Capítulo 2: Ecuaciones en diferencias (II)

4. Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden

Este tipo de ecuaciones aparecen muy a menudo. Un ejemplo es el siguiente modelo.

Ejemplo 4.1 (Modelo del Multiplicador–Acelerador del Crecimiento)**.** Sea Y_t la renta nacional, C_t el consumo total, y I_t la inversión total de un país en en instante t. Suponemos que para todo $t = 0, 1, 2, \ldots$

(i) $Y_t = C_t + I_t$ (la renta se divide entre consumo e inversión)

(ii) $C_{t+1} = aY_t + b$ (el consumo depende linealmente de la renta del período anterior)

(iii) $I_{t+1} = c(C_{t+1} - C_t)$ (la inversión es proporcional a la variación en el consumo),

donde $a, b, c > 0$.

Determinar una ecuación en diferencias de orden 2 que describa esta economía.

Solución: Eliminamos dos de las incógnitas para obtener una ecuación en diferencias de segundo orden para Y como sigue: de (i), tenemos $Y_{t+2} = C_{t+2} + I_{t+2}$. Reemplazando I_{t+2} de (iii) tenemos $Y_{t+2} = C_{t+2} + c(C_{t+2} - C_{t+1}) = (1 + c)C_{t+2} - cC_{t+1}$. Finalmente, utilizamos (ii) para obtener

$$Y_{t+2} - a(1 + c)Y_{t+1} + acY_t = b, \qquad t = 0, 1, \ldots$$

La forma explícita de la solución depende de los coeficientes a, b, c.

La ecuación general lineal de segundo orden que estudiaremos es

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = b_t,$$

donde a_1 y a_0 son constantes y b_t es una función dada de t. La *ecuación homogénea* asociada es

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = 0,$$

y la *ecuación característica* asociada es

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

Esta ecuación cuadrática tiene soluciones

$$r_1 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0}, \qquad r_2 = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0}.$$

Cuando el signo del discriminante de la ecuación, $a_1^2 - 4a_0$, es negativo, las soluciones son números complejos (conjugados).

Un número complejo se escribe $z = a + ib$, donde a y b son números reales y $i = \sqrt{-1}$ es la *unidad imaginaria*, que verifica $i^2 = -1$. La *parte real* del número complejo z es a, y la *parte imaginaria* de z es b. El conjugado de $z = a + ib$ es $\overline{z} = a - ib$. Los números complejos pueden sumarse y multiplicarse entre sí con las siguientes reglas: $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ y

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

Para nuestros propósitos, necesitamos el *módulo* de un número complejo z, $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y y el ángulo $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\tan\theta = b/a$.

Para calcular el argumento de un número complejo, puede ser útil recordar la siguiente tabla de valores trigonométricos:

θ	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞

Los valores negativos de θ están relacionados con los valores positivos por las propiedades de las funciones seno y coseno: $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ y $\cos(-\theta) = \cos\theta$

Por ejemplo, el módulo de $1 - i$ es $\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ y em ángulo $\theta = -\pi/4$, respectivamente, dado que $\tan\theta = -1/1 = -1$. Para $z = -\sqrt{3} - i3$, tel módulo es $\rho = \sqrt{12}$ y $\tan\theta = \sqrt{3}$, hence $\theta = \pi/3$.

Teorema 4.2. *La solución general de*

$$x_{t+2} + a_1x_{t+1} + a_0x_t = 0 \quad (a_0 \neq 0) \tag{4.1}$$

es:

1. *Si la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas,* $r_{1,2}$,
$$x_t = Ar_1^t + Br_2^t.$$
2. *Si la ecuación característica tiene una única raíz real,* r,
$$x_t = (A + Bt)r^t.$$
3. *Si la ecuación característica tiene raíces complejas,* $r_{1,2} = a \pm ib$
$$x_t = \rho^t(A\cos\theta t + B\operatorname{sen}\theta t),$$
donde $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan\theta = \frac{b}{a}$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

A y B son constantes arbitrarias.

Observación 4.3. Cuando la ecuación característica tiene raíces complejas, la solución de (4.1) es oscilante. Si $\rho < 1$, entonces ρ^t tiende a 0 cuando $t \to \infty$ y las oscilaciones se amortiguan con el tiempo. Si $\rho > 1$, las oscilaciones son explosivas, y en el caso $\rho = 1$, las oscilaciones son uniformes.

Ejemplo 4.4. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $x_{t+2} - 7x_{t+1} + 6x_t = 0$, (b) $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 0$, (c) $x_{t+2} - 2x_{t+1} + 4x_t = 0$.

Solución: (a) La ecuación característica es $r^2 - 7r + 6 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 6$ y $r_2 = 1$, por lo que la solución general es

$$x_t = A6^t + B, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) La ecuación característica es $r^2 - 6r + 9 = 0$, que tiene una raíz doble, $r = 3$. La solución general es

$$x_t = 3^t(A + Bt).$$

(c) La ecuación característica es $r^2 - 2r + 4 = 0$, con soluciones complejas $r_1 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{-12}) = 1 + i\sqrt{3}$, $r_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Por tanto, $\rho = 2$ y $\tan\theta = -\frac{\sqrt{12}}{-2} = \sqrt{3}$, es decir, $\theta = \pi/3$. La solución general es

$$x_t = 2^t \left(A \cos \frac{\pi}{3} t + B \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} t \right).$$

4.1. La ecuación no homogénea. La ecuación no homogénea de segundo orden es de la forma

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = b_t. \tag{4.2}$$

Sea x_t^* una *solución particular*. Puede demostrarse que las soluciones de la ecuación tienen una interesante estructura, debida a la linealidad de la ecuación.

