TEMAS DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA – 2020/2021

Hoja 1. Diagonalización

1-1. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *calclense sus autovalores, sus autovectores y una matriz de paso que diagonalice* A.

Solución: El polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 10$$

cuyas raíces son

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = -2, 5$$

Como hay dos valores propios y son distintos, la matriz es diagonalizable. Ahora calculamos los espacios de vectores propios. El conjunto $S(5)$ está formado por las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

que es equivalente al sistema

$$3x - 4y = 0.$$

Por tanto, $S(5) < (4,3) >$.

El espacio de vectores propios $S(-2)$ está determinado por las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

que es equivalente al sistema

$$x + y = 0.$$

Y vemos que $S(-2) =< (1,-1)$.

Concluimos que $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1-2. *Dadas las matrices siguientes:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *Calcula sus autovalores, autovectores y los subespacios vectoriales asociados.*
(b) *Diagonalzalas, en los casos en que sea posible.*

Solución: Vamos a estudiar la diagonalización de las matrices anteriores. En primer lugar, calculamos los valores propios de A. El polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

con lo que los valores propios son $\lambda_1 = -2$ con multiplicidad $n_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad $n_2 = 2$. Vamos a calcular el espacio $S(1)$ de vectores propios asociados al valor propio 1. Para ello resolvemos el sistema

$$(A-I)\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

o sea,

$$\begin{aligned} 3x+6y &= 0 \\ -3x-6y &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es (utilizando y como parámetro) $S(1) = \{-2y, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} =< (-2,1,0), (0,0,1) >$, por lo que $\dim S(1) = 2$.

Por otra parte, $S(-2)$ es el conjunto formado por las soluciones del sistema

$$(A+2I)\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

o sea,

$$\begin{aligned} 6x+6y &= 0 \\ -3x-3y &= 0 \\ -3x-6y+z &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $S(-2) = \{-z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} =< (-1,1,1) >$.

Vemos que la matriz A es diagonalizable y $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos ahora la diagonalización de la matriz B. El polinomio característico es

$$|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda-5)$$

con lo que los valores propios son $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad $n_1 = 2$ y $\lambda_2 = 5$ con multiplicidad $n_2 = 1$. Vamos a calcular el espacio $S(0)$ de vectores propios asociados al valor propio 0. Para ello resolvemos el sistema

$$(b-0I)\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} x-2z &= 0 \\ -2x+4z &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es (utilizando y y z como parámetros) $x = 2z$. Por tanto, $S(0) = \{2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} =< (2,0,1), (0,1,0) >$, por lo que $\dim S(0) = 2$.

Ahora calculamos $S(5)$ El sistema que determina a este subespacio es

$$(B-5I)\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} -4x-2z &= 0 \\ -5y &= 0 \\ -2x-z &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es (utilizando x como parámetro) $y = 0$, $z = -2x$. Por tanto, $S(5) = \{x, 0, -2x) : x \in \mathbb{R}\} =< (1,0,-2) >$.

Concluimos que la matriz B es diagonalizable y $B = QDQ^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Estudiamos finalmente la diagonalización de la matriz C. El polinomio característico es

$$|C-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 & -2 \\ -2 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^3$$

con lo que sólo hay un valor propio $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad $n_1 = 3$. Vamos a calcular el espacio $S(1)$ de vectores propios asociados al valor propio 1. Para ello resolvemos el sistema

$$(C-I)\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} 3x+5y-2z &= 0 \\ -2x-3y+z &= 0 \\ -x-y &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $y=-x$, $x=-z$. Por tanto, (utilizando z como parámetro) $S(0) = \{-z,z,z) : z \in \mathbb{R}\} =< (-1,1,1) >$, por lo que $\dim S(1) = 1 < n_1 = 3$. La matriz C no es diagonalizable.

1-3. *Para qué valores del parámetro a es diagonalizable la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$*?*

Solución: En primer lugar vamos a calcular los valores propios, dependiendo del parámetro a. El polinomio carcterístico es

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Vemos que hay dos valores propios: $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad 1. La condición para que una matriz sea diagonalizable es que, para cada valor propio, la multiplicidad como valor propio coincida con la dimensión del subespacio de vectores propios asociados. Como la multiplicidad de 2 como valor propio es 1, esta multiplicidad coincide con la dimensiń $\dim S(2)$.

