El Modelo Probit y el Modelo Logit

Microeconomía Cuantitativa

R. Mora

Department of Economics
Universidad Carlos III de Madrid

Esquema

1. Motivación: el modelo de participación laboral
2. Estimación de $\Pr(work = 1|x)$
3. El Modelo Probit y el Modelo Logit

La decisión Consumo-Ahorro

Función de utilidad

- $U = U(C, L)$
- C: consumo
- L: ocio

- Consumo: $U_C = \left.\frac{\partial U}{\partial C}\right|_L > 0$: más consumo proporciona más utilidad...
  - $\left.\frac{\partial U_C}{\partial C}\right|_L < 0$: pero a un ritmo decreciente
- Ocio: $U_L = \left.\frac{\partial U}{\partial L}\right|_C > 0$: más ocio proporciona más utilidad...
  - $\left.\frac{\partial U_L}{\partial L}\right|_C < 0$: a un ritmo decreciente

£Por cuánto puedo reducir mi consumo sin perder utilidad si aumento mi ocio?

La Relación Marginal del Consumo:

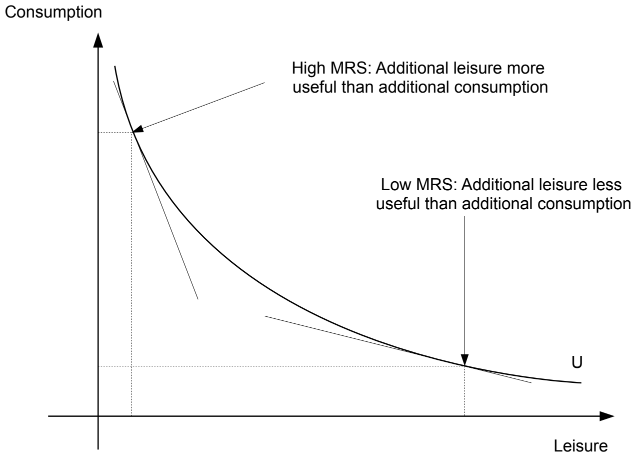
- $MRS = \left.\frac{\partial C}{\partial L}\right|_U = -\frac{U_L}{U_C}$

- La *MRS* da el valor (subjetivo) del ocio en términos de consumo.

Cobb-Douglas: $U = C^\alpha L^\beta \rightarrow MRS = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{C}{L}\right)$

- Aumenta con el consumo
- Disminuye con el ocio

Una interpretación gráfica



Restricciones Presupuestarias y Temporales

Restricciones

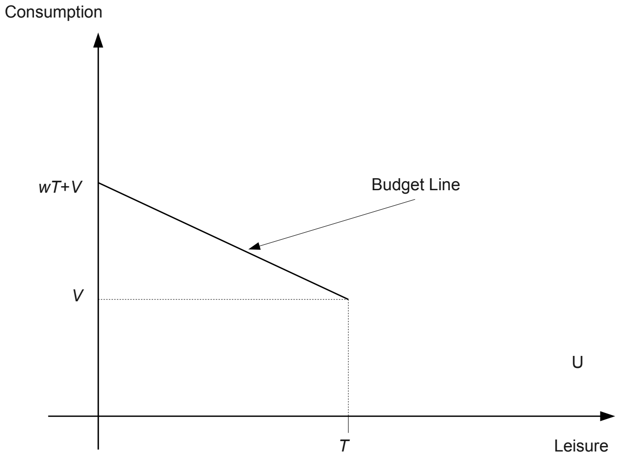
- Temporal: $L + h = T$, h: horas de trabajo, T: total de horas disponibles
- Restricción presupuestaria: $C = w * h + V$, w: salario a la hora, V: renta no-laboral

- Remplazando $h = T - L$ en la restricción presupuestaria, obtenemos

$$C + wL = wT + V$$

donde $wT + V$ (renta por tiempo y no-laboral) iguala el consumo más el coste del ocio (w es el coste de oportunidad del ocio en términos de consumo en el mercado laboral)

La frontera presupuestaria



La asignación óptima

$\max\; U(C,L)$ s.a. $C + wL = wT + V$

- $MRS > w$: una pequeña unidad adicional de ocio aumentará la utilidad
- $MRS < w$: una pequeña unidad adicional de trabajo aumentará la utilidad (mediante un mayor consumo)

