SOLUCIONES EXAMEN FINAL DE ECONOMETRÍA

1. .

a. Respuesta:

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 Z + \beta_3 W + U \\ W &= \gamma_0 + \gamma_1 Z + V \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} U &= Y - (\beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 Z + \beta_3 W) \\ &= Y - \mathbb{E}(Y|X, Z, W) \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(U|X, Z, W) = \mathbb{E}(Y|X, Z, W) - \mathbb{E}(Y|X, Z, W) = 0 \\ V &= W - (\gamma_0 + \gamma_1 Z) \\ &= W - \mathbb{E}(W|X, Z) \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(V|X, Z) = \mathbb{E}(W|X, Z) - \mathbb{E}(W|X, Z) = 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación para W en la de Y y reordenando términos,

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 Z + \beta_3 (\gamma_0 + \gamma_1 Z + V) + U \\ &= (\beta_0 + \beta_3 \gamma_0) + \beta_1 X + (\beta_2 + \beta_3 \gamma_1) Z + (U + \beta_3 V) \\ &= \delta_0 + \beta_1 X + \delta_1 Z + \epsilon \end{aligned} \quad (*)$$

donde $\delta_0 = \beta_0 + \beta_3 \gamma_0$ y $\delta_1 = \beta_2 + \beta_3 \gamma_1$ y

$$\mathbb{E}(\epsilon|X, Z) = \mathbb{E}(U|X, Z) + \beta_3 \mathbb{E}(V|X, Z) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(U|X, Z, W)|X, Z) + 0 = 0$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y|X, Z) &= \delta_0 + \beta_1 X + \delta_1 Z + \mathbb{E}(\epsilon|X, Z) = \delta_0 + \beta_1 X + \delta_1 Z \\ \mathbb{E}(Y|X+1, Z) &= \delta_0 + \beta_1 (X+1) + \delta_1 Z + \mathbb{E}(\epsilon|X+1, Z) = \delta_0 + \beta_1 (X+1) + \delta_1 Z \end{aligned}$$

y cuando X aumenta en una unidad y (sólo) Z permanece constante

$$\mathbb{E}(Y|X+1, Z) - \mathbb{E}(Y|X, Z) = \beta_1.$$

Alternativamente se puede argumentar que W es una variable de control porque $\mathbb{E}(W|Z) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(W|X, Z)|Z) = \mathbb{E}(\gamma_0 + \gamma_1 Z|Z) = \gamma_0 + \gamma_1 Z = \mathbb{E}(W|X, Z)$ y por tanto usando el modelo original

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y|X, Z) &= \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 Z + \beta_3 \mathbb{E}(W|X, Z) + \mathbb{E}(U|X, Z) \\ &= \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 Z + \beta_3 \mathbb{E}(W|Z) + 0 \\ \mathbb{E}(Y|X+1, Z) &= \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 Z + \beta_3 \mathbb{E}(W|X+1, Z) + \mathbb{E}(U|X+1, Z) \\ &= \beta_0 + \beta_1 (X+1) + \beta_2 Z + \beta_3 \mathbb{E}(W|Z) + 0 \end{aligned}$$

y se obtiene la diferencia $\mathbb{E}(Y|X+1, Z) - \mathbb{E}(Y|X, Z) = \beta_1$ por que $\mathbb{E}(W|X, Z) = \mathbb{E}(W|X+1, Z) = \mathbb{E}(W|Z)$ y $\mathbb{E}(U|X, Z) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(U|X, Z, W)|X, Z) = 0$.

- b. En la estimación con sólo (X, Z) como regresores el modelo de referencia es el (*) por que su error cumple $\mathbb{E}(\epsilon|X, Z) = 0$ (y suponemos que se cumplen el resto de supuestos MCO), y por tanto el coeficiente MCO es un estimador insesgado (y consistente) de β_1 . Sin embargo el coeficiente MCO de Z estima insesgradamente $\delta_1 = \beta_2 + \beta_3\gamma_1 \neq \beta_2$ y por tanto es sesgado para β_2 .
- c. En ese caso el resultado (asintótico) de estimar con (X, Z, W) o sólo con (X, Z) es el mismo y ambas regresiones deberían proporcionar estimadores insesgados y consistentes de β_1 (coeficiente de X) y de β_2 (coeficiente de Z), ya que $\mathbb{E}(W|X, Z) = \mathbb{E}(W) = \text{constante}$ -no depende de Z ni de X -, lo que implica que $\delta_1 = \beta_2$ ya que $\gamma_1 = 0$.

2. .

