Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos							

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **24 de Junio de 2011**

Duración del examen: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

1. Sea la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ **. Se pide:**

a) Hallar el dominio, intervalos de crecimiento/decrecimiento y máximos y mínimos, tanto globales como locales, de f.

b) Calcular las asíntotas, hallar la imagen y representar la gráfica de la función.

1 punto

---

a) El dominio de la función anterior es el intervalo $(0,\infty)$.

Puesto que la derivada de la función es:

$f\,'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, el signo de la derivada coincide con $1-\ln x$, luego se deduce que

1) f creciente en el intervalo $(0,e]$, pues $1-\ln x > 0 \Longleftrightarrow \ln x < 1 \Longleftrightarrow x < e$; y

2) f decreciente en el intervalo $[e,\infty)$, pues $1-\ln x < 0 \Longleftrightarrow \ln x > 1 \Longleftrightarrow x > e$.

Por lo tanto, la función alcanza un máximo relativo y global en el punto e de valor $f(e) = \dfrac{1}{e}$.

b) Por lo que respecta a las asíntotas, como la función es continua en su dominio, solo puede tener asíntotas en 0 y en ∞.

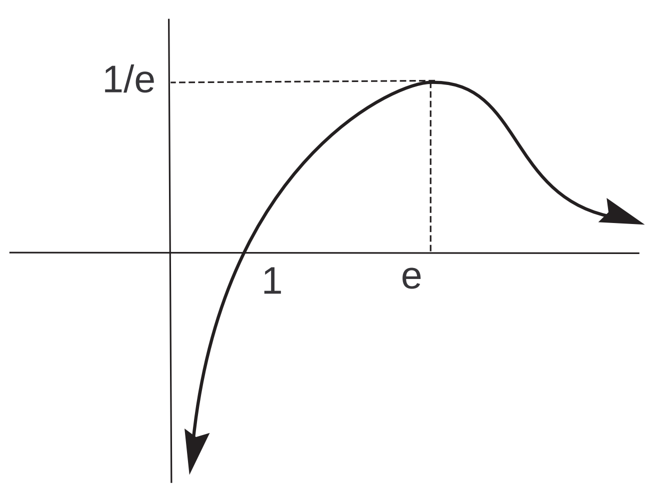
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$, luego f tiene una asíntota vertical en $x=0$; y

$\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$ =(por L'Hopital)= $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$, luego f tiene una asíntotal horizontal en $y=0$.

En cuanto a la imagen de la función, como es continua en su dominio, creciente a la izquierda de e, decreciente a la derecha de e y tiene asíntota vertical en 0^+,

su imagen será el intervalo $(-\infty, f(e)] = (-\infty, \dfrac{1}{e}]$.

Por lo tanto, la gráfica de f será. aproximadamente, así:



2. Sea $y = f(x)$ la función definida de manera implícita mediante la ecuación $xy^3 + 2x^2y = 3$, cerca del punto $x = 1, y = 1$. Se pide:

a) Hallar la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 1, y = 1$.

b) Calcular aproximadamente, utilizando la ecuación de la recta tangente hallada anteriormente, los valores $f(0'9)$ y $f(1'2)$.

1 punto

---

a) En primer lugar, derivamos la ecuación que define la función, y obtenemos que:
$y^3 + 3xy^2y' + 4xy + 2x^2y' = 0$.
Sustituyendo en la ecuación anterior el punto $x = 1, y = 1$ obtenemos:
$1 + 3y' + 4 + 2y' = 0$, luego de ahí deducimos que $y' = -1$.
Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 1, y = 1$ será:
$y = 1 + (-1)(x - 1)$ o, en otras palabras, $y = -x + 2$.

b) Obviamente, los valores aproximados de la función en esos puntos, próximos a $x = 1$, serán:
$f(0'9) \approx -0'9 + 2 = 1'1$
$f(1'2) \approx -1'2 + 2 = 0'8$

3. Una empresa vende x unidades de un producto al precio unitario de $p(x) = 100 - 0,1x$. Su coste de producción es $C(x) = 30x + C_0$ siendo C_0 los costes fijos.

a) Si a lo sumo la empresa puede producir 300 unidades de ese producto en un período determinado, ¿cual sería el precio unitario que maximiza el beneficio total?