Entonces, A es diagonalizable si y sólo si $\dim S(1) = 2$. Vamos a calcular $S(1)$. Este espacio es el conjunto de soluciones del sistema

$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} ax &= 0 \\ x+y+z &= 0 \end{aligned}$$

Claramente, si $a \neq 0$, entonces las soluciones son $x=0$, $y=-z$, es decir $S(1) = \{(0,-z,z) : z \in \mathbb{R}\}$ y vemos que $\dim S(1) = 1$, por lo que en este caso A no es diagonalizable.

En cambio, si $a = 0$, el sistema es

$$x+y+z = 0$$

con lo que $S(1) = \{(x,y,-x-y) : x,y \in \mathbb{R}\}$, por lo que $\dim S(1) = 2$ y A es diagonalizable.

1-4. *Demostrar que:*

(a) *Si A es una matriz diagonalizable, entonces A^n tambin lo es para cada nmero natural n.*

Solución: Supongamos que la matriz A es diagonalizable. Entonces, se puede escribir de la forma $A = PDP^{-1}$ con P una matriz invertible y D una matriz diagonal. Entonces

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ A^3 &= AA^2 = (PDP^{-1})(PD^2P^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^2P^{-1} = PD^3P^{-1} \\ &\vdots \\ A^n &= AA^{n-1} = (PDP^{-1})(PD^{n-1}P^{-1}) = PD^nP^{-1} \end{aligned}$$

y vemos que A^n también es diagonalizable.

(b) *Sea A una matriz diagonalizable. A es regular $\Leftrightarrow$ ninguno de sus autovalores es nulo.*

Solución: Recordemos que si A es una matriz diagonalizable y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son sus valores propios, entonces $|A| = \lambda_1 \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Como, la matriz A es regular si y sólo si $|A| \neq 0$, vemos que A es regular si y sólo si $\lambda_1 \lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$, es decir, si y sólo si ninguno de sus valores propios se anula.

(c) *Si A tiene inversa, entonces A y su inversa A^{-1} tienen los mismos autovectores y los autovalores de A son los inversos de los de A^{-1}.*

Solución: Supongamos que la matriz A tiene una inversa A^{-1}. Y sea v un vectorpropio de A asociado al valor λ. Entonces, $Av = \lambda v$ y multplicando por A^{-1}, obtenemos que $v = A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v) = \lambda A^{-1} v$. Despejando $A^{-1}v$, obtenemos que $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$, es decir v es un vector propio de A^{-1} asociado al valor propio λ^{-1}.
Recíprocamente, se compruebda de forma análoga que si β es un valor propio de A^{-1} con vector propio v, entonces v es un vector propio de A asociado al valor propio β^{-1}.

(d) *A y A^t tienen los mismos autovalores.*

Solución: Los polinomios característicos son los mismos, ya que $\left|A^t - \lambda I\right| = \left|(A - \lambda I)^t\right| = |A - \lambda I|$. Entonces, las raíces de estos polinomios y, por tanto los valores propios, son los mismos.

1-5. *Estdiese para qu valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$ es diagonalizable.*

Solución:
Vamos a calcular los valores propios de A en función de los parámetros a y b. El polinomio carcterístico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & a \\ 3 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix} | = (5-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & a \\ 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1+\lambda)(b-\lambda)$$

Vemos que los valores propios son: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = b$. Recordemos que la condición para que una matriz sea diagonalizable es que, para cada valor propio, la multiplicidad como valor propio coincida con la dimensión del subespacio de vectores propios asociados. En particular, si el número de valores propios distintos es igual a la dimensión del espacio, entonces la matriz es diagonalizable.

Entonces, si $b \neq 5$ y $b \neq -1$, hay tres valores propios distintos y la matriz es diagonalizable. Estudiemos que ocurre si $b = 5$. En este caso, $\lambda_1 = 5$ es un valor propio de multiplicidad $n_1 = 2$ y el otro valor tiene multiplicidad 1. La matriz es diagonalizable o no dependiendo de la dimensión de $S(5)$. Vamos a calcular este subespacio. Coincide con el conjunto de soluciones del sistema

$$(A - 5I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} -6y + az &= 0 \\ 3x &= 0 \end{aligned}$$

Claramente, $\dim S(5) = 1 < n_1 = 2$, por lo que en este caso A no es diagonalizable.

