# Propiedades Asintóticas y Simulación en gretl

## Microeconomía Cuantitativa

R. Mora

Departmento of Economía
Universidad Carlos III de Madrid

# Esquema

# Supuestos clásicos

## Supuestos de Gauss-Markov:

- A1: Linealidad: $y = \beta + \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k + v$
- A2: Muestreo Aleatorio
- A3: independencia de media condicional: $E[y|\mathbf{x}] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k$
- A4: Invertibilidad de la matriz de varianzas y covarianzas
- A5: Homoscedasticidad: $Var[v|\mathbf{x}] = \sigma^2$

## Normalidad

- A6: Normalidad: $y|\mathbf{x} \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k, \sigma^2)$

# Propiedades asintóticas para MCO (1/2)

## Consistencia Bajo Gauss-Markov A1-A4, $plim(\hat{\beta}_j) = \beta_j$

## Normalidad Asintótica (TCL): versión fuerte

- Bajo Gauss-Markov A.1 a A.5:

$$n^{1/2}\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\sigma/a_j} \rightarrow N(0,1) \text{ conforme } n \rightarrow \infty \text{ donde } a_j{}^2 = plim\left(\frac{1}{n}\sum_i r\hat{e}s_{ji}{}^2\right)$$

## Eficiencia asintótica

- Bajo Gauss-Markov A.1 a A5, MCO es asintóticamente eficiente en la clase de estimadores lineales

# Propiedades asintóticas para MCO (2/2)

## Normalidad asintótica (TCL): versión débil

- Bajo A.1 a A.4:

$$n^{1/2}\left(\hat{\beta}_j-\beta_j\right)\rightarrow N\left(0,n*Avar(\hat{\beta}_j)\right)\qquad \text{conforme } n\rightarrow\infty$$

- pero MCO ya no es asintóticamente eficiente

- De los TCLs

$$t=\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{se\left(\hat{\beta}_j\right)}\rightarrow N\left(0,1\right)\ \text{conforme } n\rightarrow\infty$$

donde $plim(se(\hat{\beta}_j))=\sqrt{Avar(\hat{\beta}_j)}$

# Supón que A3 no se cumple

- $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$ pero $cov(x,u) \neq 0$
- MCO es tal que $\hat{cov}_N(x, y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x) = 0 \rightarrow \left\{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right\}$ es consistent con una propiedad falsa

**Ejemplo:** $wages = \beta_0 + \beta_1 education + u$

- aquéllos con mayor habilidad tenderán a tener más educación y mejores salarios: $cov(educ, u) \neq 0$
- $\hat{\beta}_1$ sobreestimaría el rendimiento de la educación por el efectod e la habilidad sobre la educación

# Instrumentos

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

$$cov(x,u) \neq 0$$

- un instrumento $z$ es una variable cuya influencia sobre la variable dependiente es solo a través de un control
  - $z$ es relevante si $cov(x,z) \neq 0$
  - $z$ es exógeno si los controles capturan toda su influencia sobre la dependiente: $cov(u,z) = 0$
- cada control exógeno es un instrumento de sí mismo

# Estimación VI: La idea básica

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \text{ (linealidad)}$$

$$cov(x,u) \neq 0 (x \text{ es endógeno y MCO es inconsistente})$$

$$cov(x,z) \neq 0 (z \text{ es relevante})$$

$$cov(z,u) = 0 (z \text{ es exógeno})$$

$$cov(y,z) = \beta_1 cov(x,z) \Rightarrow \beta_1 = \frac{cov(y,z)}{cov(x,z)}$$

**usamos en la muestra una propiedade que es verdad en la población**

$$\hat{\beta}_1^{IV} = \frac{\hat{cov}(y_i,z_i)}{\hat{cov}(x_i,z_i)}$$

# Estimación VI en el caso general

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 z_1 + \beta_2 y_2 + u$$

$$cov(y_2, u) \neq 0$$

- $z_1$ es un conjunto de $k_1$ variables exógenas: $cov(z_1, u) = 0$
- $y_2$ es un conjunto de $k_2$ variables endógenas, pero hay un instrumento para cada variable endógena, $cov(z_2, u) = 0$
- el sistema de $k_1 + k_2 + 1$ ecuaciones lineales

$$\hat{cov}_N\left(z_{1i}, y_{1i} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 z_{1i} + \hat{\beta}_2 y_{2i}\right) = 0$$
$$\hat{cov}_N\left(z_{2i}, y_{1i} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 z_{1i} + \hat{\beta}_2 y_{2i}\right) = 0$$
$$\hat{mean}_N\left(y_{1i} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 z_{1i} + \hat{\beta}_2 y_{2i}\right) = 0$$

identifica el estimador VI $\left\{\hat{\beta}_0^{IV}, \hat{\beta}_1^{IV}, \hat{\beta}_2^{IV}\right\}$

# Mínimos Cuadrados en 2 Etapas, MC2E

## MC2E explota en la muestra todas las condiciones

$$cov(z_1, u) = 0$$

$$cov(z_2^1, u) = 0$$

$$cov(z_2^2, u) = 0$$

- los pesos de cada condición dependen en la calidad de los instrumentos $z_2^1$ y $z_2^2$.
- VI es un caso particular de MC2E

# Supuestos MC2E

## supuestos Gauss-Markov

- 2SLS1: Linealidad: $y = \beta + \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k + v$
- 2SLS2: Muestreo Aleatorio
- 2SLS3: Exogeneidad: $cov(u, z) = 0$
- 2SLS4: condición de rango: (i) no hay dependencia lineal entre los instrumentos. (ii) La condición de invertibilidad se satisface.
- 2SLS5: Homoscedasticidad: $var[v\,|\mathbf{z}] = \sigma^2$

# Resultados de muestras grandes para MC2E

**Theorem**

*Under 2SLS1-2SLS4, 2SLS is consistent*

**Theorem**

*Bajo 2SLS1-2SLS5, MC2E es consistente, asintóticamente normal, y asintóticamente eficiente dentro de todos los estimadores IV*

**Theorem**

*Bajo 2SLS1-2SLS4, MC2E es consistente y asintóticamente normal*

# Algunas Propiedades de MC2E

- Los errores estándar de VI tienden a ser mayores que los errores estándar de MCO
- cuanta mayor correlación entre $z$ y $x$ menores serán los errores estándar
- la obtención de resultados no significativos puede deberse a un problema de instrumentos "pobres"

# Contrastes con MC2E

- contrastes tipo $t$: bajo $H_0 : \beta_j = 0 \Rightarrow t = \frac{\hat{\beta}_j^{IV}}{se\left(\hat{\beta}_j^{IV}\right)} \stackrel{a}{\rightarrow} N(0,1)$
- es posible construir contrastes de hipótesis lineales múltiples
- test de Hausman de endogeneidad $H_0$: MCO es consistente
- a contraste tipo $t$ para la endogeneidad:
  - Primer paso: regresar $y_2$ sobre $z_1$ y $z_2$ y computar resíduos $\hat{v}$
  - Segundo paso: regresar $y_1$ sobre $z_1$, $y_2$ Y $\hat{v}$. Bajo la nula, el estimador de la pendiente de $\hat{v}$ no debería ser significativo
- El contraste de Sargan contrasta las restricciones de sobreidentificación

# Un ejemplo sencillo: estimación de una demanda

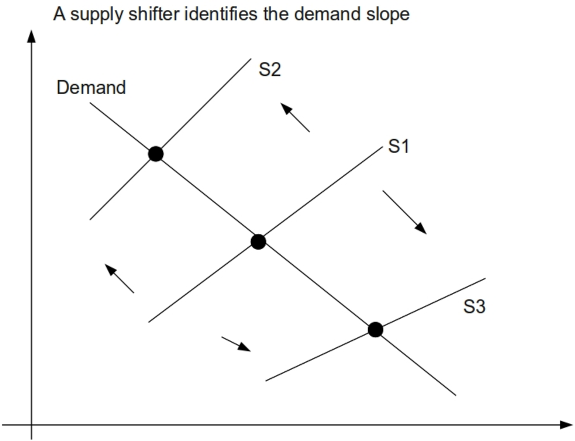
## ecuaciones de oferta y demanda

- oferta: $q = \gamma_0 + \beta^s p + \gamma x^s + u^s$
- demanda: $q = \alpha_0 + \beta^d p + \alpha x^d + u^d$

## En equilibrio, $q = q(x^s, x^d, u^s, u^d)$, $p = p(x^s, x^d, u^s, u^d)$

- $cov(p, u^d) \neq 0$ (MCO es inconsistente)
- "identificación de $\beta^d$ con un "modificador de oferta"
  - $cov(x^s, p) \neq 0$ (relevancia) (porque $p$ es función de $x^s$)
  - $cov(x^s, u^d) = 0$ (exogeneidad) (si no $x^s$ no es un modificador de oferta)

# Una interepretación gráfica



# Un sencillo experimento de Monte Carlo

$log(wages) = 10 + 0.05 * D + u,\ u \sim N(0,1),\ D = 1$ con prob. 0.3

1. extrae $N$ realizaciones de $D$
2. extrae $N$ realizaciones de $u$
3. computa $log(wages)$
4. OLS $log(wages)$ sobre $D$ y guarda $\widehat{\beta}_1^r$
5. replica pasos 1 a 4 $R$ veces
6. examina la distribución empírica de $\widehat{\beta}_1^r$

# ¿Cómo se extraen $N$ realizaciones de $D$ y $u$?

**Un generador de números aleatorios es un mecanismo que genera una secuencia de números, llamados pseudo-aleatorios, que parecen aleatorios**

- hay principalmente dos métodos:
  1. utilizando un fenómeno físico aleatorio (por ejemplo, las manchas solares)
  2. utilizando un ordenador

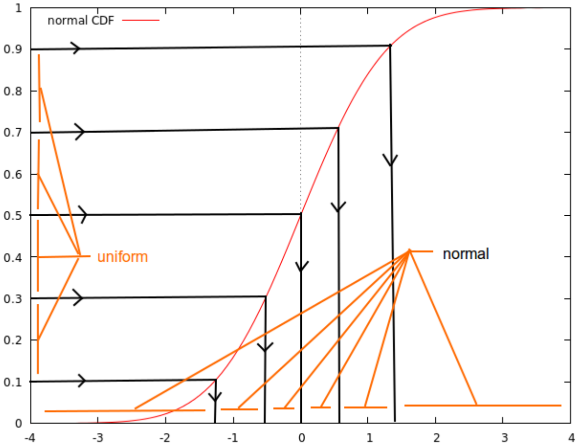
- éste segundo tipo depende de un valor inicial que se conoce como "seed", del inglés "semilla"
- controlar la semilla es útil: permite la replicación de los experimentos

# Números pseudo-aleatorios de la uniforme

- muchos programas informáticos proporcionan números aleatorios de la distribución uniforme U[0,1]
- estos números se pueden utilizar para generar números aleatorios de cualquier distribución
- basta con aplicar sobre ellos la función inversa de la distribución en cuestión

**$x \sim N(\mu, \sigma^2)$**

1. genera la uniforme $U(0,1)$ : $u$
2. genera la normal estándar $N(0,1)$: $z = \Phi^{-1}(u)$
3. computa $x = \mu + \sigma u$


normal CDF
uniform
normal
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

# La Normal Multivariante

- Cualquier normal multivariante

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right)$$

puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + A * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

- $A$ es tal que $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = AA^T$ (Descomposición de Cholesky)
- $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

# Generación de números aleatorios en gretl

## Comandos para generar números aleatorios

- `uniform`: extrae una serie iid de valores de la distribución uniforme
- `normal`: extrae valores de la distribución normal
- `genpois`: extrae valores de la distribución poisson
- `randgen`: extrae de varias distribuciones

Vamos fundamentalmente a utilizar `uniform` y `normal`

# uniform(#a,#b)

- genera valores de la uniforme en el intervalo (a, b)–por defecto, (0,1)

## Ejemplo

- nulldata 500 # genera base de datos con 500 obs.
- set seed 2703 # fija la seed
- genr x = 100 * uniform(-1,1)

# normal($\#\mu$,$\#\sigma$) (1/2)

- genera valores de la normal $N\left(\mu,\sigma^2\right)$–por defecto, la $N(0,1)$

### Ejemplo 1

- genr z = normal(5,2)

### Ejemplo 2: disctribución normal condicional

- genr x1 = 20+5*uniform(-1,1)+1.3*normal()
- genr u = uniform(–1,1)+3*normal()
- genr y = 2 + 3 * x1 + 3*u