Teorema 4.5. *La solución general de la ecuación no homogénea* (4.2) *es suma de la solución general de la homogénea* (4.1) *y de una solución particular* x_t^* *de la no homogénea.*

Ejemplo 4.6. Hallar la solución general de $x_{t+2} - 4x_t = 3$.

Solución: Notar que $x_t^* = -1$ es una solución particular. Para encontrar la solución general de la ecuación homogénea, hallamos las soluciones de la ecuación característica, $r^2 - 4 = 0$, $r_{1,2} = \pm 2$. Por tanto, la solución general de la no homogénea es

$$x_t = A(-2)^t + B2^t - 1.$$

Ejemplo 4.7. Hallar la solución general de $x_{t+2} - 4x_t = t$.

Solución: En este caso no es evidente cómo encontrar una solución particular. Una forma es utilizar *el método de los coeficientes indeterminados*, que consiste en intentar una expresión de la forma $x_t^* = Ct + D$, donde C y D son constantes adecuadas tales que x_t^* es solución. Sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$C(t+2) + D - 4(Ct + D) = t, \qquad \forall t = 0, 1, 2, \ldots$$

Por tanto, debe ocurrir $C - 4C = 1$ y $2C + D - 4D = 0$, de donde $C = -1/3$ y $D = -2/9$. La solución general es

$$x_t = A(-2)^t + B2^t - t/3 - 2/9.$$

Ejemplo 4.8. Hallar la solución de $x_{t+2} - 4x_t = t$ que verifica $x_0 = 0$ y $x_1 = 1/3$.

SOLUCIÓN: La solución general está dada en el ejemplo anterior. Imponiendo las condiciones iniciales, encontramos que las constantes A y B satisfacen el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{ll} A + B + \frac{2}{9} & = 0 \\ -2A + 2B - \frac{1}{3} + \frac{2}{9} & = \frac{1}{3} \end{array}\right\}.$$

La solución es $A = -2/9$ y $B = 0$. Por tanto, la única sucesión que satisface las condiciones impuestas es

$$x_t = -\frac{2}{9}(-2)^t - \frac{t}{2} + \frac{2}{9}.$$

Observación 4.9. El método de los coeficientes indeterminados para resolver la ecuación (4.2) se basa en suponer que una solución particular tiene la misma estructura que el término no homogéneo b_t. Este método es muy útil cuando el término no homogéneo es de una de las siguientes formas:

$$b^t, \quad t^m, \quad \cos bt, \quad \operatorname{sen} bt,$$

o combinaciones lineales de ellas. La forma concreta de la solución depende también de las raíces del polinomio característico. Daremos las siguientes pautas:

1. Si $b_t = ab^t$, donde b no es raíz del polinomio característico, entonces probamos con $x_t^* = Cb^t$.
2. Si $b_t = ab^t$, donde b es raíz del polinomio característico de multiplicidad p, entonces probamos con $x_t^* = Ct^p b^t$.
3. Si $b_t = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \cdots + b_0$ es un polinomio de grado m, distinguimos dos casos:
   a) Si 1 no es raíz del polinomio característico, entonces probamos con $x_t^* = C_m t^m + C_{m-1} t^{m-1} + \cdots + C_0$.
   b) Si 1 es raíz del polinomio característico de multiplicidad p, entonces probamos con $x_t^* = t^p(C_m t^m + C_{m-1} t^{m-1} + \cdots + C_0)$.

Finalmente, sustituimos x_t^* en la ecuación y determinamos los coeficientes C's.

Ejemplo 4.10. Resolver la ecuación $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 4^t + t^2 + 3$.

SOLUCIÓN: La ecuación homogénea tiene ecuación característica $r^2 - 5r + 6 = 0$, que tiene dos raíces reales diferentes, $r_{1,2} = 2, 3$. La solución general es $A2^t + B3^t$. Para encontrar una solución particular, buscamos constantes C, D, E y F tal que

$$x_t^* = C4^t + Dt^2 + Et + F$$

sea solución. Al sustituir en la ecuación tenemos la igualdad

$$\begin{aligned} C4^{t+2} + D(t+2)^2 + E(t+2) + F - 5(C4^{t+1} + D(t+1)^2 + E(t+1) + F) \\ + 6(C4^t + Dt^2 + Et + F) = 4^t + t^2 + 3, \end{aligned}$$

que después de algunas manipulaciones se reduce a

$$2C4^t + 2Dt^2 + (-6D + 2E)t + (-D - 3E + 2F) = 4^t + t^2 + 3.$$

Esta igualdad es cierta para todo $t = 0, 1, 2, \ldots$, por lo que

$$\begin{aligned} 2C &= 1, \\ 2D &= 1, \\ -6D + 2E &= 0, \\ -D - 3E + 2F &= 3. \end{aligned}$$

Se sigue que $C = 1/2$, $D = 1/2$, $E = 3/2$ y $F = 4$. La solución general es

$$x_t = A2^t + B3^t + \frac{1}{2}4^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 4.$$

Ejemplo 4.11. Resolver la ecuación $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 4x_t = 4^t + t^2 + 3$.