- a. Elasticidad de Y con respecto a K :

$$\frac{\partial \log Y}{\partial \log K} = \beta_2 + \beta_4 \left(\frac{1}{2} 2 \log K \right) + \beta_5 \log L = \beta_2 + \beta_4 \log K + \beta_5 \log L$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\log Y}}{\partial \log L} &= \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_4 \log 318 + \hat{\beta}_5 \log 1712 \\ &= -1.89311 + 0.08529 \log 318 + 0.31238 \log 1712 = 0.92413. \end{aligned}$$

- b. Hay que contrastar en el modelo (3) la hipótesis nula

$$H_0 : \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$$

bajo la cual ambos modelos coinciden, en contra de la alternativa

$$H_1 : \beta_3 \neq 0 \text{ ó } \beta_4 \neq 0 \text{ ó } \beta_5 \neq 0,$$

para lo que podemos comparar el ajuste del model restringido (Modelo 2: Cobb-Douglas) con el modelo no restringido (Modelo 1: Translog) por medio de un estadístico F (no robusto a la heterocedasticidad):

$$\begin{aligned} F &= \frac{SCR_r - SCR_{nr}}{SCR_{nr}} \frac{n - k - 1}{q} \\ &= \frac{0.851634 - 0.679927}{0.679927} \frac{27 - 5 - 1}{3} = 1.7678, \end{aligned}$$

o alternativamente,

$$\begin{aligned} F &= \frac{R_{nr}^2 - R_r^2}{1 - R_{nr}^2} \frac{n - k - 1}{q} \\ &= \frac{0.954862 - 0.943463}{1 - 0.954862} \frac{27 - 5 - 1}{3} = 1.7678, \end{aligned}$$

que no es significativo comparado con el valor crítico de una $\chi_3^2/3$, $F = 1.7678 < 2.60$ al 5%, y por tanto no podemos rechazar la hipótesis nula, es decir la especificación Cobb-Douglas comparada con la translog.

- c. La hipótesis nula en este caso es

$$H_0 : \beta_1 = 1$$

en contra de la alternativa

$$H_1 : \beta_1 \neq 1.$$

Para realizar el contraste se puede usar un estadístico t a partir del Modelo 2 usando los e.e. robustos a la heterocedasticidad

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{ee(\hat{\beta}_1)} = \frac{0.60299 - 1}{0.12595} = -3.1521,$$

que es significativo comparado con una *normal* standard, $|t| = 3.1521 > 1.96$ al 5%, y por tanto rechazamos la hipótesis nula de que la elasticidad es uno a favor de la alternativa de que es diferente.

Alternativamente se puede utilizar un estadístico F (no robusto a la heterocedasticidad) comparando las SCR restringida y no restringida, Modelos 5 y 2, respectivamente, en este caso con una restricción $q = 1$, y con $k = 2$ en el modelo no restringido,

$$\begin{aligned} F &= \frac{SCR_r - SCR_{nr} \frac{n - k - 1}{1}}{SCR_{nr}} \\ &= \frac{1.204167 - 0.851634 \frac{27 - 2 - 1}{1}}{0.851634} = 9.9348, \end{aligned}$$

que es significativo comparado con el valor crítico de una $\chi_1^2/1 = 3.86$, $F = 9.93 > 3.84$ al 5%, rechazando también la hipótesis nula. No se puede usar en este caso la versión del estadístico F en función de R^2 por que la variable dependiente es diferente en ambos modelos).

El contraste t es válido bajo heterocedasticidad porque *los* e.e. lo son, pero el estadístico F no lo es por estar basado en comparaciones de SCR, aunque en este caso $t^2 = (-3.1521)^2 = 9.9357$ toma un valor muy cercano a F .

d. La hipótesis nula en este caso es

$$H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1$$

en contra de la alternativa

$$H_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq 1.$$

En este caso no se dispone de un modelo restringido bajo H_0 pero sí un modelo transformado o reparametrizado usando la desviación de la hipótesis nula

$$\theta = \beta_1 + \beta_2 - 1$$

y contrastando la hipótesis nula equivalente

$$H_0 : \theta = 0$$

en contra de la alternativa

$$H_1 : \theta \neq 0.$$

Sustituyendo $\beta_2 = \theta - \beta_1 + 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \log Y &= \beta_0 + \beta_1 \log L + \beta_2 \log K + U \\ &= \beta_0 + \beta_1 \log L + (\theta - \beta_1 + 1) \log K + U \end{aligned}$$

y reagrupando términos

$$\log Y - \log K = \beta_0 + \beta_1 (\log L - \log K) + \theta \log K + U$$

o equivalentemente

$$\log(Y/K) = \beta_0 + \beta_1 \log(L/K) + \theta \log K + U$$

por lo que el contraste se puede efectuar con un estadístico t robusto a partir de la salida del Modelo 4

$$t = \frac{\hat{\theta}}{ee(\hat{\theta})} = \frac{-0.00090022}{0.003926} = -0.2298$$

que con un p-valor igual a 0.8202 no puede rechazar la hipótesis nula a ningún nivel de significación habitual.

3. .

a. La variación porcentual requerida es igual a la elasticidad de $wage$ respecto a $exper$,

$$\frac{\partial \log wage}{\partial \log exper} = \frac{\partial \log wage}{\partial exper/exper} = exper \cdot \frac{\partial \log wage}{\partial exper} = exper (\beta_2 + 2\beta_3 exper) = 10 (\beta_2 + 20\beta_3),$$

ya que $exper$ está en niveles en el modelo, por lo que la estimación es

$$10 (\hat{\beta}_2 + 20\hat{\beta}_3) = 10 (0.04373 + 20 \cdot (-0.000845)) = 0.2683\%.$$

Alternativamente se puede hacer un cálculo directo usando que un 1% de $exper = 10$ es igual a $\Delta exper = 0,1$ y calculando la diferencia

$$\begin{aligned} \Delta E [wage | exper] / wage &\approx \Delta E [\log wage | exper] \\ &= E [\log wage | exper = 10, 1] - E [\log wage | exper = 10] \\ &= (\beta_2 \cdot 10, 1 + \beta_3 \cdot 10, 1^2) - (\beta_2 \cdot 10 + \beta_3 \cdot 10^2) \\ &= \beta_2 \cdot 0, 1 + \beta_3 \cdot (10, 1^2 - 10^2) \end{aligned}$$

que se estima como

$$\begin{aligned} &\hat{\beta}_2 \cdot 0, 1 + \hat{\beta}_3 \cdot (10, 1^2 - 10^2) \\ &= 0.04373 \cdot 0, 1 + (-0.000845) \cdot (10, 1^2 - 10^2) \\ &= 0, 00267 \end{aligned}$$

que equivale una variación del 0,267% del valor esperado de $wage$.

La elasticidad es

$$\frac{\partial \log wage}{\partial \log nwifeinc} = \frac{\partial \log wage}{\partial nwifeinc/nwifeinc} = nwifeinc (\beta_6 + \beta_9 kidslt6 + \beta_{10} kidsge6)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\log wage}}{\partial \log nwifeinc} &= nwifeinc (\hat{\beta}_6 + \hat{\beta}_9 kidslt6 + \hat{\beta}_{10} kidsge6) \\ &= 200 (0.01435 + 0.000744 \cdot 1 - 0.008353 \cdot 1) \\ &= 1.3394, \end{aligned}$$

ya que $kidslt6 = kidsge6 = 1$ porque tiene un hijo menor que 6 y otro mayor.

b. Relevancia del instrumento: hay que calcular el estadístico F correspondiente a la hipótesis nula

$$H_0 : \pi_{meduc} = 0$$

de significatividad del instrumento $meduc$ en la estimación de la forma reducida del regresor endógeno ($educ$) o primera etapa de MC2E usando el Modelo 7:

$$F = t_{meduc}^2 = (12, 6650)^2 = 160, 4$$

que es muy significativo a cualquier nivel y también mayor que 10, por lo que *meduc* es relevante y no es un instrumento débil.

Instrumentos adicionales se pueden obtener usando las mismas interacciones pero con el instrumento, *meduc·nkidslt6* y *meduc·nkidsge6*, que esperaríamos sean exógenas y relevantes si *meduc* lo es.

- c. Con la disponibilidad de dos instrumentos *meduc* y *feduc*, $m = 2$, para un único regresor endógeno, *educ*, $k = 1$, tenemos $m - k = 1$ una restricción de sobreidentificación y se podría efectuar el contraste J de la hipótesis nula de exogeneidad de los instrumentos,

$$H_0 : \text{Cov}(meduc, U) = \text{Cov}(feduc, U) = 0$$

siguiendo el procedimiento habitual:

1. Ajustar MC2E con los dos instrumentos y usar los estimadores MC2E para obtener residuos $\hat{U}$.
2. Regresar $\hat{U}$ en los dos instrumentos y todos los regresores exógenos (o variables de control) y computar el estadístico F de significatividad conjunta de los dos instrumentos.
3. Calcular el estadístico de contraste de Hansen-Sargan $J = mF = 2F$ y compararlo con el valor crítico de una distribución $\chi_{m-k}^2 = \chi_1^2$: si J es mayor que el valor crítico se rechaza la hipótesis nula de que los dos instrumentos son exógenos a favor de la alternativa de que al menos uno es endógeno.