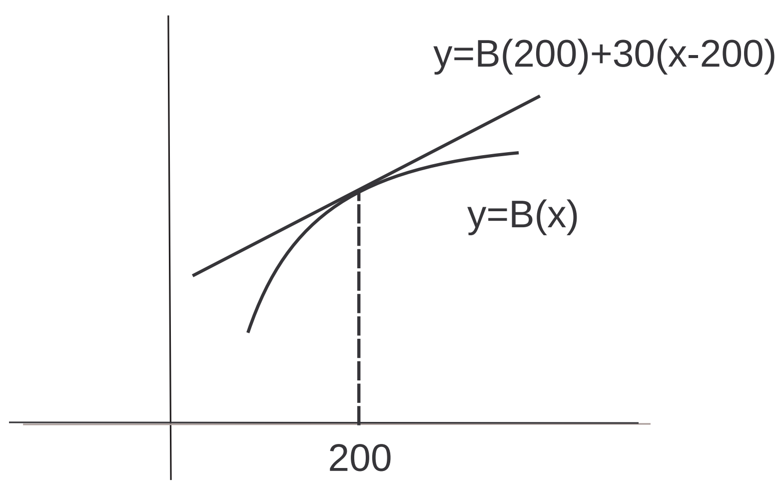
b) Supongamos que la empresa produjo, en el período anterior, 200 unidades, y que puede aumentar su producción, reducirla o mantenerla constante.
Por su parte, el gobierno cree que dicha empresa es contaminante, con lo cual ha decidido imponer una tasa de 30 euros por cada unidad adicional de producción y, por el mismo motivo, conceder una subvención de 30 euros por cada unidad menos de producción.
¿Qué debería hacer la empresa, si desea maximizar sus beneficios?
Sugerencia: comprobar que la función de beneficios es cóncava y que el beneficio marginal en $x = 200$ es 30.

1 punto

---

a) La función de beneficios es $B(x) = (100 - 0,1x)x - 30x - C_0 = -0,1x^2 + 70x - C_0$.
Dicha función siempre es creciente en su dominio, el intervalo $[0, 300]$,
pues su derivada es $B'(x) = -0,2x + 70 > 0$.
Por tanto, el beneficio máximo se alcanza con una producción $x = 300$ y el precio unitario correspondiente a dicha producción es $p(300) = 100 - 30 = 70$.

b) Como la función de beneficios es cóncava, pues $B"(x) = -0,2 < 0$, la recta tangente a la gráfica de dicha función, en el punto $x = 200$, queda por encima de la gráfica de la función de beneficios, luego obtenemos la siguiente desigualdad:
$B(x) < B(200) + 30(x - 200)$ si $x \neq 200$; en otras palabras, llamando $\Delta x = x - 200$:
1) si $x > 200$, $B(200 + \Delta x) - 30\Delta x < B(200)$, luego la empresa no debería aumentar la producción pues, si ésta aumenta, sus beneficios, descontando la tasa de 30 euros por unidad de producción adicional, son menores que si produce 200 unidades.
2) si $x < 200$, $B(200 + \Delta x) + 30(-\Delta x) < B(200)$, luego la empresa no debería reducir la producción pues, si se reduce ésta, sus beneficios, incluso añadiendo los 30 euros de subvención por unidad no producida, son menores que si produce 200 unidades.
Por lo tanto, si la empresa quiere maximizar sus beneficios debería mantener constante la producción.
La situación puede aclararse por el siguiente dibujo:



4. **Sea la función** $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 3 & si \quad x < 0 \\ -2x^3 - x + 2 & si \quad 0 \leq x \end{cases}$ **, y consideramos la función** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$**, donde** $a < b$ **son números enteros. Se pide:**

   a) Determinar el intervalo o intervalos $[a, b]$ de longitud 1 donde está(n) las raíces de f.

   b) Determinar si, en los siguientes intervalos, se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano de los ceros y/o la tesis (o conclusión) del citado teorema: $[-1, 1], [-3, -1], [1, 3]$.

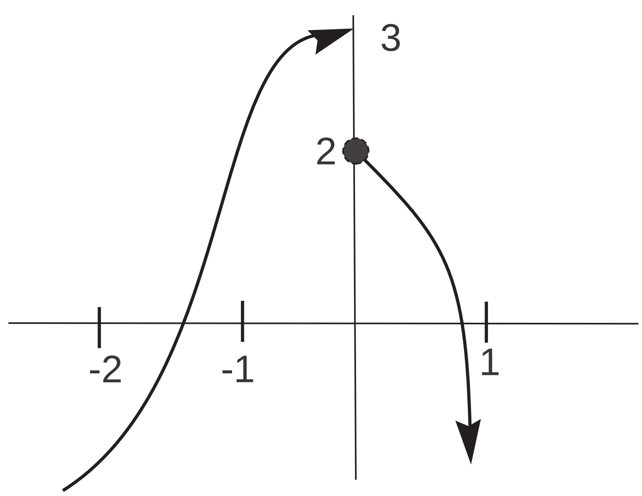
   Sugerencia: representar la función y recordar que los números enteros son: $... - 2, -1, 0, 1, 2, ...$

   1 punto

---

a) La función solo es discontinua en el punto 0 por la izquierda.
Por una parte, es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y, además, cumple:
$f(-2) < 0$, $f(-1) > 0$.
Luego la única raíz negativa de f tiene que estar en el intervalo $[-2, -1]$.
Por otra parte, es decreciente en el intervalo $[0, \infty)$ y, además, cumple:
$f(0) > 0$, $f(1) < 0$.
Luego la única raíz positiva de f tiene que estar en el intervalo $[0, 1]$.
Luego los intervalos de extremos enteros de longitud 1 que contienen las raíces son $[-2, -1]$ y $[0, 1]$.