Solución: La ecuación homogénea tiene ecuación característica $r^2 - 5r + 4 = 0$, que tiene dos raíces reales diferentes, $r_{1,2} = 1, 4$. La solución general es $A + B4^t$. Para encontrar una solución particular, buscamos constantes C, D, E y F tal que

$$x_t^* = Ct4^t + t(Dt^2 + Et + F)$$

sea solución. Al sustituir en la ecuación tenemos la igualdad

$$\begin{aligned} &C(t+2)4^{t+2} + (t+2)(D(t+2)^2 + E(t+2) + F) - 5C(t+1)4^{t+1} \\ &\qquad - 5(t+1)(D(t+1)^2 + E(t+1) + F) + 4Ct4^t + 4t(Dt^2 + Et + F) = 4^t + t^2 + 3. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de las expresiones a ambos lados de la igualdad, tenemos

$$\begin{aligned} t4^t:&\quad 16C - 20C + 4C = 0, \\ 4^t:&\quad 32C - 20C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{12}, \\ t^3:&\quad D - 5D + 4D = 0, \\ t^2:&\quad 8D + E - 10D - 5E + 4E = 1 \Rightarrow D = -\frac{1}{2}, \\ t:&\quad 4D + 8D + 4E + F - 10D - 5D - 10E - 5F + 4F = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{4}, \\ t^0:&\quad 8D + 4F + 2F - 5D - 5E - 5F = 3 \Rightarrow F = \frac{23}{4}. \end{aligned}$$

5. Sistemas lineales de ecuaciones en diferencias

En este apartado supondremos que las variables dinámicas son vectores, $X_t \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Un *sistema de primer orden de coeficientes constantes* está dado por

$$\left.\begin{array}{rcl} x_{1,t+1} &=& a_{11}x_{1,t} + \cdots + a_{1n}x_{n,t} + b_{1,t} \\ &\vdots& \\ x_{n,t+1} &=& a_{n1}x_{1,t} + \cdots + a_{nn}x_{n,t} + b_{n,t} \end{array}\right\}.$$

Un ejemplo es

$$\begin{aligned} x_{1,t+1} &= 2x_{1,t} - x_{2,t} + 1 \\ x_{2,t+1} &= x_{1,t} + x_{2,t} + e^{-t}. \end{aligned}$$

Muy a menudo escribiremos estos sistemas omitiendo los subíndices, utilizando letras diferentes para cada una de las componentes del vector X, como por ejemplo

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 2x_t - y_t + 1 \\ y_{t+1} &= x_t + y_t + e^{-t}. \end{aligned}$$

Un sistema lineal puede escribirse en forma matricial:

$$X_{t+1} = AX_t + B_t,$$

donde

$$X_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,t} \\ \vdots \\ b_{n,t} \end{pmatrix}$$

Nos centraremos en el caso en que el término independiente $B_t \equiv B$ es un vector constante.

5.1. Sistemas Homogéneos. Consideramos el sistema homogéneo

$$X_{t+1} = AX_t.$$

Observamos que $X_1 = AX_0$, $X_2 = AX_1 = AAX_0 = A^2X_0$. Por tanto, dado un vector inicial X_0, la solución es

$$X_t = A^tX_0, \quad t = 0, 1, \dots.$$

5.2. Sistemas no Homogéneos. Sea el sistema no homogéneo

$$X_{t+1} = AX_t + B, \tag{5.1}$$

donde B es un vector constante. Supongamos que el sistema admite un único vector de equilibrio, X^0. Esto es así si $|A - I| \neq 0$, ya que entonces

$$X^0 = (I - A)^{-1}B.$$

Sea el nuevo vector $Y_t = X_t - X^0$. El sistema en términos de Y_t es homogéneo, ya que:

$$\begin{aligned} Y_{t+1} = X_{t+1} - X^0 &= AX_t + B - X^0 = AY_t + AX^0 + B - X^0 \\ &= AY_t + B - (I - A)X^0 = AY_t + B - (I - A)(I - A)^{-1}B \\ &= AY_t. \end{aligned}$$

Luego la solución es $Y_t = A^tY_0$ o, en términos de las variables originales

$$X_t = X^0 + A^t(X_0 - X^0). \tag{5.2}$$

Por tanto, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 5.1. *Supongamos que $|A - I_n| \neq 0$. Entonces la solución del sistema no homogéneo está dada por* (5.2).

Por supuesto, en el caso $n = 1$ obtenemos la fórmula del caso escalar.

¿Hasta qué punto este resultado es útil? Todo depende del cómputo de A^t. Cuando A es diagonalizable, sabemos que $A^t = PD^tP^{-1}$ para una matriz P formada por vectores propios de A y donde D es una matriz diagonal con los valores propios en su diagonal, por lo que D^t se calcula muy fácilmente.