# Sample Covariance of Any Two Variables

- Supón que tenemos dos variables aleatorias, $x_1$ y $x_2$, con las siguientes propiedades

$$\left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right] \sim N\left( \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{array} \right] \right)$$

- Supón que estimamos la covarianza para muestras de $N = 5, 50, 500, 5000$
- ¿Podemos "estimar" las propiedades estadísticas de la covarianza muestral para cada tamaño muestral?
- ¿Podemos entender cómo se relacionan las propiedades asintóticas con estas propiedades de muestras pequeñas?

# Estructura

Objetivo: simular una normal multivariante y estimar las propiedades en muestras pequeñas de la covarianza muestral

1. Inicialización: tamaño muestral, semilla, descomposición de Cholesky
2. Dentro del loop:
    1. Simulación
    2. Cálculo de la covarianza para diferentes tamaños muestrales
    3. Grabación de las covarianzas muestrales
3. Recuperación de resultados

# El script en gretl

```
# *************** Before the loop *********************
nulldata 5000
set seed 547
matrix S = {1,0.5;0.5,1}
matrix A = cholesky(S)

#****** open a loop, to be repeated R=500 times **********
loop 500 --progressive --quiet
 genr u1 = normal()
 genr u2 = normal()
 genr x1 = A[1,1]*u1+A[1,2]*u2
 genr x2 = A[2,1]*u1+A[2,2]*u2
 smpl 5 --random
 genr cov5 = cov(x1,x2)
 smpl full
 smpl 50 --random
 genr cov50 = cov(x1,x2)
 smpl full
 smpl 500 --random
 genr cov500 = cov(x1,x2)
 smpl full
 genr cov5000 = cov(x1,x2)
 store myfirstMC.gtd cov5 cov50 cov500 cov5000
endloop

#*********** we open the results ***********************

open myfirstMC.gtd
summary cov* --simple
```

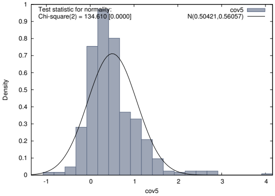
# Los Resultados del Monte Carlo & la LGN

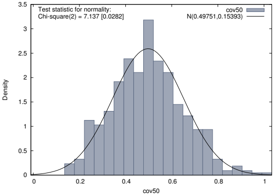
```
Read datafile /home/ricmora/AAOFICIN/CURSOS/MICCUA/materiales/Sesión
3_Tema 1_2_ Propiedades Asintóticas y Simulación en gretl/myfirstMC.gtd
periodicity: 1, maxobs: 500
observations range: 1-500

Listing 5 variables:
  0) const       1) cov5        2) cov50       3) cov500      4) cov5000

? summary cov* --simple

Summary statistics, using the observations 1 - 500

                     Mean         Minimum        Maximum       Std. Dev.
cov5               0.50421       -0.94961         4.0369         0.56057
cov50              0.49751        0.15717         1.0123         0.15393
cov500             0.50006        0.37126        0.63924        0.047988
cov5000            0.50061        0.45830        0.54222        0.015756
```

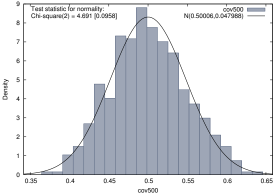
- La media de las replicaciones es muy similar para diferentes tamaños muestrales, y es cercana a la covarianza de la poblacion. ¿Por qué?

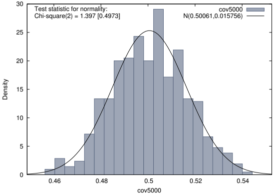
- La desviación típica se vuelve cada vez más pequeña. ¿Por qué?

# Los Resultados del Monte Carlo & el TCL



# Resumen

- bajo supuestos clásicos MCO es consistente y asintóticamente normal
- cuando un control está correlacionado con el error, entonces MCO es inconsistente
- bajo condiciones generales MC2E es consistente y asintóticamente normal
- si queremos estimar la elasticidad precio en una curva de demanda necesitamos un modificador de oferta
- en un algortimo de Monte Carlo necesitamos un generador de números aleatorios. En `gretl` esto es muy sencillo