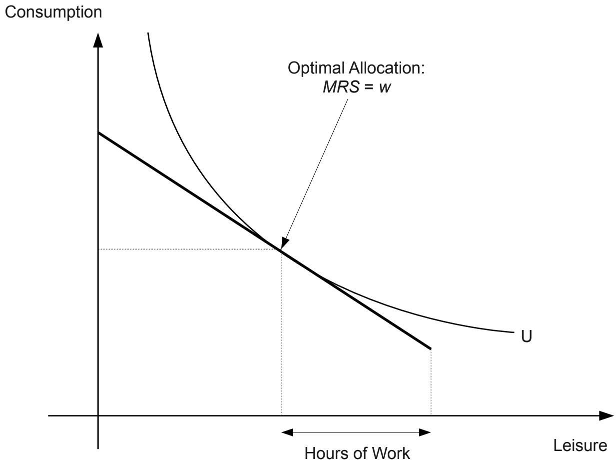
- Solución interna: La valoración individual del ocio en términos de consumo iguala a su valor en el mercado

$$MRS = w \qquad L^* < T \qquad h^* > 0$$

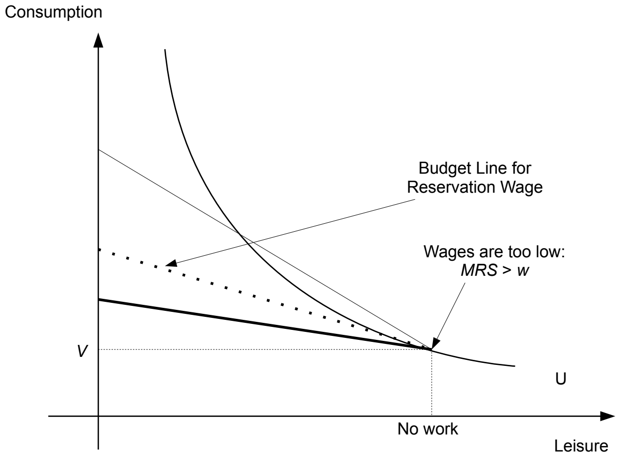
- Solución esquina: el valor del ocio para el individuo es mayor que el valor de su tiempo en el mercado

$$MRS > w \qquad L^* = T \qquad h^* = 0$$

Solución interna



Solución de esquina



El Salario de Reserva

$$w_R = MRS(T, V)$$

Los individuos trabajan si el salario es mayor que su salario de reserva

- Para cualquier $w > w_R$: solución interna ($h^* > 0$)
- Para cualquier $w \leq w_R$: solución esquina ($h^* = 0$)

- Un aumento de los ingresos no laborales no puede aumentar h^* si el ocio es un bien normal.
- Un aumento en el salario de mercado:
  - Aumenta el costo de oportunidad del ocio (efecto sustitución).
  - Amplía la restricción presupuestaria (efecto renta).

La Decisión de Participar

- Asumimos dos opciones
  - Trabajar a tiempo completo ($h^* > 0$ y $work = 1$)
  - Tiempo libre completo (podría incluir el trabajo a tiempo completo en el hogar) ($h^* = 0$ y $work = 1$)

Si $w > w_R$, el individuo trabaja ($work = 1$)

- Podemos pensar en w como el valor de la decisión de trabajar en el mercado.
- Podemos pensar en w_R como el valor de elegir no trabajar en el mercado.

£Qué factores influyen en la probabilidad de participar, $\Pr(work = 1|x)$?

Todo lo que cambie la probabilidad de $(w > w_R)$

- Si efecto substitución> efecto renta, $\uparrow w \rightarrow \uparrow \Pr(work = 1|x)$
  - más educación$\rightarrow \uparrow w \rightarrow \uparrow \Pr(work = 1|x)$
- Si el ocio es normal, $\uparrow V \rightarrow \downarrow \Pr(work = 1|x)$
  - El marido pierde su trabajo $\rightarrow \downarrow V \rightarrow \uparrow \Pr(work = 1|x)$
- $\uparrow MRS \rightarrow \downarrow \Pr(work = 1|x)$:
  - Si la persona necesita mucho tiempo para cuidar de/ayudar a los miembros de su familia (niños, ancianos), su valor personal de ocio será grande (alta MRS).
  - Un niño adicional en la familia puede aumentar MRS para la mujer y hacer que el trabajo de mercado se vuelva no deseable para ella.