Ejemplo 5.2. Encontrar la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

Solución: La matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ tiene polinomio característico $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$, con raíces $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$. Por tanto, la matriz es diagonalizable. Los subespacios propios son

$$S(3) =< (1,1) >, \qquad S(2) =< (1,2) > .$$

Por tanto, la matriz P, su inversa y la matriz diagonal D son

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y la solución se escribe

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} 2\,3^t - 2^t & -3^t + 2^t \\ 2\,3^t - 2^{t+1} & -3^t + 2^{t+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Si la condición inicial es por ejemplo $(x_0, y_0) = (1, 2)$, la solución está dada por

$$x_t = 2\,3^t - 2^t + 2(-3^t + 2^t) = 2^t,$$
$$y_t = 2\,3^t - 2^{t+1} + 2(-3^t + 2^{t+1}) = 2^{t+1}.$$

Daremos ahora un método alternativo para calcular la solución. Supongamos de nuevo que A es diagonalizable y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus valores propios (posiblemente repetidos) con vectores propios asociados $u_1, \ldots, u_n$. Sean $C_1, \ldots, C_n$ constantes arbitrarias. Entonces

$$X_t^h = C_1\lambda_1^t u_1 + \cdots + C_n\lambda_n^t u_n$$

es solución del sistema homogéneo. Esto es fácil de demostrar, ya que por la definición de valores y vectores propios,

$$AX_t^h = C_1\lambda_1^t Au_1 + \cdots + C_n\lambda_n^t Au_n = C_1\lambda_1^{t+1}u_1 + \cdots + C_n\lambda_n^{t+1}u_n = X_{t+1}^h.$$

La solución general del sistema no homogéneo es entonces $X_t = X_t^h + X^0$.

Ejemplo 5.3. En el ejemplo anterior, encontramos que A es diagonalizable, etc. Por tanto, la solución general es ($X^0 = 0$)

$$X_t = C_1 3^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 2^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si, como antes, queremos hallar la solución que cumple $X_0 = (1,2)$, entonces tenemos que determinar las constantes adecuadas C_1 y C_2 que satisfacen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En este caso tan sencillo, $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$. Por supuesto la solución coincide con la obtenida anteriormente.

Notar que la fórmula (5.2) da directamente la solución en términos de las condiciones inciales, calculando la inversa de P, mientras que la segunda fórmula da la solución general. Si queremos encontrar una determinada solución, hay que hallar las constantes $C_1, \dots, C_n$ adecuadas, resolviendo un sistema. Qué fórmula es más cómoda depende del problema que queramos resolver. Con un método tenemos que encontrar una matriz inversa y realizar multiplicaciones de matrices y en el otro hay que resolver un sistema lineal de ecuaciones.

Ejemplo 5.4. Encontrar la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución: El punto de equilibrio del sistema, X^0, está dada por

$$(I_3 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}.$$

También lo podríamos haber hallado sin necesidad de calcular una inversa, resolviendo directamente el sistema:

$$\begin{aligned} x &= 4x - y + 1 \\ y &= 2x + y - 1. \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior ya determinamos la solución general del sistema homogéneo. Por el Teorema 5.1 la solución general del no homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,3^t - 2^t & -3^t + 2^t \\ 2\,3^t - 2^{t+1} & -3^t + 2^{t+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - 1/2 \\ y_0 - 5/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}.$$

5.3. Estabilidad de los sistemas lineales. Analizamos en este apartado la estabilidad de los sistemas lineales $X_{t+1} = AX_t + B$ que verifican $|I - A| \neq 0$.

Para comprender el siguiente teorema, es importante recordar que el *módulo* de un número complejo $z = a + ib$ es $|z| = \rho == \sqrt{a^2 + b^2}$.

Teorema 5.5. *Una condición necesaria y suficiente para que el sistema $X_{t+1} = AX_t + B$ sea globalmente asintóticamente estable es que las raíces (reales o complejas) del polinomio característico $p_A(\lambda)$ tengan módulo menor que 1. En este caso, cualquier trayectoria converge al punto de equilibrio $X^0 = (I - A)^{-1}B$, cuando $t \to \infty$.*

Daremos la prueba sólo en el caso en que A es diagonalizable. La prueba general es más complicada. Como se ha demostrado anteriormente, la solución del sistema no homogéneo cuando A es diagonalizable es

$$X_t = X^0 + PD^tP^{-1}(X_0 - X^0),$$

con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^t \end{pmatrix},$$

y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces reales (posiblemente repetidas) de $p_A(\lambda)$. Dado que $|\lambda_j| < 1$ para todo j, los elementos diagonales de D^t tienden a 0 cuando $t \to \infty$, dado que $\lambda_j^t \leq |\lambda_j|^t \to 0$. Por tanto,

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X^0.$$

Ejemplo 5.6. Estudiar la estabilidad del sistema

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t - \frac{1}{2}y_t + 1, \\ y_{t+1} &= x_t - 1. \end{aligned}$$

Solución: La matriz del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con ecuación característica $\lambda^2 - \lambda + 1/2 = 0$. La raíces son complejas, $\lambda_{1,2} = 1/2 \pm i/2$. El módulo de cualquiera de ellas es (pues son complejos conjugados) $\rho = \sqrt{1/4 + 1/4} = 1/\sqrt{2} < 1$, por lo que el sistema es g.a.e., y el límite de cualquier trayectoria es el punto de equilibrio

$$X^0 = \begin{pmatrix} 1-1 & 0-(-1/2) \\ 0-1 & 1-0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5.7. Estudiar la estabilidad del sistema

