Ejercicio	1	2	3	4	5	6	7	8	total
Puntos									

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía   Examen final de Matemáticas I   8 de febrero de 2007

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

MODELO 1:

1. **Dada la función** $g(x) = |\ln(x-2)|$. **Se pide:**

a) Representar la gráfica de g, utilizando la gráfica de $\ln(x-2)$, y determinar el dominio y la imagen de g.

b) Consideremos $g(x)$ restringida al intervalo donde es decreciente. Hallar su inversa.
Sugerencia para a) y b): no es necesario derivar.
1 punto

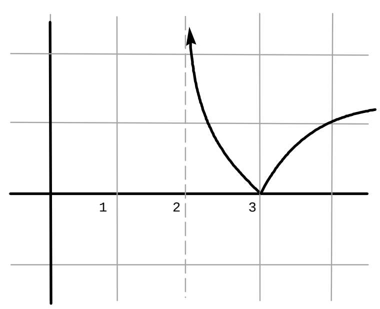
---

a) A partir de la gráfica de $f(x) = \ln(x-2)$, se observa que:

1) la gráfica de $g(x)$ coincide con la gráfica de $f(x)$ cuando esta última es positiva o se anula, es decir, cuando $x \geqslant 3$,

2) la gráfica de $g(x)$ se obtiene a partir de una reflexión respecto al eje horizontal de la gráfica de $f(x)$ cuando
esta última es negativa, es decir, cuando $2 < x < 3$.

Por lo tanto, la gráfica de $g(x)$ tiene una forma aproximadamente así:



.

Del dibujo anterior se deduce que el dominio de $f(x)$ coincide con el de $g(x)$, esto es $(2,\infty)$.

Respecto a la imagen, como la imagen de $f(x) = \ln(x-2)$ es toda la recta real,
la imagen de $g(x) = |f(x)|$ será el intervalo $[0,\infty)$.

.

b) Como se puede apreciar por la gráfica de $g(x)$, esta función es decreciente en el intervalo $(2,3]$, donde $g(x) = -\ln(x-2)$.

Ahora, considerando $g : (2,3] \to [0,\infty)$, g es biyectiva, así que $y = g^{-1}(x)$, $g^{-1} : [0,\infty) \longrightarrow (2,3]$ cumplirá que $g(y) = g(g^{-1}(x)) \; = x$, o equivalentemente

$-\ln(y-2) = x$, o equivalentemente $y - 2 = e^{-x}$, o equivalentemente $g^{-1}(x) = y = 2 + e^{-x}$

2. **Sea la función** $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$**. Se pide:**

a) Hallar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de f, así como sus extremos locales y/o globales.

b) Hallar los intervalos de concavidad / convexidad de f, así como sus puntos de inflexión.

c) Consideramos en $\mathbb{R}^2$ el orden de Pareto definido por $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0 \leq x_1,\ y_0 \leq y_1$. Hallar, si los hay, los puntos maximales y minimales, el máximo y el mínimo del conjunto $A = \{(x,y) : \frac{x}{3} \leq y \leq f(x), 0 \leq x\}$.

1'5 puntos

---

a) Como $f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, se cumple que:

1) $f'(x) > 0$ cuando $-1 < x < 1 \Rightarrow f$ es creciente en $[-1,1]$.

2) $f'(x) < 0$ cuando $x < -1$ o $x > 1 \Rightarrow f$ es decreciente en $(-\infty,-1]$ y en $[1,\infty)$.

Por lo tanto, f alcanza un mínimo local en $x = -1$ y un máximo local en $x = 1$.

Además, como $f(-1) = -1,\ f$ es decreciente en $(-\infty,-1],\ f$ es creciente en $[-1,1],$ y $f(x) > 0$ cuando $x > 0,$ se cumple que $x = -1$ es un minimizador global.

Igualmente, como $f(1) = 1,\ f$ es creciente en $[-1,1],\ f$ es decreciente en $[1,\infty),$ y $f(x) < 0$ cuando $x < 0,$ se cumple que $x = 1$ es un maximizador global.

b) Como $f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)4x(1+x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1)-4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x(x^2+1+2(1-x^2))}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$, se cumple que:

1) $f''(x) > 0$ cuando $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty),$ o sea, cuando f es convexa.

2) $f''(x) < 0$ cuando $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}),$ o sea, cuando f es cóncava.

Por lo tanto, los puntos de inflexión son $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$.

c) Si queremos hallar los puntos de corte de la gráfica de $y = f(x)$ con los de la recta $y = \frac{x}{3}$, obtenemos lo siguiente:

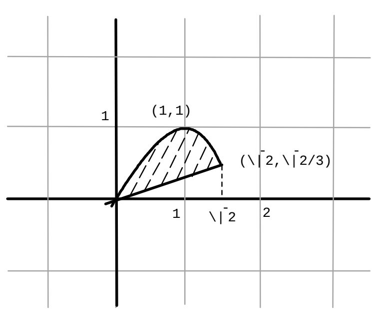
$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow [x = 0$ o, si $x \neq 0, x^2+1 = 3] \Leftrightarrow [x = 0, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}]$.

Por lo tanto, se cumple que $A = \{(x,y) : \frac{x}{3} \leq y \leq f(x), 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$, teniendo en cuenta que:

1) $x > \sqrt{2} \Rightarrow f(x) < \frac{x}{3}$ (pues, por ejemplo, $f(3) = \frac{3}{10} < \frac{3}{3}$)

2) $0 < x < \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{3} < f(x)$ (pues, por ejemplo, $\frac{1}{3} < f(1) = \frac{1}{2}$).

Luego el conjunto A, comprendido entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = \sqrt{2},$ tendrá esta forma:



Por lo tanto, teniendo en cuenta que f es creciente en $[0,1]$ y decreciente a partir de $x = 1,$ se cumple que:

1) maximales (A)=$\{(x,y) : y = \frac{x}{x^2+1}, 1 \leq x \leq \sqrt{2}\},$ luego no existe máximo.

2) {minimales (A)}={mínimo(A)}={(0,0)}.

3. **Dada la función definida por** $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si \quad x < -1 \\ e^{-x^2} & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{6}{x^2-5x+6} & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de f .
b) Estudiar la derivabilidad de f .

1 punto

a) En primer lugar f no es continua en los puntos x=2, x=3, pues en dichos puntos se anula el denominador de la fracción y, por tanto, la función f no está definida.
Veamos que sucede en los puntos x=-1,x=0.
1) Como $\lim_{x \to -1^-} f(x) = e^{-1} = f(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$, f es continua en el punto $x = -1$.
2) Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, , f es continua en el punto $x = 0$.
Por lo tanto, f es continua en todos los puntos excepto en los puntos $2, 3$.
.
b) Por la parte anterior, f no es derivable en los puntos $2, 3$.
Por otra parte, el único punto, aparte de los anteriores, donde f podría ser no derivable es en los puntos $x = -1, x = 0$. Veamos que sucede ahí.
$D_{-}f(-1) = \lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} (-\frac{1}{x^2})e^{\frac{1}{x}} = -e^{-1}$
(la primera identidad anterior es cierta por ser f continua en dicho punto)
$D_{+}f(-1) = -2xe^{-x^2}$ (en $x = -1$) $= 2e^{-1}$.
Por lo tanto, f no es derivable en el punto $x = -1$.
$D_{-}f(0) = -2xe^{-x^2}(en\ x = 0) = 0$.
$D_{+}f(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 6\frac{-(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$
(la primera identidad siendo cierta por ser f continua en dicho punto)
Por lo tanto, f tampoco es derivable en el punto $x = 0$.
En definitiva, f es derivable en todos los puntos excepto en $-1, 0, 2, 3$.

4. **Sea** $y = f(x)$ **la función definida de manera implícita mediante la ecuación** $e^{x-y} + 2x = 3$ **en un entorno del punto** $(1,1)$**. Se pide:**

a) Hallar, mediante $f'(1)$, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1,1)$.

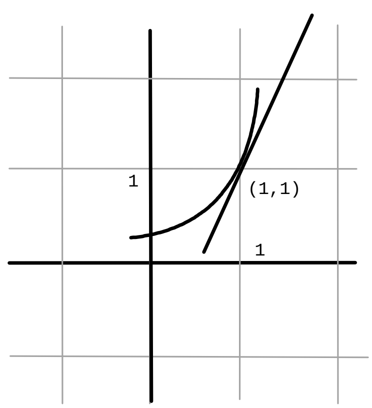
b) Hallar, mediante $f''(1)$, el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en el punto $a = 1$.

c) Dibujar aproximadamente la gráfica de f en un entorno del punto $(1,1)$, con la información obtenida en los apartados anteriores.

1,5 puntos

---

a) Derivando la ecuación, se obtiene:
$(1 - y')e^{x-y} + 2 = 0.$ Sustituyendo x=1,y=1, se obtiene:
$(1 - y') + 2 = 0 \Rightarrow y' = f'(1) = 3.$
Luego la recta pedida es: $y - 1 = 3(x - 1)$
.
b) Derivando la ecuación obtenida en la parte a), se obtiene:
$(-y'')e^{x-y} + (1 - y')^2 e^{x-y} = 0.$ Sustituyendo x=1,y=1, y'=3, se obtiene:
$-y'' + 4 = 0 \Rightarrow y'' = f''(1) = 4.$
Luego el polinomio pedido es: $P(x) = 1 + 3(x - 1) + 2(x - 1)^2.$
.
c) Como la función f cumple:
1) $f(1) = 1$
2) La recta tangente en dicho punto de la gráfica es $y - 1 = 3(x - 1)$
3) La función es convexa cerca del punto $x = 1$, pues $f''(1) = 4$
entonces, la gráfica de f en un entorno del punto $(1,1)$ será, aproximadamente, así:



5.
a) Enunciar el teorema de Bolzano (de los ceros).
b) Discutir, según los valores de C, cuando la ecuación $6x^5 + e^{2x} + C = 0$ tiene al menos una solución, y si dicha solución es única.
1 punto

---

a)
b) Definamos $f(x) = 6x^5 + e^{2x} + C,$ continua en todo punto. Entonces, como
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + 0 + C = -\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty + \infty + C = \infty,$
basta elegir valores a, b que cumplan: $f(a) < 0,\ f(b) > 0.$
Y ahora, por el teorema de los ceros, existe un valor c, $a < c < b,$ de forma que
$f(c) = 6c^5 + e^{2c} + C = 0.$
Hemos visto, por lo tanto, que existe una solución a dicha ecuación para cualquier valor de C.
Veamos a continuación que dicha solución es única. Para ello calculemos la derivada de f.
$f'(x) = 30x^4 + 2e^{2x} > 0,$ para cualquier x.
Luego la función f es creciente y la solución hallada anteriormente es única, pues una función creciente solo puede cortar en un único punto a la recta horizontal y=0.

6. **Sea** $C(x) = 100 + 20x + x^2$ **la función de costes de una empresa monopolista, donde x** $\geqslant 0$ **es el número de unidades producidas de cierta mercancía, y cuya función inversa de demanda (o precio por unidad) es** $p(x) = a - x$**, donde** $a > 10$ **es un parámetro real que determina la demanda máxima. Se pide:**

a) Determinar la cantidad x que minimiza el coste medio (o por unidad).

b) Discutir, según los valores de a, la cantidad x que maximiza la función de beneficio. Sugerencia: téngase en cuenta el dominio de dicha función.

c) Si a es tal que la producción x que minimiza el coste medio coincide con la cantidad que maximiza el beneficio, ¿cual es el beneficio por unidad correspondiente a dicha producción?

1'5 puntos

a) La función de coste medio $C_{med}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{100}{x} + 20 + x$ es una función convexa, pues $C''_{med}(x) = (\frac{C(x)}{x})'' = \frac{200}{x^3}$, luego el mínimo se alcanzará en aquel punto donde se anule la derivada, si dicho punto se encuentra dentro de su dominio, es decir, en $[0, a]$. Esto es, cuando $C'_{med}(x) = (\frac{C(x)}{x})' = -\frac{100}{x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Por tanto, el coste medio mínimo se alcanza con esa producción.

.

b) Consideremos $B(x) = (a - x)x - (100 + 20x + x^2)$, como si su dominio fuera todo $\mathbb{R}$. Entonces, como $B'(x) = a - 20 - 4x, B(x)$ es creciente en $(-\infty, \frac{a-20}{4}]$ y decreciente en $[\frac{a-20}{4}, \infty)$.

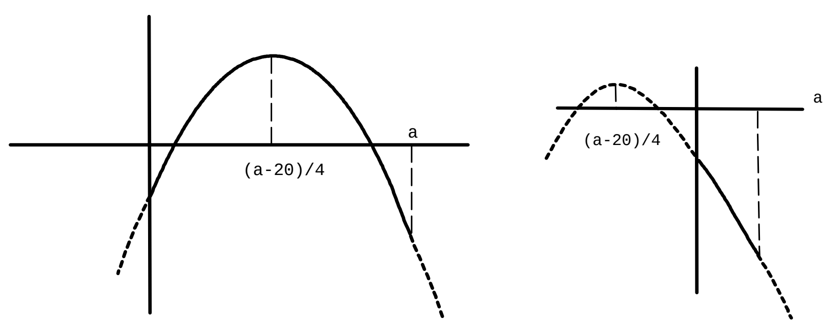
Sin embargo, debemos tener en cuenta que el dominio con sentido económico de $B(x)$ es $[0, a]$, por lo que debemos considerar dos casos:

1) $\frac{a-20}{4} < 0$ o, equivalentemente, $a < 20$. En este caso, el máximo de $B(x)$ se alcanzará en el punto $x = 0$, y no en $\frac{a-20}{4}$, pues no tiene sentido una producción negativa.

2) $0 \leq \frac{a-20}{4} \leq a$ o, equivalentemente, $a \geqslant 20$. En este caso, el máximo de $B(x)$ se alcanzará en el punto $x = \frac{a-20}{4}$.

3) el caso $a < \frac{a-20}{4}$ es imposible. Si se diera este caso, el máximo se alcanzaría en $x = a$ y no en $x = \frac{a-20}{4}$, que sería una producción superior a la permitida, o sea, a.

Un dibujo de los casos 1) y 2) nos aclarará la situación.



.

c) Producción que minimiza el coste medio= 10. Producción que maximiza el beneficio= $\frac{a-20}{4}$ (cuando $a \geqslant 20$).

Piénsese que el caso $a < 20$ podemos desecharlo, ya que entonces tendríamos que la produccion que maximiza el beneficio sería 0, que nunca podría ser igual a 10. Entonces, dichas producciones coinciden cuando $10 = \frac{a-20}{4} \Leftrightarrow a = 60$.

Luego el beneficio por unidad correspondiente a dicha producción será:

$\frac{B(10)}{10} = p(10) - C_{med}(10) = 50 - (10 + 20 + 10) = 10$.

7. **Dada** $f(x) = \sqrt{x}$, **se pide:**

a) Calcular aproximadamente, mediante la ecuación de la recta tangente a dicha función en el punto de abscisa $x_0 = 1$, el valor de $\sqrt{1'1}$.

b) Hallar el área del recinto que limitan la gráfica de $f(x)$, la recta tangente calculada en la parte a) y el eje vertical (o de ordenadas).

1 punto

a) Como $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$; y, al ser $f(1) = 1$, resulta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de dicha función en el punto $(1,1)$ es:

$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$.

Por lo tanto $f(1'1)$ es, aproximadamente (utilizando la recta tangente) igual a

$1 + \frac{1}{2}(1'1 - 1) = 1'05$.

.

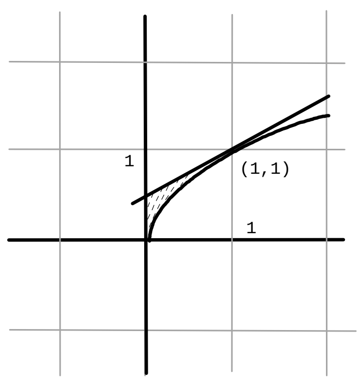
Como la función $f(x) = \sqrt{x}$ es cóncava, la recta tangente queda por encima de la gráfica de $f(x)$ en todos los puntos.

Por lo tanto, el área del recinto cerrado será:

Área$=\int_0^1 (1 + \frac{1}{2}(x-1) - \sqrt{x})dx = \int_0^1 (\frac{1}{2}(x+1) - x^{\frac{1}{2}})dx = [\frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^1 =$

$= 1 - \frac{2}{3} - (\frac{1}{4} - 0) = \frac{1}{12}$.

La figura es, aproximadamente, así:



8. **Dadas las funciones** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$,**se pide**:

a) Calcular la expresión algebraica de de todas las primitivas de $f(x)$.

b) Derivar la función $A(x) = \int_x^{x^3} g(t)dt$.

c) Considera las funciones $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ y $G(x) = \int_1^x g(t)dt$, cuando $1 < x$.

¿Cual de esas dos funciones, $F(x)$ o $G(x)$, es mayor?

Sugerencia para b) y c): no se debe intentar calcular una primitiva de $g(x)$.

1'5 puntos

---

a) $\int f(x)dx = \int (x^2-1)(x+1)^{-\frac{1}{2}}dx =$ (haciendo el cambio de variable $x+1 = t$)=

$= \int [(t-1)^2-1]t^{-\frac{1}{2}}dt = \int (t^2-2t)t^{-\frac{1}{2}}dt = \int t^{\frac{3}{2}}dt - 2\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} + C =$

Y ahora, deshaciendo el cambio de variable, nos queda:

$= \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

.

b) $A'(x) = g(x^3).3x^2 - g(x).1 = \dfrac{(x^3-1)}{\sqrt{x^6+1}}.3x^2 - \dfrac{(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}.$

.

c) Puede comprobarse que $g(t)$ es menor que $f(t)$, pues el numerador de $g(t)$ menor que el de $f(t)$,

mientras que el denominador de $g(t)$ es mayor que el de $f(t)$, cuando $t > 1$. O, en otras palabras:

$g(t) = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}} < \dfrac{t^2-1}{\sqrt{t+1}} = f(t) \Leftrightarrow (t-1)\sqrt{t+1} < (t^2-1)\sqrt{t^2+1}.$

Y ahora, simplificando en ambos miembros de la desigualdad $t-1 > 0$, esta última se cumple pues:

$[0 < \sqrt{t+1} < \sqrt{t^2+1}, 0 < 1 < t+1] \Rightarrow \sqrt{t+1} < (t+1)\sqrt{t^2+1}.$

Por lo tanto, como $g(t) < f(t)$ cuando $1 < t < x$, se cumple que:

$G(x) = \int_1^x g(t)dt < \int_1^x f(t)dt = F(x)$, cuando $1 < x$.