del Análisis del Equilibrio, la tasa de variación del precio de mercado del bien x depende de la función exceso de demanda E (cantidad demandada menos cantidad ofertada, $E = D - S$)

$$\dot{p}(t) = E(p(t)), \tag{3.1}$$

donde p es el precio. Esta es una EDO de primer orden, llamada *mecanismo de ajuste de precios de Walras.* Observar que $E(p) > 0$ implica que p aumenta, mientras que $E(p) < 0$ significa que p cae. Supongamos que $D(p) = \alpha - \beta p$ y $S(p) = -\gamma + \delta p$, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, con $\delta > \beta$. Tenemos

$$\dot{p} = D(p) - S(p) = \alpha + \beta p + \gamma - \delta p = (\beta - \delta)p + \alpha + \gamma.$$

Esta es una ODE lineal de coeficientes constantes. La solución es

$$p(t) = p(0)e^{(\beta-\delta)t} + \frac{\alpha + \gamma}{\delta - \beta}(1 - e^{(\beta-\delta)t}).$$

La solución tiende al precio de equilibrio $p^0 = \frac{\alpha+\gamma}{\delta-\beta} > 0$, dado que $\beta < \delta$.

Ejemplo 3.2 (Un modelo de valoración de activos)**.** Sea $p(t)$ el precio de un activo que proporciona unos dividendos de $D(t)\,dt$ euros, y sea r el tanto de interés de un bono sin riesgo. Nuestra intención es determinar el precio $p(t)$ en términos de los dividendos y de la tasa de interés. Para ello, consideramos un intervalo de tiempo $[t,\tau]$, y el flujo total de capital proporcionado por la posesión del activo en dicho intervalo, $\int_t^\tau D(s)\,ds$, así como la apreciación del valor del activo p, $p(\tau)-p(t)$. La condición de no arbitraje (es decir, la imposibilidad de obtener una ganacia positiva partiendo de capital nulo) implica que el flujo de capital más el incremento del valor del título debe ser igual al interés proporcionado por una cuenta bancaria en que se deposita el valor del activo, al tanto r, es decir

$$\int_t^\tau D(s)\,ds + p(\tau) - p(t) = p(t)e^{r(\tau-t)} - p(t). \tag{3.2}$$

Dividiendo por $(\tau-t)$, tomando límites cuando $\tau\to t$, y asumiendo que D es continua (por la derecha al menos), tenemos después de aplicar la regla de L'Hospital

$$\lim_{\tau\to t}\frac{\int_t^\tau D(s)\,ds}{\tau-t} = \frac{0}{0} = \lim_{\tau\to t}\frac{D(\tau)}{1} = D(t), \qquad \text{(regla de L'Hospital).}$$

$$\lim_{\tau\to t}\frac{p(\tau)-p(t)}{\tau-t} = \dot p(t), \qquad \text{(definición de derivada).}$$

$$\lim_{\tau\to t}\frac{e^{r(\tau-t)}-1}{\tau-t} = \frac{0}{0} = \lim_{\tau\to t}\frac{re^{r(\tau-t)}}{1} = r, \qquad \text{(regla de L'Hospital).}$$

Encontramos la EDO lineal

$$D(t) + \dot p(t) = rp(t) \quad\Rightarrow\quad \dot p(t) - rp(t) = -D(t), \tag{3.3}$$

que es *la ecuación fundamental de valoración* del activo[1] Dados los dividendos $D(t)$, el precio del activo se determina en cada instante de tiempo por la EDO (3.3), que al ser lineal puede resolverse explícitamente utilizando (2.12) con $\mu(t) = e^{-\int r\,dt} = e^{-rt}$ para obtener

$$p(t) = e^{rt}\left(-\int_0^t D(s)e^{-rs}\,ds + p(0)\right).$$

Aquí $p(0)$ es el precio del activo hoy, y despejando en la ecuación tenemos

$$p(0) = e^{-rt}p(t) + \int_0^t D(s)e^{-rs}\,ds.$$

[1]Si el tanto de interés es una función de t, $r(t)$, entonces la ecuación fundamental es

$$D(t) + \dot p(t) = r(t)p(t).$$

Se obtiene de la misma forma que para r constante, utilizando la identidad

$$\int_t^\tau D(s)\,ds + p(\tau) - p(t) = p(t)e^{\int_t^\tau r(s)\,ds} - p(t),$$

en lugar de (3.2).

El precio del activo hoy iguala el valor presente de todos los dividendos descontados sólo si

$$\lim_{t\to\infty} e^{-rt}p(t) = 0.$$

Suponiendo que esto es así (*la condición de no existencia de burbujas*), entonces el precio del activo definitivamente es

$$p(0) = \int_0^\infty D(s)e^{-rs}\,ds,$$

es decir, el *valor fundamental del activo* es la "suma" descontada de todos los dividendos futuros.

Algunos ejemplos: Cuál es el precio de un activo que paga unos dividendos de $1\,dt$ euros perpétuamente? De acuerdo a la fórmula anterior es

$$p(0) = \int_0^\infty e^{-rs}\,ds = \frac{1}{r}\lim_{t\to\infty}(1 - e^{-rt}) = \frac{1}{r}.$$

Cuál es el precio de un activo que paga $1\,dt$ euro hasta $t < 10$ y a partir de $t = 10$, paga $2\,dt$ euros, conociendo que el tanto de interés del mercado es $r = 0.025$? La respuesta es

$$\begin{aligned} p(0) &= \int_0^{10} e^{-0.025s}\,ds + 2\int_{10}^\infty e^{-0.025s}\,ds \\ &= 40(1 - e^{-0.25}) + 80\lim_{t\to\infty}(e^{-0.25} - e^{-0.025t}) \\ &= 40(1 - e^{-0.25}) + 80e^{-0.25} = 40(1 + e^{-0.25}) = 71.152 \quad \text{euros.} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3 (Modelo de Malthus)**.** El economista británico Thomas Malthus (1766–1834) observó que muchas poblsciones biológicas se incrementan a una tasa proporcional al tamaño de la Población, P, es decir,

$$\dot{P}(t) = rP(t), \tag{3.4}$$

donde la constante de proporcionaldad r es la tasa de crecimiento, positiva o negativa. El modelo matemático con $r > 0$ predice que la Población crecerá exponencialmente. La solución es

$$P(t) = P_0e^{rt},$$

donde P_0 es la Población en el momento inicial. Malthus propuso este modelo después de inspeccionar datos del censo de los Estados Unidos, que mostraba una duplicación de la Población cada 50 a n os. Dado que los medios de subsistencia se incrementaban en progresión aritmética, Malthus argumentaba que la Tierra no podría alimentar a la humanidad. Este punto de vista tuvo un gran impacto en la Sociología del siglo XIX.