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t + 3y_t, \\ y_{t+1} &= x_t/2 + y_t/2. \end{aligned}$$

Solución: La matriz del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, con ecuación característica $\lambda^2 - (3/2)\lambda - 1 = 0$. La raíces son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1/2$. El sistema no es estable. Sin embargo, existen condiciones iniciales X_0 tales que la solución converge al punto de equilibrio $X^0 = (0,0)$. Estas condiciones iniciales estables se determinan a partir de la solución $X_t = PD^tP^{-1}X_0$. Los subespacios propios son $S(2) =< (3,1) >$ y $S(-1/2) =< (2,-1) >$, por tanto

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

De manera que la solución es

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}2^t(x_0+2y_0)+\frac{1}{5}2^{1-t}(x_0-3y_0) \\ \frac{1}{5}2^t(x_0+2y_0)-\frac{1}{5}2^{-t}(x_0-3y_0) \end{pmatrix}.$$

Si las condiciones iniciales (x_0, y_0) satisfacen la relación $x_0 + 2y_0 = 0$, entonces la expresión anterior converge a $(0, 0)$ (la parte "explosiva" de la solución desaparece). Por esta razón, la recta $x+2y = 0$ se llama la *variedad estable*. Observamos que la variedad estable es de hecho el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -1/2$, dado que

$$S(-1/2) =< (2, -1) >= \{x + 2y = 0\}.$$

Cualquier otra condición inicial $(x_0, y_0) \notin S(-1/2)$ genera una solución que no converge a $(0, 0)$ (de hecho, que no converge a ningún punto).

Ejemplo 5.8 (Ajuste dinámico en el modelo de Cournot)**.** El propósito de este ejemplo es investigar las condiciones bajo las cuales cierto proceso de ajuste en el duopolio de Cournot converge hacia el equilibrio de Nash del juego estático.

Consideramos un duopolio de Cournot en el que dos empresas, 1 y 2 (los jugadores), producen un bien homogéneo y se enfrentan a unos costes marginales de producción constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$, respectivamente. El precio de mercado P depende linealmente de la cantidad total producida por ambas empresas $Q = q_1 + q_2$

$$P = \alpha - \beta Q, \qquad \alpha > c_i, \quad i = 1, 2, \quad \beta > 0.$$

En el duopolio de Cournot cada empresa elige de forma independiente una cantidad q_i para maximizar sus beneficios, tomando como dado (pero desconocido a priori) la cantidad producida por la otra empresa, q_j. El beneficio de la empresa i es

$$\pi_i = q_i P - c_i q_i.$$

Asumiendo que los óptimos son estrictamente positivos, del cálculo elemental sabemos que la condición de maximización para cada uno de los jugadores es[1]

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial q_i}(q_1, q_2) = 0, \qquad i = 1, 2,$$

de lo que obtenemos la función de *mejor respuesta* del jugador i, que depende del nivel de producción elegido por la empresa[2] j

$$\mathrm{br}_1 = a_1 - q_2/2, \qquad \mathrm{br}_2 = a_2 - q_1/2,$$

donce $a_i = \dfrac{\alpha - c_i}{2\beta}$, $i = 1, 2$. Supondremos $a_1 > a_2/2$ y $a_2 > a_1/2$ para tener cantidades positivas en equilibrio, como mostraremos a continuación. Que $q_1 = \mathrm{br}_1(q_2)$ es mejor respuesta

[1] Esta condición es también suficiente en este juego puesto que la función de beneficio de cada uno de los jugadores es cóncava con respecto a su propia variable de decisión, es decir, π_1 es cóncava respecto a q_1 y π_2 es cóncava respecto a q_2.

[2] En realidad, la mejor respuesta es $\mathrm{br}_i = \max\{a_i - q_j/2, 0\}$, dado que cantidades negativas no se consideran estrategias admisibles.

frente a q_2 significa que, si la empresa 2 fija q_2, entonces q_1 maximiza los beneficios de la empresa 1.

El equilibrio de Nash del juego, (q_1^N, q_2^N), es un par de niveles de producción tal que ninguna empresa tiene incentivos a desviarse unilateralmente, es decir, q_i^N es la mejor respuesta del jugador i frente a q_j, $i \neq j$. Por tanto, el equilibrio de Nash es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} q_1^N &= \mathrm{br}_1(q_2^N), \\ q_2^N &= \mathrm{br}_2(q_1^N). \end{aligned}$$

En nuestro modelo

$$\begin{aligned} q_1^N &= a_1 - q_2^N/2, \\ q_2^N &= a_2 - q_2^N/2. \end{aligned}$$

Resolviendo, encontramos

$$\begin{aligned} q_1^N &= \frac{4}{3}\left(a_2 - \frac{a_1}{2}\right), \\ q_2^N &= \frac{4}{3}\left(a_1 - \frac{a_2}{2}\right), \end{aligned}$$

que son cantidades positivas dadas nuestras hipótesis. Por ejemplo, si el juego es simétrico, es decir, $c_1 = c_2 = c$, entonces $a_1 = a_2 = \dfrac{\alpha - c}{2\beta}$ y el equilibiro de Nash es el par

$$\begin{aligned} q_1^N &= \frac{\alpha - c}{3\beta}, \\ q_2^N &= \frac{\alpha - c}{3\beta}. \end{aligned}$$

Para ser más específicos, supongamos que $\alpha = 11$, $c = 2$ y $\beta = 1$. Entonces la teoría recomienda jugar el par de cantidades $(3, 3)$, que generan unos beneficios de

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi = 3 \cdot P(3 + 3) - 2 \cdot 3 = 3(11 - 6) - 6 = 9 \text{ u.m.}$$

Si cualquiera de los duopolistas produce otra cantidad $q \neq 3$ mientras el otro continúa jugando 3, el que se desvía sólo puede reducir su beneficio.

En lo que sigue consideramos el modelo general, asimétrico, e introducimos una componente dinámica. Supondremos que las empresas no eligen su producción de Nash instantáneamente, sino que ajustan de manera gradual su producción q_i hacia la mejor respuesta br_i en cada período t como se especifica a continuación:

$$\left\{ \begin{aligned} q_{1,t+1} &= q_{1,t} + d(\mathrm{br}_{1,t} - q_{1,t}) = q_{1,t} + d(a_1 - \tfrac{1}{2}q_{2,t} - q_{1,t}), \\ q_{2,t+1} &= q_{1,t} + d(\mathrm{br}_{2,t} - q_{2,t}) = q_{2,t} + d(a_2 - \tfrac{1}{2}q_{1,t} - q_{2,t}), \end{aligned} \right. \tag{5.3}$$

donde d es una constante positiva. El objetivo es estudiar si este proceso de ajuste converge hacia el equilibrio de Nash del juego.

Para simplificar la notación introducimos nuevas variable $x = q_1$ y $y = q_2$. Reagrupando términos el sistema (5.3) es

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1-d)x_t - \frac{d}{2}y_t + da_1, \\ \\ y_{t+1} = (1-d)y_t - \frac{d}{2}x_t + da_2. \end{cases}$$

El punto fijo o equilibrio del sistema satisface

$$\begin{cases} x = (1-d)x - \frac{d}{2}y + da_1, \\ \\ y = (1-d)y - \frac{d}{2}x + da_2. \end{cases}$$

La única solución es precisamente el equilibrio de Nash definido más arriba,

$$(x^N, y^N) = \left(\frac{4}{3}\left(a_2 - \frac{a_1}{2}\right), \frac{4}{3}\left(a_1 - \frac{a_2}{2}\right) \right).$$

¿Bajo qué condiciones este ajuste progresivo de la producción convergerá al equilibrio de Nash? Como ya sabemos, esto depende del hecho de que el módulo de los valores propios del sistema sea menor que 1. La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1-d & -\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} & 1-d \end{pmatrix}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = 1 - \frac{d}{2}, \qquad \lambda_2 = 1 - \frac{3d}{2}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} |\lambda_1| < 1 \quad & \text{sii} \quad 0 < d < 4, \\ |\lambda_2| < 1 \quad & \text{sii} \quad 0 < d < 4/3, \end{aligned}$$

por tanto, $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$ sii $0 < d < 4/3$. Es decir, $0 < d < 4/3$ es condición necesaria y suficiente para la convergencia hacia el equilibirio de Nash desde cualquier condición inicial (sistema g.a.e.).

6. Ecuaciones no lineales de primer orden

Estudiamos la estabilidad de la ecuación no lineal, de primer orden y autónoma

$$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 0, 1, \dots,$$

donde $f : I \to I$ es no lineal y I es un intervalo de la recta real. Supondremos que f es de clase C^1. Recordamos que una función f es de *clase* C^1 en un intervalo abierto si f' existe y es continua en dicho intervalo. Por ejemplo, las funciones x^2, $\cos x$ o e^x son de clase C^1 en $\mathbb{R}$, pero $|x|$ no es derivable en 0, por lo que no es C^1 en ningún intervalo que contenga 0.

Teorema 6.1. *Sea $x^0 \in I$ un punto fijo de f, y supongamos que f es C^1 en un intervalo abierto con centro x^0, $I_\delta = (x^0 - \delta, x^0 + \delta)$.*

1. *Si $|f'(x^0)| < 1$, entonces x^0 es localmente asintóticamente estable;*
2. *Si $|f'(x^0)| > 1$, entonces x^0 es inestable.*

Observación 6.2. Si $|f'(x)| < 1$ para cada $x \in I$, entonces el punto fijo x^0 es globalmente asintóticamente estable.

Ejemplo 6.3 (Modelos de crecimiento de la población)**.** El modelo de Malthus de crecimiento de una población supone que la población x crece a una tasa constante r, es decir,

$$\frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} = r, \qquad \text{o} \qquad x_{t+1} = (1+r)x_t.$$

Esta es una ecuación en diferencias lineal y de primer orden, en la que la solución (la población), crece de manera no acotada si la tasa de crecimiento per capita r es positiva[3]. Este comportamiento no es realista para t grande. Cuando la población es pequeña, existen recursos suficientes para soportar una tasa de nacimientos elevada, pero a medida que el tiempo pasa y la población crece, debe haber una alta tasa de mortalidad debido a la competencia entre individuos por el espacio y la comida. Por tanto, la tasa de crecimiento per capita de la población debería ser decreciente a medida que la población aumenta, y no constante como postula el modelo de Malthus. El caso más simple es suponer una tasa de crecimiento per capita que sea linealmente decreciente, es decir,

$$\text{tasa de crecimiento cuando la población es } x\text{: } r(x) = r\left(1 - \frac{x}{M}\right),$$

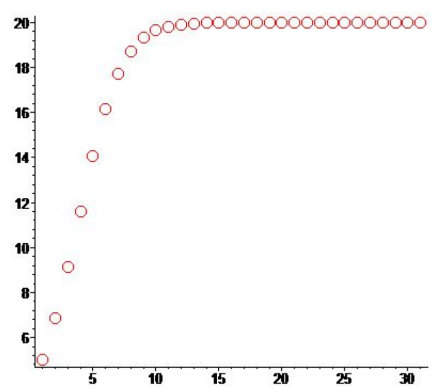
donce M es el nivel máximo sostenible de población (si $x > M$, entonces la población decrece, puesto que $r(x) < 0$). El modelo que surge se conoce como *ley de Verhulst*. La población evoluciona de acuerdo a la ecuación

$$x_{t+1} = x_t\left(1 + r - \frac{r}{M}x_t\right),$$

que es no lineal. De hecho, la función f es cuadrática,

$$f(x) = x\left(1 + r - \frac{r}{M}x\right).$$

En la Fig. 6.3 se representa una trayectoria solución cuando $x_0 = 5$, $r = 0{,}5$ y $M = 20$.



Nótese que la solución converge hacia $x^0 = 20$. Existen dos punto fijos de la ecuación, 0 (extinción) y $x^0 = M$ (máximo nivel sostenible de población). Considerando la derivada de

[3]La solución es $x_t = (1+r)^t x_0$, ¿por qué?

f en cada uno de estos puntos, tenemos

$$f'(0) = 1 + r - 2\frac{r}{M}x\Big|_{x=0} = 1 + r > 1,$$
$$f'(M) = 1 + r - 2\frac{r}{M}x\Big|_{x=M} = 1 - r.$$

De acuerdo al Teorema 6.1, el punto de equilibiro 0 es inestable, pero M es localmente asintóticamente estable sii $|1-r| < 1$, o $0 < r < 2$.

6.1. Diagrama de Fases. La estabilidad de los puntos fijos de la ecuación

$$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 0, 1, \dots,$$

puede estudiarse mediante un método gráfico conocido como *diagrama de fases*. Este consiste en dibujar la gráfica de la función $y = f(x)$ en el plano xy, junto con la recta $y = x$. Notar que un punto fijo x^0 corresponde al punto de la diagonal del primer y tercer cuadrante (x^0, x^0), donde la gráfica de $y = f(x)$ intercepta a la recta $y = x$. El diagrama de fases muestra, junto con las gráficas anteriores, los pares

$$(x_0, 0), (x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_2), (x_2, x_3),$$

unidos mediante segmentos.

Las siguientes figuras muestran distintas configuraciones posibles alrededor de un punto fijo. El diagrama de fases se muestra a la izquierda en cada figura (en el plano xy) y la trayectoria solución correspondiente a la derecha (en el plano tx). Observar que hemos dibujado las soluciones como curvas continuas porque ello facilita comprender el carácter de la solución, pero en realidad la solución es una sucesión, es decir, un conjunto de puntos aislados (también resaltados en el gráfico mediante círculos de mayor tamaño).

En la Fig. 1, $f'(x^0)$ es positiva, y la sucesión es creciente $x_0, x_1, \dots$ y converge de forma monótona hacia el punto fijo x^0, mientras que en la Fig. 2, $f'(x^0)$ es negativa, por lo que puede observarse un comportamiento oscilante, como en los modelos de la telaraña estudiados anteriormente, pues la sucesión $x_0, x_1, \dots$ converge hacia x^0 pero alternando valores alrededor del punto de equilibrio. En la Fig. 3, la gráfica de f próxima a x^0 es demasiado inclinada para obtener convergencia. después de varias iteraciones en el diagrama de fases podemos observar un comportamiento errático en la solución $x_0, x_1, \dots$. No hay ciclos y dos sucesiones generadas a partir de condiciones iniciales parecidas se alejan a medida que aumenta t, a una tasa exponencial (ver Teorema 6.1 para una justificación de esta afirmación). En la literatura se dice que la sucesión es caótica. Finalmente, la Fig. 4 es el diagrama de fases de una ecuación que admite un ciclo de período 3.