Los datos disponibles

- Población: Todas las mujeres en edad de trabajar.
- La variable dependiente es si la mujer trabaja $(work = 1)$ o no $(work = 0)$
- Controles:
  - Características de la familia: Número de niños, la situación laboral del marido, los ingresos no laborales, un familiar sufre una discapacidad a largo plazo ...
  - Características personales: Nivel de educación, experiencia laboral, medidas de capacidad y habilidades, ... (Hay que tener en cuenta que los salarios sólo se observan para aquellas mujeres que decidan participar.)
  - Características del mercado y económicas: las tasas de desempleo de los mercados locales, los salarios locales, ...

$\Pr(work = 1|x) = \beta_0 + x_1\beta_1 + ... + x_k\beta = x'\beta$

- Este es el Modelo Lineal de Probabilidad.
- Como *work* es binaria: $\Pr(work = 1|x) = \mathrm{E}(work|x)$
  - OLS es consistente y la inferencia se puede realizar usando errores estándar robustos a heteroscedasticidad.
- Problema fundamental: El supuesto de linealidad es imposible si x puede tomar cualquier valor (como con *income*) porque la probabilidad debe ser mayor de 0 y menor de 1.
- Problema práctico: el modelo estimado puede predecir probabilidades negativas o probabilidades mayores que 1.
- Solución: Modelos no-lineales.
  - lineales con esquinas: difíciles de estimar, fuera del objetivo de este curso.
  - el modelo de utilidad aleatoria no-lineal (esta es la solución más usual).

El Modelo de Utilidad Aleatoria

Si $w > w_R$ entonces el individuo trabaja en el mercado ($work = 1$)

(Podemos pensar en $w = U_m$ como la utilidad de elegir trabajar en el mercado y en $w_R = U_h$ como la utilidad de elegir no trabajar en el mercado)

- El valor de cada alternativa depende de muchos factores:

$$U_m = x_m' \beta_m + \varepsilon_m$$
$$U_h = x_h' \beta_h + \varepsilon_h$$

donde $\varepsilon_m, \varepsilon_h$ son los efectos en la utilidad no observados por el econometra.

Si $x_m' \beta_m + \varepsilon_m \geq x_h' \beta_h + \varepsilon_h$ entonces $work = 1$

$x_m'\beta_m + \varepsilon_m \geq x_h'\beta_h + \varepsilon_h \rightarrow work = 1$

Supuesto

$$\varepsilon_m - \varepsilon_h = \varepsilon \sim F_\varepsilon$$

donde F_ε es simétrica.

Sea $x'\beta = x_m'\beta_m - x_h'\beta_h$. Entonces

$$\Pr(work = 1|x) = \Pr\left(x'\beta + \varepsilon \geq 0|x\right) = \Pr\left(\varepsilon \geq -\left(x'\beta\right)|x\right)$$

Dada la simetría,

$$\Pr(work = 1|x) = \Pr\left(\varepsilon \leq x'\beta|x\right) = F_\varepsilon\left(x'\beta\right)$$

Probit: $\varepsilon_h, \varepsilon_m \sim N(0, \Sigma)$ tal que $\varepsilon \sim N(0, 1)$

$$\Pr(work = 1|x) = \Phi(x'\beta)$$

donde Φ es la fda de la normal estándar

Logit: $\varepsilon_h, \varepsilon_m$ tal que $\varepsilon \sim$distribución Logística

$$\Pr(work = 1|x) = \frac{exp(x'\beta)}{1+exp(x'\beta)}$$

- En ambos modelos,
  - Las probabilidades se encuentran entre 0 y 1 por construcción.
  - β se puede estimar consistentemente por ML.

Resumen

- La probabilidad de participar en el mercado de trabajo depende de las características personales, las características de la familia, y las características del mercado.
- Las técnicas de regresión de MCO no suelen ser adecuadas porque la esperanza condicional es igual a la probabilidad de que la variable dependiente toma el valor 1 , y las probabilidades deben encontrarse entre 0 y 1 .
- Dos modelos apropiados son los modelos Logit y Probit.
- Ambos pueden estimarse utilizando el estimador por MV.