Para ver cómo se ajusta el modelo a la realidad, consideremos la Población de los Estados Unidos en 1800, que era de 5.3 millones. Tomando $r = 0.03$ (que es una buena aproximación de la tasa real de crecimiento en los años próximos a 1800), se obtiene $P(t) = 5.3e^{0.03t}$ millones para la Población del año $1800 + t$. Esta fórmula predice que en 1850 la Población será $P(50) = 23.75$ millones, mientras que la Población real era de 23.19 millones. Para el año 1900 predecía $P(100) = 106.45$ millones de estadounidenses, pero la Población real era de 76.21 millones. Como podemos ver, el modelo aproxima bien en años cercanos al inicial, pero la precisión disminuye para intervalos largos de tiempo, revelando que el incremento de la Población no es proporcional al tamaño de la Población.

Ejemplo 3.4 (Modelo de Verhulst)**.** El matemático belga P.F. Verhulst (1804–1849) observó que las limitaciones de espacio, de la comida disponible, o de otros recursos, reducen la tasa de crecimiento, impidiendo el crecimiento exponencial. Por este motivo, modificó la ecuación de Malthus (3.4), reemplazando la constante r por una función de P, $r(P)$

$$\dot{P}(t) = r(P(t))P(t).$$

Verhulst supuso que $r(P) = r - mP$, donde r y m son constantes. Por tanto, la Población evoluciona de acuerdo a

$$\dot{P}(t) = rP(t) - mP^2(t), \tag{3.5}$$

que se conoce como la *ecuación logística*. Podemos reescribirla como

$$\dot{P}(t) = r\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)P(t),$$

donde $K = r/m$. La constante r es la tasa de crecimiento intrínseco y K es el nivel de Población de saturación, o capacidad máxima del medio ambiente.

La ecuación logística es separable y puede encontrarse la solución de forma explícita a partir de la identidad

$$\int \frac{dP}{P(1-\frac{P}{K})} = \int r\,dt.$$

La descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{P(1-\frac{P}{K})} = \frac{A}{P} + \frac{B}{1-\frac{P}{K}}$$

da $A = 1$ y $B = 1/K$, por lo que

$$\ln\left|\frac{P}{K-P}\right| = rt + C. \tag{3.6}$$

Imponiendo la condición inicial $P(0) = P_0$, la constante C queda determinada por

$$C = \ln\left|\frac{P_0}{K-P_0}\right|.$$

Substituyendo ese valor de C en (3.6) y tomando exponenciales a ambos lados de la igualdad tenemos

$$\left|\frac{P}{K-P}\right| = e^{rt}\left|\frac{P_0}{K-P_0}\right|.$$

Es posible probar que si $P_0 < K$, entonces $P(t) < K$ y si $P_0 > K$, entonces $P(t) > K$ para todo t, por lo que podemos eliminnar el valor absoluto y resolver para $P(t)$, obteniendo

$$P(t) = \frac{KP_0}{P(0) + (K-P_0)e^{-rt}}.$$

Observar que $\lim_{t\to\infty} P(t) = K$ si $r > 0$.

Volviendo al ejemplo de la Población de los EE.UU., supondremos que $K = 300$ (que es una cantidad próxima a la Población de los EE.UU. en 2009 y, por tanto, es un nivel muy modesto para la capacidad máxima real) y $r = 0.03$ (una buena aproximación para la tasa de crecimiento intrínseco en 1800, pero lejos de la tasa de crecimiento intrínseco en 2009). El dato inicial del año 1800 era de 5.3. Usando este dato encontramos que $P(50) = 22.38$ y $P(100) = 79.61$, mientras que la Población real en el año 1900 era de 76.21.

La Figura 1 representa P/K para una Población que sigue la ecuación logística con $r = 0.71$ (con propósitos ilustrativos), considerando diversas condiciones iniciales. La línea más gruesa es la solución con $P(0) = 0.25K$.

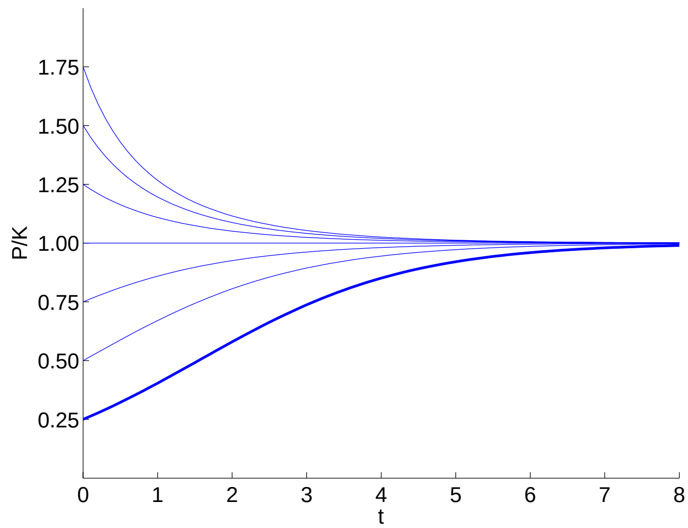


FIGURE 1. P/K como función de t para la ecuación logística con $r = 0.71$.

Ejemplo 3.5 (Población con un umbral)**.** Ahora suponemos que cuando la Población cae por debajo de un cierto nivel o umbral, la especie está condenada a la extinción, pero por encima de ese nivel la Población sigue el crecimiento logístico. Para describir esta situación podemos proponer el modelo (omitimos t)

$$\dot{P} = -r\left(1 - \frac{P}{A}\right)\left(1 - \frac{P}{B}\right)P, \tag{3.7}$$

donde $0 < A < B$. La constante A es el umbral de la Población y B es la capacidad máxima del medio ambiente. Hay tres puntos estacionarios, $P = 0$, $P = A$ y $P = B$, que corresponden a las soluciones de equilibrio $P_1(t) = 0$, $P_2(t) = A$ y $P_3(t) = B$, respectivamente. A partir de la Figura 2, es claro que $P' > 0$ para $A < P < B$ y $P' < 0$ para $y < A$ o $y > B$. En consecuencia, las soluciones de equilibrio $P_1(t)$ y $P_3(t)$ son asintóticamente estables, y la solución $P_2(t)$ es inestable. La Población se extingue cuando $P(0) < A$, por lo que A es llamado el umbral de la Población.

En la Figura 3 se representan varias soluciones de $\dot{P} = -0.25P(1-P)(1-P/3)$ usando diferentes valores iniciales P_0.Cuando $0 < P(0) < 1$, $\lim_{t\to\infty} P(t) = 0$, y si $1 < P(0) < 3$ o $P(0) > 3$, entonces $\lim_{t\to\infty} P(t) = 3$.

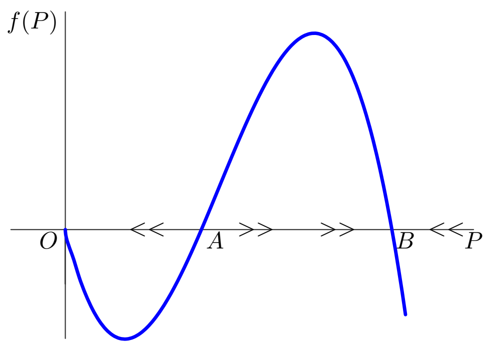


FIGURE 2. Espacio de fases en el modelo de la Población con un umbral.

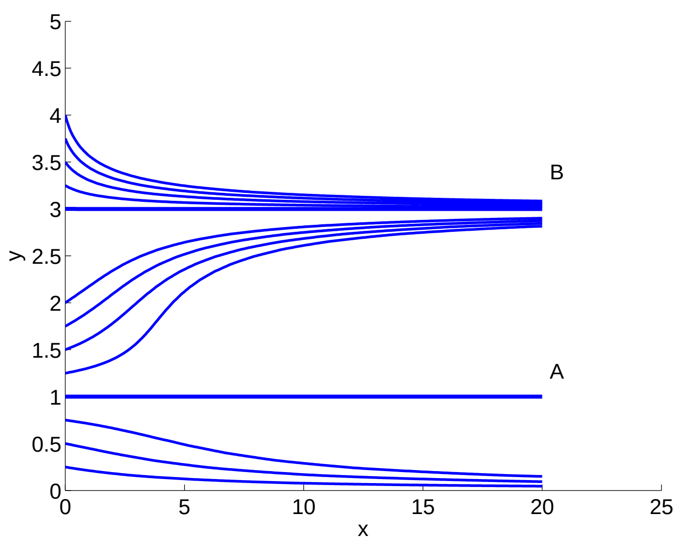


FIGURE 3. Varias soluciones en el modelo de la Población con un umbral.

Ejemplo 3.6 (El modelo de Solow)**.** El modelo económico dinámico de Solow (1956) supuso el comienzo de la moderna teoría del crecimiento económico. está basado en las siguientes hipótesis.

(1) La mano de obra, L, crece a una tasa constante n, i.e. $\dot{L}/L = n$;

(2) El ahorro $S = sY$ se invierte totalmente en la formación de capital, $I = \dot{K} + \delta K$, donde Y denota el output en la economía, K capital y $\delta, s \in (0,1]$ son constantes (δ es la tasa de depreciación del capital):

$$sY = \dot{K} + \delta K.$$

(3) La función de producción $F(L,K)$ depende de la mano de obra L y del captal K, y es de rendimientos constantes a escala $F(\lambda L, \lambda K) = \lambda F(K,L)$. Un ejemplo típico es la función de producción de Cobb–Douglas $F(K,L) = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$, $\alpha \in [0,1]$.

Tomando $\lambda = L$

$$Y = F(K,L) = F\left(L\frac{K}{L}, L\right) = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right) = Lf(k),$$

donde $k = \frac{K}{L}$ denota capital per–capita y $f(k) = F(k,1)$.

La ecuación fundamental de este modelo del crecimiento económico es:

$$\begin{aligned}\dot{k} &= \frac{d}{dt}\frac{K}{L} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} \\ &= \frac{sLf(k) - \delta K}{L} - nk = sf(k) - (\delta + n)k.\end{aligned}$$

Por tanto, el capital per–capita evoluciona de acuerdo a la ODE

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k.$$

Las hipótesis habituales sobre f son que f creciente y estrictamente cóncava y que existe un stock de capital sostenible máximo, k_m, es decir, $f(k) < k$ para $k > k_m$ y $f(k) < k$ para $k < k_m$.

Existen dos puntos de equilibrio ($\dot{k} = 0$), que son $k = 0$ y $k = k_e$, este último que satisface $sf(k_e) - (\delta + n)k_e = 0$. El punto 0 is inestable, mientras que k_e es estable. Esto puede verse en el espacio de fases ($\lambda = \delta + n$).