Por otra parte, si $b = -1$, entonces los valores propios son $\lambda_1 = 5$, con multiplicidad $n_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad $n_2 = 2$. La matriz es diagonalizable o no dependiendo de la dimensión de $S(-1)$. Este subespacio es el conjunto de soluciones del sistema

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} 6x &= 0 \\ az &= 0 \\ 3x &= 0 \end{aligned}$$

y vemos que

$$\dim S(-1) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \neq 0; \\ 2, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Otra forma más sencilla es observar que $\dim S(-1) = 3 - \mathrm{rg}(A+I)$ y

$$\mathrm{rg}(A+I) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2, & a \neq 0; \\ 1, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

En resumen, tenemos que si

$$\begin{cases} b = 5, & \text{entonces } A \text{ no es diagonalizable;} \\ b = -1, & \text{entonces } A \text{ es diagonalizable si y sólo si } a = 0; \\ b \neq 5 \text{ y } b \neq -1, & \text{entonces } A \text{ es diagonalizable.} \end{cases}$$

1-6. *Decir cules de las siguientes matrices son diagonalizables.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Consideremos, en primer lugar,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

por lo que los valores propios son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad $n_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad $n_2 = 2$.

Para ver si es diagonalizable calculamos el espacio $S(2)$ de vectores propios asociados al valor propio 2. Para esto estudiamos el sistema

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

la solución es $y = z$, $x = 2y = 2z$. Utilizando a z como parámetro, vemos que $S(2) = \{(2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} =< (2,1,1) >$ por lo que $\dim S(2) = 1 < n_2 = 2$ y A no es diagonalizable.

Estudiamos ahora si la matriz

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. El polinomio característico es

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 1$$

por lo que los valores propios son

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & \frac{-2+\sqrt{4+4}}{2} = -1+\sqrt{2} \\ \lambda_2 & = & \frac{-2-\sqrt{4+4}}{2} = -1-\sqrt{2} \end{array}$$

todos con multiplicidad 1. Por tanto la matriz es diagonalizable.

Calculamos el espacio $S(-1+\sqrt{2})$ de vectores propios asociados al valor propio $-1+\sqrt{2}$. Para esto estudiamos el sistema

$$\left(A - (-1+\sqrt{2})I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ = 0 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{array}{ll} -(1+\sqrt{2})x + y & = 0 \\ x + (1-\sqrt{2})y & = 0 \end{array}$$

cuya solución es $x = y/(1+\sqrt{2})$. Por tanto, $S(-1+\sqrt{2}) = \{(y/(1+\sqrt{2}), y) : y \in \mathbb{R}\} =< (1/(1+\sqrt{2}), 1) >=< (1, 1+\sqrt{2}) >$. Análogamente, se obtiene que $S(-1+\sqrt{2}) = \{(y/(1-\sqrt{2}), y) : y \in \mathbb{R}\} =< (1/(1-\sqrt{2}), 1) >=< (1, 1-\sqrt{2}) >$.

Y la forma diagonal de B es $B = PDP^{-1}$ con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente, el polinomio característico de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es

$$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

por lo que el único valor propio es $\lambda = 1$ con multiplicidad 2. Por otra parte, el espacio de vectores propios asociado es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

es decir $y = 0$, por lo que $S(1) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} =< (1, 0) >$ y, como $\dim S(1) = 1$, la matriz C no es diagonalizable.

1-7. *Para qu valores de α es posible diagonalizar la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha+1 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 1 \end{pmatrix}$*?*

Solución: El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha+1 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 1 \end{pmatrix}$$

es $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. Los valores propio son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad $n_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad $n_2 = 1$. La matriz A es diagonalizable si y sólo si $\dim S(1) = 2$. Veamos cuando ocurre esto. El subespacio de vectores propios $S(1)$ está determinado por la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha+1)x + y & = 0 \\ (\alpha+1)y & = 0 \end{array}\right\}$$

que, si $\alpha \neq -1$, es $x = y = 0$. Vemos que $S(1) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ y $\dim S(1) = 1$, por lo que A no es diagonalizable en este caso.

Cuando $\alpha = -1$, el sistema anterior se reduce a $y = 0$, por lo que $S(1) = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ y $\dim S(1) = 2$, y la matriz A es diagonalizable en este caso.

1-8. *Dadas las matrices,*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

determinar si son diagonalizables y, en caso afirmativo, calcular las potencias n-simas de cada una de ellas.