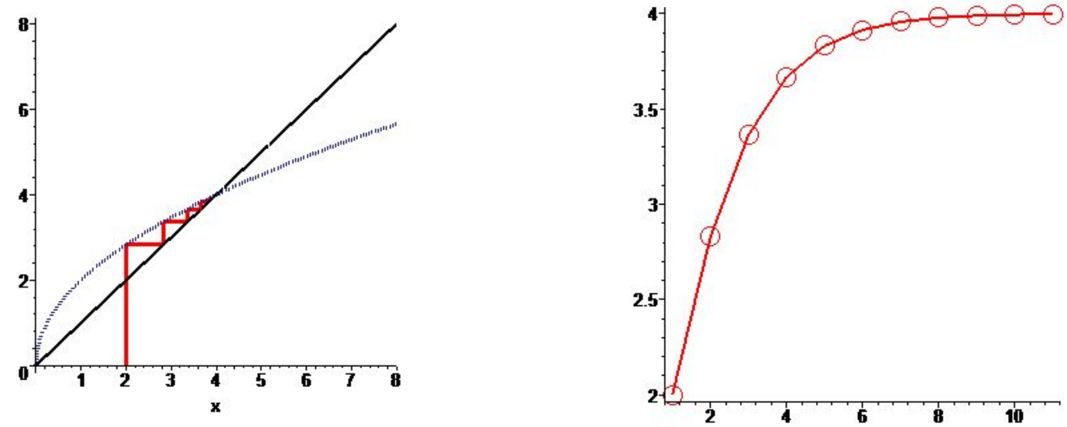


FIGURA 1. x^0 estable, $f'(x^0) \in (0,1)$

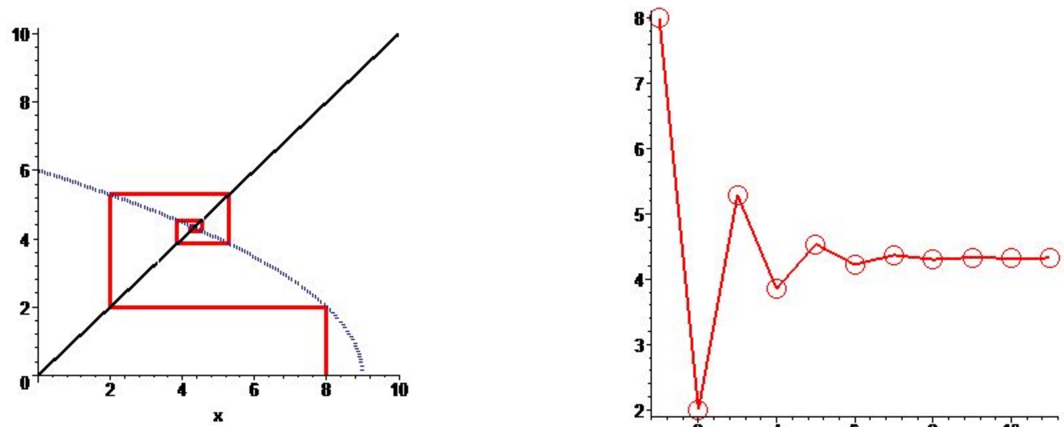


FIGURA 2. x^0 estable, $f'(x^0) \in (-1,0)$

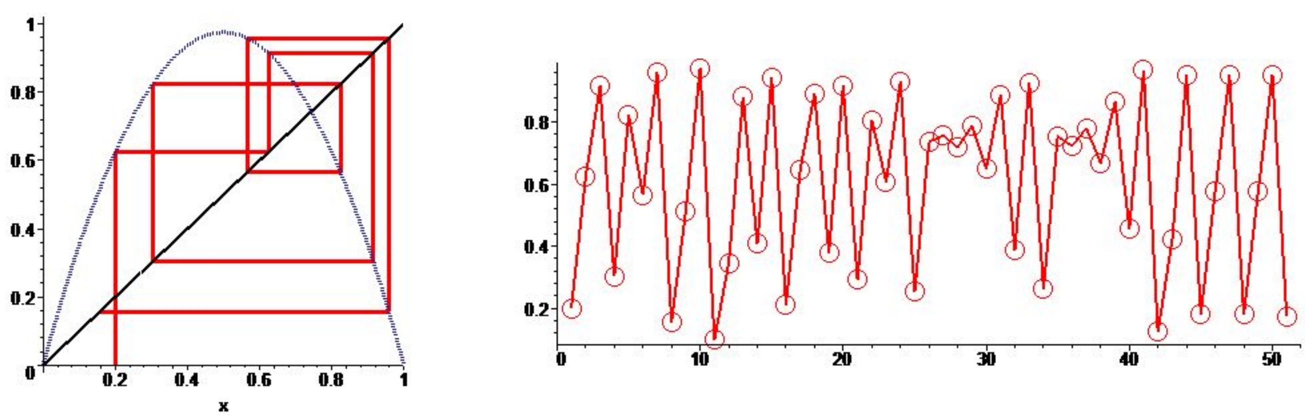
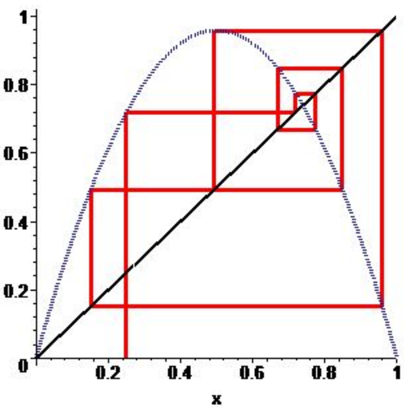


FIGURA 3. x^0 inestable, $|f'(x^0)| > 1$



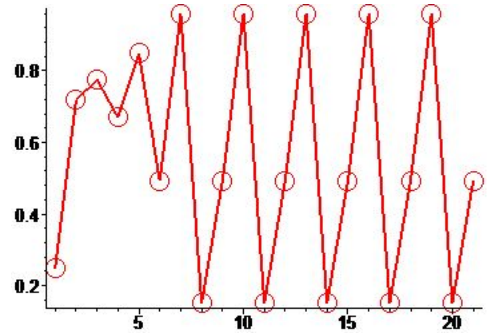


FIGURA 4. Un ciclo de período 3