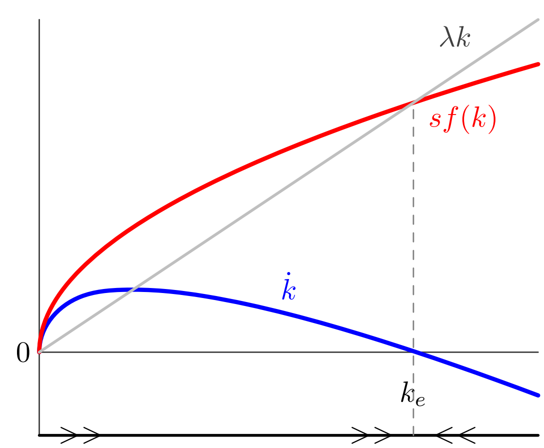


FIGURE 4. Espacio de fases en el modelo de Solow.

4. EDOs lineales de segundo orden

Definición 4.1. Una EDO lineal de segundo orden tiene la forma

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t), \tag{4.1}$$

donde a_1, a_0 y b son funciones dadas. En el caso en que a_1 y a_0 son constantes, la ODE es de coeficientes constantes (incluso si el término independiente b no es constante). En el caso $b = 0$, la ODE se llama homogénea.

Definición 4.2. La solución general de (4.1) es el conjunto de todas las soluciones; una solución particular es cualquiera de los elementos de este conjunto.

El espacio de soluciones de una EDO lineal homogénea tiene estructura de subespacio vectorial.

Proposición 4.3. *Si x_1 y x_2 son soluciones de la EDO homogénea, entonces para cualesquiera constantes C_1 y C_2, $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ es también una solución.*

Teorema 4.4. *La solución general de la EDO completa* (4.1) *es la suma de la ecuación general de la homogénea, x_h, y de una solución particular, x_p:*

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

A continuación mostramos cómo puede encontrarse la solución general x_h de una ecuación homogénea de *coeficientes constantes*.

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0, \qquad a_1, a_0 \quad \text{constant.} \tag{4.2}$$

Definición 4.5. La ecuación característica de (4.2) es

$$r^2 + a_1r + a_0 = 0.$$

Teorema 4.6. *Sean r_1, r_2 las soluciones (reales o complejas) de la ecuación característica. Entonces, la solución general de la ecuación homogénea tiene una de las siguientes formas:*

(1) r_1 y r_2 son reales y distintas,

$$x_h(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}.$$

(2) $r_1 = r_2 = r$ es real de multiplicidad dos,

$$x_h(t) = C_1e^{rt} + C_2te^{rt}.$$

(3) r_1, r_2 son complejas conjugadas, $r_{1,2} = a \pm ib$,

$$x_h(t) = e^{at}(C_1 \cos bt + C_2 \operatorname{sen} bt).$$

Ejemplo 4.7. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones homogéneas.

(1) $\ddot{x} - x = 0$; dado que $r^2 - 1 = 0$ es la ecuación característica,

$$x_h(t) = C_1e^{t} + C_2e^{-t}.$$

(2) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$; dado que $r^2 - 4r - 4 = (r-2)^2 = 0$ es la ecuación característica,

$$x_h(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t}.$$

(3) $\ddot{x} + x = 0$; dado que $r^2 + 1 = 0$ es la ecuación característica, que tiene raíces $\pm i$ $(a = 0,\ b = 1)$,

$$x_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t.$$

Para obtener la solución general de la ecuación completa, necesitamos dar métodos para encontrar una solución particular. Esto es posible sólo en algunos casos concretos. Consideramos únicamente la ecuación con coeficientes constantes

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = b(t),$$

donde $b(t)$ es:

- *Un polinomio* $P(t) = b_n t^n + \cdots b_1 t + b_0$ de grado n;
- *Una exponencial* be^{at};
- *Una expresión trigonométrica* $b_1 \cos at + b_2 \operatorname{sen} at$;
- *Sumas y productos de los anteriores* (e.g. $(t^2 - t + 1)e^{-t} + 2 \operatorname{sen} t$).

Entonces, una solución particular de la ecuación completa es de la forma siguiente en cada caso

- $x_p(t) = t^s(B_n t^n + \cdots B_1 t + B_0)$, donde $s = 2$ si 0 es raíz doble de la ecuación característica, $s = 1$ si es raíz simple y $s = 0$ si no es raíz;
- $x_p(t) = t^s B e^{at}$, donde $s = 2$ si a es raíz doble de la ecuación característica, $s = 1$ si es raíz simple y $s = 0$ si no es raíz;
- $x_p(t) = t^s(B_1 \cos at + B_2 \operatorname{sen} at)$, donde $s = 1$ si ai es raíz de la ecuación característica, y $s = 0$ si no es raíz (ai no puede ser raíz doble);
- Sumas y productos de los anteriores (e.g. $t^s(B_2 t^2 + B_1 t + B_0)e^{-t} + t^{s'}(D_1 \operatorname{sen} t + D_2 \operatorname{sen} t))$, donde s y s' se determinan con las reglas anteriores.

Por ejemplo, la ecuación $\ddot{x} - 4x = e^{2t}(t + 1)$ tiene raíces características 2 y -2, luego la solución particular es de la forma $x_p(t) = te^{2t}(B_1 t + B_2)$. La ecuación con mismo término independiente $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = e^{2t}(t + 1)$ tiene a 2 como raíz doble, por lo que la solución particular es de la forma $x_p(t) = t^2 e^{2t}(B_1 t + B_2)$.

El método para encontrar x_p consiste en sustituir la forma propuesta x_p (que depende de la estructura de $b(t)$) en la ecuación, y entonces igualar los coeficientes un sistema lineal para las constantes indeterminadas $B_0, \ldots, B_n$.

Ejemplo 4.8. Encontrar las soluciones particulares de las siguientes ecuaciones.

(1) $\ddot{x} - x = 2e^{t/2} + e^{-t/2}$. Adivinamos la forma

$$x_p(t) = B_1 e^{t/2} + B_2 e^{-t/2}$$

y la substituimos en la ecuación (para ello necesitamos previamente haber obtenido $\dot{x}_p$ y $\ddot{x}_p$) para tener

$$\frac{B_1}{4}e^{t/2} + \frac{B_2}{4}e^{-t/2} - B_1 e^{t/2} - B_2 e^{-t/2} = 2e^{t/2} + e^{-t/2}.$$

Entonces, $B_1 = -8/3$ and $B_2 = -4/3$.

(2) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = t^2 - t$. Adivinamos la forma

$$x_p(t) = B_2 t^2 + B_1 t + B_0.$$

Tenemos que $\dot{x}_p = 2B_2 t + B_1$ y $\ddot{x}_p = 2B_2$ y substituyendo en la ecuación llegamos a

$$2B_2 - 8B_2 t - 4B_1 + 4B_2 t^2 + 4B_1 t + 4B_0 = t^2 - t.$$

Por tanto,

$$\left.\begin{array}{ll} 4B_2 & = 1 \\ -8B_2 + 4B_1 & = -1 \\ 2B_2 - 4B_1 + 4B_0 & = 0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo, tenemos $B_0 = 1/8$, $B_1 = 1/4$ y $B_2 = 1/4$.

(3) $\ddot{x} + x = te^{-t} - 2$. La ecuación caracerística tiene raíces complejas. Dado que el término independiente no contiene senos ni cosenos, proponemos como solución particular

$$x_p(t) = (B_1 t + B_0)e^{-t} + C.$$

Tenemos

$$\dot{x}_p = B_1 e^{-t} - (B_1 t + B_0)e^{-t}$$

y

$$\ddot{x}_p = -B_1 e^{-t} + (B_1 t + B_0)e^{-t} - B_1 e^{-t}$$

y al substituir en la EDO

$$-2B_1 e^{-t} + B_0 e^{-t} + B_1 te^{-t} + B_1 te^{-t} + B_0 e^{-t} + C = te^{-t} - 2.$$

Luego,

$$\left.\begin{array}{rl} C & = -2 \\ 2B_1 & = 1 \\ -2B_1 + 2B_0 & = 0 \end{array}\right\}$$

implica $C = -2$, $B_1 = 1/2$ y $B_0 = 1/2$.

(4) $\ddot{x} + \dot{x} = te^{-t} - 2$. La ecuación característica $r^2 + r = 0$ tiene soluciones $r = 0$ y $r = -1$. La EDO homogénea tiene por solución general $C_1 + C_2 e^{-t}$. Adivinamos la forma

$$x_p(t) = t^s (B_1 t + B_0)e^{-t} + t^{s'} C,$$

con $s = 1$ y $s' = 1$, dado que 0 es raíz de multiplicidad 1 de la ecuación característica, y en el término independiente $te^{-t} - 2$, tanto t como -2 son polinomios.

Tenemos que

$$\dot{x}_p = (2B_1 t + B_0)e^{-t} - (B_1 t^2 + B_0 t)e^{-t} + C$$

y

$$\ddot{x}_p = 2B_1 e^{-t} - (2B_1 t + B_0)e^{-t} - (2B_1 t + B_0)e^{-t} + (B_1 t^2 + B_0 t)e^{-t}.$$

Entonces, agrupando términos

$$\ddot{x}_p + \dot{x}_p = (-2B_1 t + (2B_1 - B_0))e^{-t} + C$$

y al igualar a $te^{-t}-2$, encontramos los valores

$$\left.\begin{array}{ll} C & =-2 \\ B_1 & =-\frac{1}{2} \\ B_0 & =1 \end{array}\right\}$$

Definición 4.9. El problema de Cauchy de la ecuación (4.1) consiste en encontrar una solución que satisface las condiciones iniciales conditions

$$x(t_0)=x_0, \quad \dot{x}(t_0)=x_1.$$

Ejemplo 4.10. Resolver el problema de Cauchy

$$\ddot{x}-4\dot{x}+4x=t^2-t, \qquad x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=0.$$

Sabemos de un ejemplo anterior que la solución general de la completa es

$$x(t)=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}+\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}.$$

Necesitamos calcular la derivada para aplicar la condición impuesta sobre $\dot{x}(0)$.

$$\dot{x}(t)=2e^{2t}(C_1+C_2t)+C_2e^{2t}+\frac{t}{2}+\frac{1}{4}.$$

Entonces

$$\left.\begin{array}{ll} x(0)=1 & =C_1+\frac{1}{8} \\ \dot{x}(0)=0 & =2C_1+C_2+\frac{1}{4} \end{array}\right\}.$$

Este sistema lineal se resuelve para encontrar $C_1=7/8$ y $C_2=-2$. Por tanto, la solución del problema de Cauchy es

$$x(t)=\left(\frac{7}{8}+-2t\right)e^{2t}+\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}.$$

5. Sistemas de EDOs de primer orden

5.1. **Sistema lineales.** Consideramos el sistema de EDOs de primer orden n–dimensional y coeficientes constantes

$$\dot{X}(t)=AX(t)+B,$$

donde

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B(t)=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Las incógnitas son las funciones $x_1(t),\dots,x_n(t)$. Estamos interesados en estudiar las propiedades asintťicas de los puntos de equilibrio.

Definición 5.1. Un vector constante X^0 es un punto de equilibrio si y sólo si $AX^0+B=0$.

Para asegurar la existencia de un único punto de equilibrio, impondremos la siguiente condición:

$$|A| \neq 0.$$

Entonces el equilibrio está dado por

$$X^0 = -A^{-1}B.$$

Observación 5.2. Puede probarse que la solución $X(t)$ de $\dot{X}(t) = AX(t) + B$ es estable (asintóticamente estable) si y sólo la solución nula $X_h(t) \equiv 0$ del sistema homogéneo $\dot{X}(t) = AX(t)$ es estable (asintóticamente estable). Es decir, todas las soluciones del sistema lineal $\dot{X}(t) = AX(t) + B$ tienen el mismo carácter de estabilidad o inestabilidad. Por tanto, para el estudio de la estabilidad nos centraremos únicamente en el sistema homogéneo.

Reduciremos nuestro estudio al caso $n = 2$, es decir, a sistemas de dos ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2. \end{cases} \tag{5.1}$$

donde

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sean λ_1, λ_2 las raíces (reales or complejas) del polinomio característico de A, es decir, de la ecuación

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_2| = 0.$$

Tenemos los siguientes casos (siempre nos referimos a la solución del sistema homogéneo, por lo dicho en la nota anterior):

(1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son reales (A es diagonalizable). Sean $\mathbf{v}_1 \in S(\lambda_1)$ y $\mathbf{v}_2 \in S(\lambda_2)$ vectores propios asociados. La solución general es

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2.$$

(2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

(a) A es diagonalizable. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in S(\lambda)$ dos vectores propios independientes. La solución general es

$$X(t) = e^{\lambda t}(C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2).$$

(b) A no es diagonalizable. Sea $\mathbf{v} \in S(\lambda)$ un vector propio asociado a λ, y sea $\mathbf{w}$ otro vector que satisface

$$(A - \lambda I_2)\mathbf{w} = \mathbf{v}.$$

Entonces, la solución general es

$$X(t) = e^{\lambda t}(C_1\mathbf{v} + C_2\mathbf{w} + C_2 t\mathbf{v}).$$

(3) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, con $\beta \neq 0$. Entonces existen vectores no nulos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tales que la solución general es[2]

$$X(t) = e^{\alpha t} C_1(\mathbf{w}\cos\beta t - \mathbf{v}\operatorname{sen}\beta t) + e^{\alpha t} C_2(\mathbf{w}\operatorname{sen}\beta t + \mathbf{v}\cos\beta t).$$

Usando la forma de las soluciones es fácil estudiar su comportamiento asintótico.

(1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son reales.
   (a) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. El equilibrio es globalmente asintóticamente estable. Se denomina *nodo estable*.
   (b) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. El equilibrio es inestable, pero las soluciones que tienen $C_2 = 0$ convergen hacia X^0. Diremos que X^0 es un *punto de silla*. Las condiciones iniciales $X_0 = (x_0, y_0)$ desde las cuales la solución converge forman la *variedad estable*, y está dado por el autoespacio $S(\lambda_1)$.
   (c) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. El equilibrio es inestable. Se denomina *nodo inestable*.

(2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. El equilibiro es g.a.e. si y sólo si $\lambda < 0$. Se denomina *nodo estable impropio*. En el caso $\lambda > 0$ el sistema es inestable.

(3) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, con $\beta \neq 0$.
   (a) La parte real $\alpha = 0$. La solución oscila alrededor de X^0 con amplitud constante. Se dice que X^0 es un *centro*. Es estable, pero no g.a.e.
   (b) La parte real $\alpha < 0$. La solución oscila con amplitud decreciente hacia X^0, por lo que el punto de equilibrio es g.a.e., y se llama un *nodo espiral estable*.
   (c) La parte real $\alpha > 0$. La solución oscila con amplitud creciente divergiendo de X^0. El sistema es inestable y el punto de equilibrio se llama *nodo espiral inestable*.

Las gráficas siguientes ilustran algunos de los casos más importantes. Las gráficas representan el espacio de fases de algunos sistemas lineales concretos, mostrando diferentes comportamientos respecto a la estabilidad. Las líneas continuas son soluciones del sistema, $(x(t), y(t))$, pero representadas en el plano xy, una vez que se ha eliminado la variable tiempo, t. Ls flechas en gris indican el campo de direcciones determinado por el sistema y apuntan en la dirección en que se desplazan las soluciones en el tiempo. Los vectores son tangentes a las curvas solución en el plano xy.

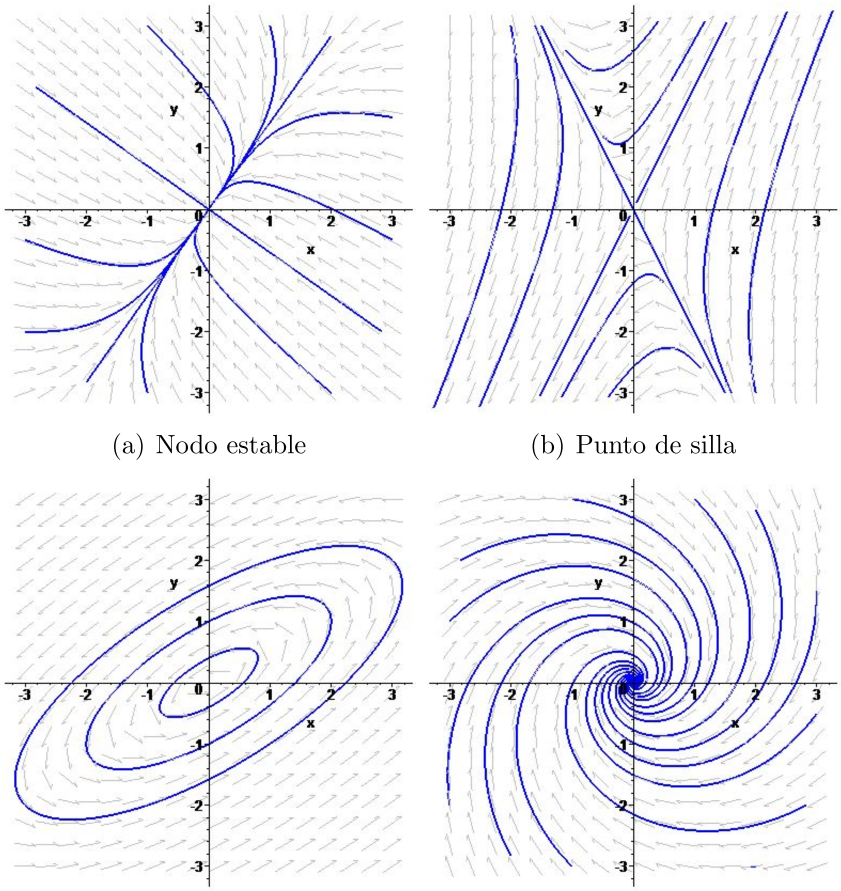
En el teorema siguiente, observar que por hipótesis $|A| \neq 0$, 0 no es valor propio de A y que si A admite autovalores complejos (sólo puede admitir dos, pues el orden de la matriz es dos), estos tienen la misma parte real, pues son números conjugados.

Teorema 5.3. *El punto de equilibrio del sistema* (5.1) *es*

(1) asintóticamente estable, si los valores propios de A tienen parte real negativa;
(2) Estable, pero no asintóticamente estable, si los valores propios de A tienen parte real nula ;

[2] Los vectores pueden obtenerse como soluciones del sistema lineal complejo $(A - (\alpha + i\beta)I_2)(\mathbf{v} + i\mathbf{w}) = 0$. No estamos interesados en cómo podemos encontrar estos vectores, pero puede probarse que satisfacen

$$\left((2A - \alpha I_2)^2 + \beta^2 I_2\right)\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{w} = \frac{1}{\beta}(2A - \alpha I_2)\mathbf{v}.$$



(a) Nodo estable (b) Punto de silla

(c) Centro (d) Espiral estable

Figure 5. Espacio de fases

(3) Inestable, si alguno de los valores propios de A tiene parte real positiva.

Ejemplo 5.4. Determinar el comportamiento de las soluciones en torno al punto $(0,0)$ del sistema

$$\dot{x} = 3x - 2y,$$
$$\dot{y} = 2x - 2y.$$

solución: La matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

tiene ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2,$$

con valores propios -1 y 2. Por tanto el origen es un punto de silla (inestable).

Los valores propios asociados se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = -1$

$$4v_1 - 2v_2 = 0, \quad 2v_1 - v_2 = 0.$$

y un vector propio asociado a $\lambda_1 = -1$ es $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$. Cuando $\lambda = 2$

$$v_1 - 2v_2 = 0, \qquad 2v_1 - 4v_2 = 0,$$

da $\mathbf{v}_2 = (2, 1)$. La variedad estable es $S(-1)$, es decir, las condiciones inicales ligadas por la ecuación $2x_0 - y_0 = 0$.

Ejemplo 5.5. Determinar el comportamiento de las soluciones en torno al punto $(0, 0)$ del sistema

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 3 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X(t).$$

SOLUCIÓN: La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 4\lambda + (3 - b) = 0,$$

con soluciones

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{1+b}, \qquad \lambda_2 = 2 - \sqrt{1+b}.$$

Notar que $b < -1$ implica que λ_1, λ_2 son complejas, con parte real $\alpha = 2 > 0$, y que $b \geq -1$ da $\lambda_1 > 0$ para todo b, luego el origen es inestable para todo b. Sin embargo, $\lambda_2 < 0$ para $b > 3$, luego para estos valores de b el origen es inestable, concretamente un punto de silla.

Ejemplo 5.6. Determinar el comportamiento de las soluciones en torno al punto $(0, 0)$ del sistema

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} X(t).$$

SOLUCIÓN: La ecuación característica es

$$\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 + 1 = 0,$$

con soluciones

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 - 4}) = -a \pm i.$$

La parte real es $\alpha = -a$, por lo que el origen es una espiral estable para $a > 0$, un centro si $a = 0$ y una espiral inestable si $a > 0$.

5.2. **Sistemas no lineales.** Consideramos el sistema de dos dimensiones y no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x,y), \\ \dot{y} &= Q(x,y). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Quremos estudiar el comportamiento asintótico de sus puntos de equilibrio. Para ello, utilizaremos la técnica de linealización, que consiste en aproximar el sistema original alrededor de cada uno de los puntos de equilibrio por otro lineal asociado. Entonces aplicaremos el Teorema 5.3, siempre que sea posible.

La *linealización* del sistema no lineal alrededor del punto de equilibrio (x^0, y^0) es el sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\partial P}{\partial x}(x^0,y^0)\,u + \frac{\partial P}{\partial y}(x^0,y^0)\,v, \\ \dot{v} &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x^0,y^0)\,u + \frac{\partial Q}{\partial y}(x^0,y^0)\,v. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Llamamos a la matriz

$$A(x^0,y^0) = \begin{pmatrix} P_x(x^0,y^0) & P_y(x^0,y^0) \\ Q_x(x^0,y^0) & Q_y(x^0,y^0) \end{pmatrix}$$

la *matriz Jacobiana* del sistema (5.2) en el punto de equilibrio (x_0, y_0).

Ejemplo 5.7. El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x, \\ \dot{y} &= -y + \frac{5x^2}{4+x^2} \end{aligned}$$

tiene tres puntos de equilibrio, es decir, existen tres solucions del sistema algebraico

$$\begin{aligned} 0 &= y - x, \\ 0 &= -y + \frac{5x^2}{4+x^2}, \end{aligned}$$

$(0,0)$, $(1,1)$ and $(4,4)$. La linealización del sistema alrededor de los puntos de equilibrio puede computarse como sigue. Las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} P_x(x,y) &= -1, \qquad & P_y(x,y) &= 1, \\ Q_x(x,y) &= \frac{40x}{(x^2+4)^2}, \qquad & Q_y(x,y) &= -1. \end{aligned}$$

Luego, las matrices Jacobianas son

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{8}{5} & -1 \end{pmatrix}, \quad A(4,4) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2}{5} & -1 \end{pmatrix},$$

y los sistemas lienales asociados

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + v \\ \dot{v} = u - v \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dot{u} = -u + v \\ \dot{v} = \dfrac{8}{5}u - v \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dot{u} = -u + v \\ \dot{v} = \dfrac{2}{5}u - v \end{cases},$$

respectivamente. Por tanto, la linealización depende (obviamente) del punto de equilibrio.

Teorema 5.8. *Sea* (x^0, y^0) *un equilibrio aislado del sistema* (5.2) *y sea* $A = A(x^0, y^0)$ *la matriz Jacobiana de la linealización* (5.3)*, con* $|A| \neq 0$*. Entonces* (x^0, y^0) *es un punto de equilibrio del mismo tipo que* $(0,0)$ *para el sistema linealizado, en los siguientes casos:*

(1) Los valores propios de A *son reales, iguales o distintos, y tienen el mismo signo (nodo).*
(2) Los valores propios de A *son reales y tienen signos opuestos (punto de silla).*
(3) Los valores propios de A *son complejos, pero no son imaginarios puros, es decir, no tienen parte real nula (espiral).*

Por tanto, el caso excepcional sucede cuando la linealización tiene un centro. La estructura del sistema no lineal alrededor de los puntos de equilibrio (por tanto, es una propiedad local, no global), es la misma que la del sistema lineal asociado en todos los casos, excepto cuando en el sistema linealizado aparece un centro, caso en que no podemos concluir nada para el sistema no lineal y habría que estudiar su comportamiento por otros métodos que no veremos aquí.

Ejemplo 5.9. El sistema no lineal

$$\dot{x} = -y - x^3, \quad \dot{y} = x,$$

tiene matriz Jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en el origen $(0,0)$, que tiene valores propios imaginarios puros $\pm i$, luego $(0,0)$ es un centro para el linealizado. Este es el caso excepcional en el teorema, y no podemos afirmar que el sistema no lineal tenga también un centro. De hecho, es posible probar por otros medios que el punto de equilibrio del sistema no lineal ($(0,0)$ también) es una espiral estable.

Teorema 5.10. *Si* $(0,0)$ *es g.a.e. para* (5.3)*, entonces el punto de equilibrio* (x^0, y^0) *del sistema no lineal* (5.2) *es localmente asintóticamente estable.*

Ejemplo 5.11. Consideramos el sistema no lineal

$$\dot{x} = -2x + 3y + xy, \quad \dot{y} = -x + y - 2xy^3,$$

que tiene un punto de equilibrio en $(0,0)$. La matriz Jacobiana en el origen es

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y los valores propios son $-\frac{1}{2} \pm (\frac{\sqrt{3}}{2})i$. Por tanto, la linealización tiene un espiral estable en $(0,0)$, y por tanto el sistema no lineal también localmente asintóticamente estable en $(0,0)$.

Ejemplo 5.12. El sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\rho_1 - \kappa_1 x) \\ \dot{y} = y(\rho_2 - \kappa_2 y) \end{cases}$$

modela dos poblaciones gobernadas por la ecuación logística, que no interaccionan entre ellas. Aquí, ρ_i es la tasa de crecimiento intrínseco de la Población i, y ρ_i/κ_i es el nivel de saturación de la Población i. Suponemos ahora que las especies compiten por el alimento, que se encuentra disponible en cantidades limitadas. Para capturar este efecto competitivo, modificamos el factor de crecimiento, y suponemos que depende del nivel de Población de la otra especie $-\alpha_1 y$ y $-\alpha_2 x$ respectivamente, donde α_i mide el efecto de una Población sobre la otra. El sistema se modifica por tanto a

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\rho_1 - \kappa_1 x - \alpha_1 y) \\ \dot{y} = y(\rho_2 - \kappa_2 y - \alpha_2 x) \end{cases} .$$

Suponemos que $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.75$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$ and $\alpha_2 = 0.5$. Existen entonces cuatro puntos de equilibrio: $(0, 0)$ (ambas especies se extinguen), $(0, 0.75)$ (se extingue la Población x), $(1, 0)$ (se extingue la Población y), y $(0.5, 0.5)$ (ambas especies sobreviven).

Vamos a estudiar los puntos de equilibrio. La matriz Jacobiana del sistema es

$$A = A(x, y) = \begin{pmatrix} -2x - y & -x \\ -0.5y & 0.75 - 2y \end{pmatrix}.$$

Recordar que $\sigma(A)$ es el conjunto de valores propios de A.

- $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$: $\sigma(A) = \{1, 0.75\}$, el origen es un nodo inestable para el linealizado y para el sistema no lineal.
- $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$: $\sigma(A) = \{-1, 0.25\}$, tenemos ahora un punto de silla.
- $(\mathbf{0}, \mathbf{0.75})$: $\sigma(A) = \{0.25, -0.75\}$, de nuevo un punto de silla.
- $(\mathbf{0.5}, \mathbf{0.5})$: $\sigma(A) = \{-0.5 \pm \sqrt{2}/4\}$, los valores propios son negativos, luego tenemos un nodo estable. Todas las trayectorias próximas a $(0.5, 0.5)$ convergen asintóticamente al punto de equilbrio tanto del sistema linealizado como del original.

Es posible probar que las poblaciones convergen al equilibrio de coexistencia. Esto se ilustra en la figura.

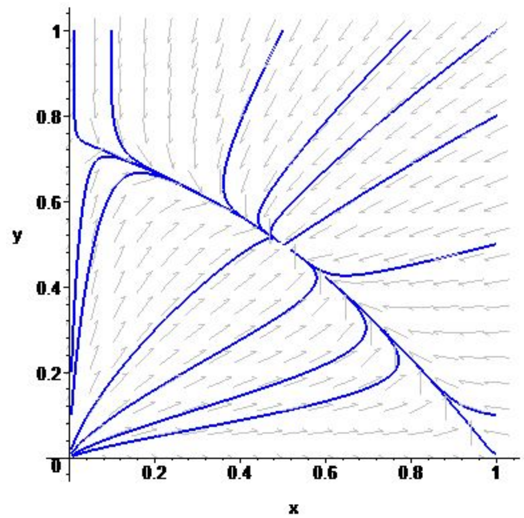


FIGURE 6. Espacio de fases, plano xy