Solución: Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad $n_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad $n_2 = 1$. Los espacios de vectores propios son $S(1) =< (0, 0, 1), (-1, 1, 0) >$ y $S(2) =< (-2, 1, 0) >$. La matriz A es diagonalizable $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2^{1+n} & -2 + 2^{1+n} & 0 \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad $n_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad $n_2 = 2$. Los espacios de vectores propios son $S(0) =< (0, 1, 1) >$ y $S(2) =< (1, 0, 1), (1, 1, 0) >$. La matriz B es diagonalizable: $B = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$B^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ 2^{n-1} & -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Los valores propios de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad $n_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad $n_2 = 1$. Los espacios de vectores propios son $S(1) =< (1,0,0),(0,1,0) >$ y $S(2) =< (0,1,1) >$. La matriz C es diagonalizable: $C = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

1-9. *Sabiendo que los polinomios siguientes son los polinomios caractersticos de algunas matrices, determinar cules de ellos corresponden a matrices que son diagonalizables. En algunos casos, la respuesta puede depender del valor del parmetro α.*
$p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ $\quad$ $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$
$p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha$ $\quad$ $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + 1$
$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ $\quad$ $p(\lambda) = (\lambda - 1)^3$
$p(\lambda) = \lambda^3 - 1$

Solución:
1) $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$. La matriz no es diagonalizable porque algunas raíces (todas) no son reales.
2) $p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha$. Si $\alpha > 0$ no es diagonalizable porque algunas raíces (todas) no son reales. Si $\alpha < 0$ tiene dos raíces reales distintas y por tanto es diagonalizable. Si $\alpha = 0$ el único valor propio es 0 con multiplicidad 2. Por tanto, o bien es la matriz 0 o no es diagonalizable.
3) $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$. Vemos que -1 es una raíz doble. Por tanto, o bien es la matriz $-I$ o no es diagonalizable.
4) $p(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$ tiene raíces no reales. No es diagonalizable.
5) $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ tiene dos raíces reales distintas. Es diagonalizable.
6) $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + 1$. Las raíces son $\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$. Por tanto

- Si $|\alpha| > 1$, es diagonalizable.
- Si $|\alpha| < 1$, no es diagonalizable.
- Si $|\alpha| = 1$, estamos en el caso 3).

1-10. *Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables. Calcular las potencias n-simas cuando sean diagonalizables.*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:
1) La matriz A es de orden 2 y tiene como único valor propio α de multiplicidad 2. Por tanto, no puede ser diagonalizable.
2) El polinomio caracterstico de B es $(\lambda - \alpha)^2 - 1$. Las raíces son $\alpha \pm 1$, por lo que es diagonalizable. Los valores propios son

$$S(\alpha - 1) =< (-1,1) >, \qquad S(\alpha + 1) =< (1,1) >$$

por lo que $B = PDP^{-1}$ con

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 \\ 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$B^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha-1)^n & 0 \\ 0 & (\alpha+1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha-1)^n & 0 \\ 0 & (\alpha+1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\alpha-1)^n+(\alpha+1)^n & -(\alpha-1)^n+(\alpha+1)^n \\ -(\alpha-1)^n+(\alpha+1)^n & (\alpha-1)^n+(\alpha+1)^n \end{pmatrix}$$

3) Los valores propios de

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad $n_1 = 3$. Como

$$S(1) =< (1,0,0) >$$

la matriz no es diagonalizable.

1-11. *Estudiar para qu valores de los parmetros las siguientes matrices son diagonalizables. Obtener los valores y vectores propios de dichas matrices.*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1-12. *La matriz* $\begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$ *admite como vectores propios a los vectores* $(1,1,0)$, $(-1,0,2)$ *y* $(0,1,-1)$. *Halla los valores propios de la matriz.*

1-13. *Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables. Y si lo son, escrbelas en forma diagonal.*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 \\ -6 & -5 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 8 \\ -10 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 \\ -18 & 0 & 3 \\ -21 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

1) Los valores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

son $-2, 4, 4$. Además $S(-2) =< (-1,1,1) >$, $S(4) =< (1,-1,1) >$, por lo que no es diagonalizable.

2) Los valores propios de

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

son $-1, -1, -1$. Como B no está en forma diagonal, no es diagonalizable.

5) Los valores propios de

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

son $-2, -1, 2$. Como son todos distintos, E es diagonalizable. Además, $E = PDP^{-1}$ con

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

12) Los valores propios de

$$L = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 \\ -18 & 0 & 3 \\ -21 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

son $-3, -3, -3$. Como L no está en forma diagonal, no es diagonalizable.