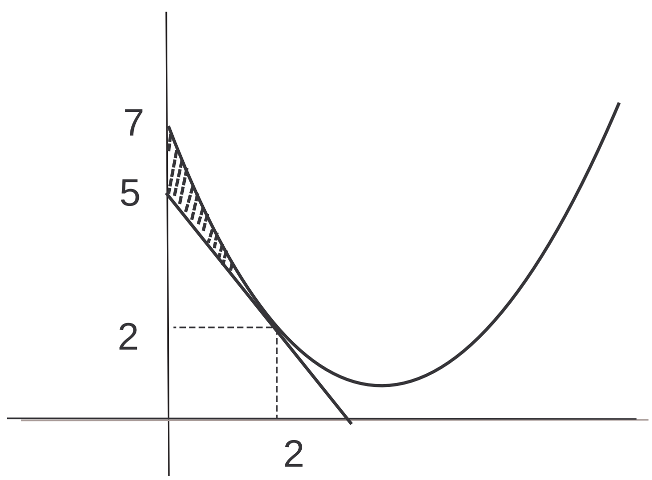
b) En el primer caso, no se cumplen las hipótesis pues f no es continua en dicho intervalo, aunque sí se cumple que tiene una raíz en el intervalo citado.
En el segundo caso, sí se cumplen las hipótesis, pues f es continua en dicho intervalo y cambia de signo en los extremos, luego se cumple la conclusión.
En el tercer caso, no se cumplen las hipótesis pues f no cambia de signo en dicho intervalo, y tampoco se cumple que f tiene una raíz en el intervalo citado.
Un vistazo a la gráfica de la función ayudará a entender la situación.



5. **Sea el conjunto A limitado por la gráfica de la función $f(x) = 0,5x^2 - 3,5x + 7$, la recta tangente a dicha función en el punto $x = 2$, y el eje vertical. Se pide:**
   a) Dibujar el conjunto A y hallar los maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si existen.
   b) Calcular el área del recinto anterior.
   Sugerencia: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.
   1 punto

---

a) En primer lugar, hallamos la ecuación de la recta tangente.
Como $f(2) = 2 - 7 + 7 = 2$, $f\,'(x) = x - 3,5 \Longrightarrow f\,'(2) = -1,5$, se deduce que la recta tangente r pedida tiene de ecuación: $y = g(x) = 2 - 1,5(x-2) = 5 - 1,5x$.
A continuación, hallaremos los puntos de corte tanto de la función como de su recta tangente con el eje vertical: $f(0) = 7, g(0) = 5$.
Finalmente, observando que la función es convexa, pues $f"(x) = 1 > 0$ deducimos que la recta tangente queda siempre por debajo de la gráfica de la función.
Por lo tanto, el conjunto A es, aproximadamente, así:



Por lo tanto tenemos que:
Maximales(A)= parábola desde $x = 0$ hasta $x = 2$
Minimales(A)= recta tangente desde $x = 0$ hasta $x = 2$.
Luego no hay ni máximo ni mínimo.
(Observación ¡el punto $(2, 2)$ es a la vez maximal y minimal!)

b) Como la recta tangente queda siempre por debajo de la gráfica de la función, el área solicitada es:
$\int_0^2 [(0,5x^2 - 3,5x + 7) - (5 - 1,5x)]dx = \int_0^2 (0,5x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{0,5x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_0^2 =$
$= \frac{4}{3} - 4 + 4 = \frac{4}{3}$ unids área.

6. **Dada la función** $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x}$**, definida para** $x \in [1, \infty)$**, se pide:**

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $F(x)$, primitiva de $f(x)$, de forma que $F(1) = C$.

b) Determinar C de forma que $F(x)$ tenga como recta tangente al eje horizontal.

Sugerencia: dibujar la gráfica de $F(x)$ cuando esta función tenga como recta tangente al eje horizontal.

1 punto

---

a) Como $F'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x}$, se deduce que, para cualquier primitiva F de f se obtiene que:

$F(x)$ creciente $\Longleftrightarrow F'(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > e$

$F(x)$ decreciente $\Longleftrightarrow F'(x) < 0 \Longleftrightarrow \ln x - 1 < 0 \Longleftrightarrow 1 < x < e$.

Por otro lado, como $\int \frac{\ln x - 1}{x} = \int \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x} = \dfrac{(\ln x)^2}{2} - \ln x$, se deduce que $F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} - \ln x + C$.

b) Como $F'(x) = f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$, se cumple que:

$F'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 1 \Longleftrightarrow x = e$; y ahora, para que el eje horizontal sea tangente a dicha función $F(x)$, hará falta que:

$F(e) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{(\ln e)^2}{2} - \ln e + C = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} - 1 + C = 0 \Longleftrightarrow C = \frac{1}{2}$.

Por tanto, la gráfica de F tiene una forma así: