Solow: Se trata de la acumulación de capital físico

Felix Wellschmied

Universidad Carlos III de Madrid

Crecimiento Económico / Growth Theory

2023

Crecimiento económico moderno

- Hemos visto que en los últimos 150 años, el crecimiento económico en las economías avanzadas puede describirse como un crecimiento exponencial.
- Para entender este fenómeno, así como las grandes diferencias el PIB per cápita entre países, necesitamos una teoría.
- Nuestra teoría se guía por ciertos hechos de datos.
- Estos datos deben ser "universalmente" verdaderos, es decir, relativamente estables en el tiempo.

Hechos de Kaldor

Kaldor (1961) resumió seis hechos sobre los ingresos. Consideraremos los primeros cinco:

1. La productividad laboral crece a un ritmo constante a lo largo del tiempo.
2. El capital por trabajador crece a un ritmo constante en el tiempo.
3. El capital tiene una tasa de rendimiento constante en el tiempo.
4. La relación capital-producción es constante en el tiempo.
5. La proporción de ingresos que va al capital es constante en el tiempo.

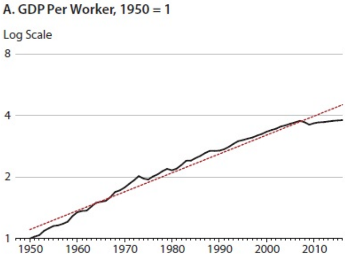
Hechos de Kaldor II

Recientemente, Herrendorf et al. (2019) consideran estos hechos de nuevo, incluyendo datos recientes:

1. En términos generales, los hechos de Kaldor siguen siendo válidos.
2. Sin embargo, algunos momentos de datos muestran cierta variación temporal.
3. Sin embargo, en este curso utilizaremos los hechos de Kaldor como punto de referencia.

Crecimiento constante de la productividad laboral

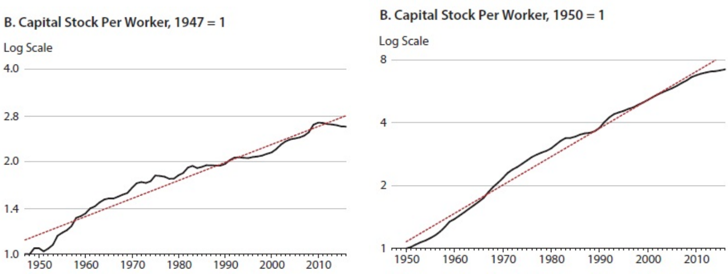
U.S.



UK

- Un crecimiento constante de la productividad laboral es una buena aproximación.
- Sin embargo, observamos una desaceleración después de 1970.

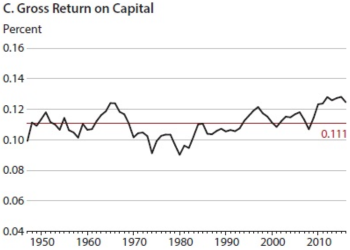
Crecimiento constante del capital por trabajador



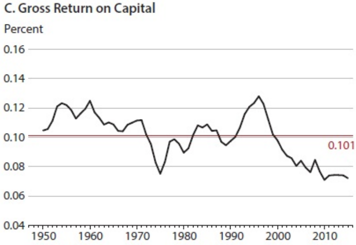
U.S. UK

- Un crecimiento constante del capital por trabajador es una buena aproximación.
- Sin embargo, observamos una desaceleración después de 1970.

Retorno constante al capital



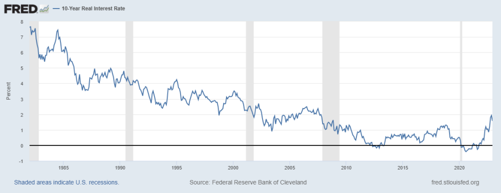
U.S.



UK

- Un rendimiento constante del capital es una buena aproximación.
- Desde la década de 2000, observamos cierta variación temporal que es diferente entre países.

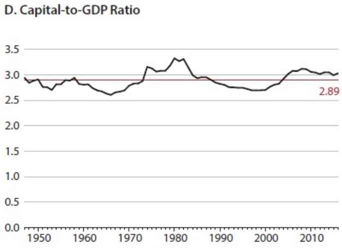
Retorno constante del capital: una advertencia



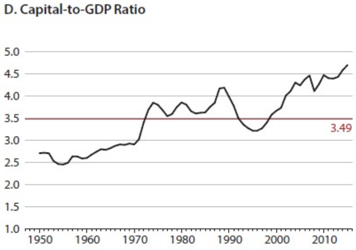
U.S.

- A veces se lee que las tasas de interés reales están cayendo con el tiempo.
- Esta afirmación se basa en los rendimientos de los bonos gubernamentales y en datos de inflación, no en datos de acciones.
- Lo que parece estar sucediendo es que la prima de riesgo está aumentando con el tiempo.

Una relación capital-producción constante



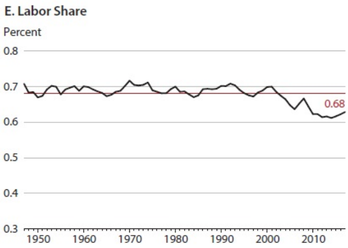
U.S.



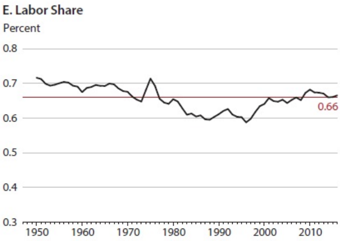
UK

- En Estados Unidos, el capital y la producción crecen aproximadamente al mismo ritmo.
- En el Reino Unido, el capital crece más rápido que la producción.

Una participación constante del capital en los ingresos



U.S.



UK

- En lugar de la participación del capital, consideran que es más fácil medir la participación del trabajo.
- La participación laboral comenzó a caer en Estados Unidos durante la década de 2000. Estaba cayendo en el Reino Unido entre los años 50 y 2000.

Comprender el crecimiento económico moderno

Un primer intento de entender el crecimiento económico moderno

- Solow (1956) presenta un marco sobre cómo entender el fenómeno del crecimiento económico moderno (factores Kaldor). Por ese trabajo, ganó el premio Nobel.
- Es una modelo de economía cerrada donde la producción tiene lugar por el trabajo, el capital y la tecnología.
- Toma el crecimiento tecnológico como exógeno y pone la acumulación de capital físico en el centro del escenario.

Cómo se lleva a cabo la producción

El mundo real

- En una economía moderna, la producción tiene lugar principalmente en empresas que a menudo son corporaciones multinacionales.
- Estas empresas producen miles de bienes y servicios diferentes que dependen de miles de importaciones y crean miles de exportaciones.
- Para la producción, emplean
  - mano de obra de diferentes tipos (educación, edad, sexo...)
  - equipos, estructuras, carreteras, terrenos, materias primas...
- Gran parte de la producción también es realizada por el gobierno.
- La mayor parte del intercambio de bienes y servicios, así como de los factores de la producción, se lleva a cabo en miles de mercados.
- Las personas toman decisiones sobre el consumo hoy frente al futuro.

Abstracciones

El mundo es bastante complicado (más que la Inglaterra medieval) y tendremos que hacer simplificaciones para avanzar en su comprensión:

- Asumimos una economía cerrada.
- Nos abstenemos del gobierno y la tratamos como al sector privado.
- Solo hay un bien de producción.
- Habrá una única función de producción agregada que combine factores de producción en el bien de producción.
- Suponemos que podemos ignorar algunos factores de producción y agregar otros.

Abstracciones: capital y trabajo

Para centrarnos en los factores de producción correctos, nos fijamos en los datos de las cuentas nacionales:

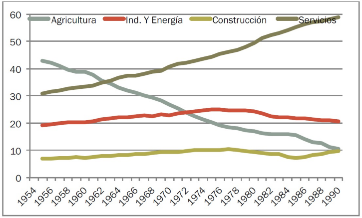
- La compensación laboral es alrededor de 2/3 del ingreso nacional, es decir, es importante. Para lidiar con esto, asumiremos que podemos agregar todos los diferentes tipos de trabajo en un solo uno.
- Del mismo modo, asumimos que podemos agregar todos los tipos de capital físico en solo uno.
- Esto implica que trataremos la tierra como capital físico. Uno puede objetar que la tierra es finita. Sin embargo, los fertilizantes y los edificios altos sugieren lo contrario.
- Incluso para Estados Unidos, un importante productor de petróleo, los ingresos de los recursos naturales son relativamente pequeños. Por lo tanto, los ignoraremos. También se pueden interpretar como capital físico reconociendo que, hasta ahora, no se agotó.

Abstracciones: tecnología

También asumimos una sola medida sobre qué tan bien usamos el capital y el trabajo para producir producción, es decir, tecnología.

- Esto puede estar relacionado con la organización de la empresa, por ejemplo, el estilo de gestión.
- Esto puede estar relacionado con la logística, por ejemplo, la entrega justo a tiempo.
- Esto puede relacionarse con nuevos productos que son mejores que el producto anterior pero no más caros de producir, por ejemplo, un algoritmo informático más rápido.
- De hecho, muchos de los productos que consumimos hoy en día no existían hace 50 años.
- Por lo tanto, pensaremos en las mejoras en A como nuevas *ideas*, o mejores recetas.

¿Más productos o nuevos productos?



El tipo de productos que producimos hoy en día se ve muy diferente del tipo de productos que producimos en 1955.

Abstracciones: mercados

Para entender los mercados, volvemos a mirar las cuentas nacionales:

- La participación en los beneficios del ingreso nacional es relativamente pequeña, como 5%.
- Esto sugiere que los mercados de productos y los mercados de los factores de producción son casi perfectamente competitivos.

Esto tiene dos implicaciones importantes:

- Toda la producción se redistribuye a los hogares en forma de pagos de factores:

$$Y(t) = r(t)K(t) + w(t)L(t). \tag{1}$$

- Los factores de producción ganan sus productos marginales.

Abstracciones: La función de producción agregada

Nuestros supuestos implican que las empresas operan una función de producción agregada que combina trabajo, L, capital, K, y el nivel de tecnología, A, en un solo bien: $Y = F(K, L, A)$. Nuestro modelo debe ser consistente con los hechos de Kaldor. Ahora usamos el hecho de las participaciones de renta constante para averiguar cómo debería ser F:

$$\frac{r(t)K(t)}{Y(t)} = \alpha, \tag{2}$$

$$\frac{w(t)L(t)}{Y(t)} = 1 - \alpha. \tag{3}$$

Dado el supuesto de mercados competitivos, tenemos:

$$\frac{\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} K(t)}{Y(t)} = \alpha, \tag{4}$$

$$\frac{\frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} L(t)}{Y(t)} = 1 - \alpha. \tag{5}$$

Abstracciones: La función de producción agregada II

Esto se aplica, entre otras, a la función de producción de Cobb-Douglas:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha} \tag{6}$$

Tenga en cuenta que el lugar de $A(t)$ en la función de producción no es particularmente importante:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha} = A(t)^{1-\alpha} K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha} = E(t) K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}, \tag{7}$$

con $E(t) = A(t)^{1-\alpha}$. La forma en que lo he escrito arriba hará que las matemáticas sean más fáciles.

Abstracciones: Decisiones del hogar

- Una de las preguntas más importantes en la macroeconomía moderna es cómo los hogares compensan el consumo de hoy con el de mañana.
- El modelo de Solow se abstrae de esto y asume que los hogares ahorran una fracción constante de sus ingresos cada período.
- Como el ingreso agregado es igual a la producción agregada, los ahorros agregados son $S(t) = sY(t)$.

Resolviendo el modelo

Acumulación de capital

El modelo de Solow asume que cada período se deprecia una fracción δ del stock de capital. Trabajando en contra de esto, los hogares invierten $I(t) = S(t)$:

$$\dot{K}(t) = S(t) - \delta K(t) \tag{8}$$

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) \tag{9}$$

$$\dot{K}(t) = sK(t)^{\alpha} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha} - \delta K(t). \tag{10}$$

Dinámica de la población y la tecnología

El modelo de Solow asume que la población y la tecnología crecen a tasas exógenas. Para ser consistente con los hechos de Kaldor sobre la productividad laboral, asume que crecen exponencialmente:

$$L(t) = L(0)\exp(nt) \Rightarrow \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \tag{11}$$

$$A(t) = A(0)\exp(gt) \Rightarrow \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g. \tag{12}$$

Estado estacionario

Como antes, comenzaremos nuestro análisis con el estado estacionario del modelo. Para esto, necesitamos encontrar una variable que tenga un estado estacionario. Resulta que, en el modelo de Solow, estos son producción y capital por trabajador eficiente:

$$\tilde{k}(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \tag{13}$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = \tilde{k}(t)^{\alpha}. \tag{14}$$

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital

$$\dot{K}(t) = sK(t)^{\alpha} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha} - \delta K(t) \tag{15}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} - \delta \tag{16}$$

Necesitamos reescribir el lado izquierdo en términos de trabajadores eficientes. Para esto, necesitamos encontrar una expresión para $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}$.

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital II

Dada la definición:

$$\tilde{k}(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \tag{17}$$

$$\ln \tilde{k} = \ln K(t) - \ln A(t) - \ln L(t). \tag{18}$$

Ahora tome la derivada con respecto al tiempo y use el hecho de que la derivada de una variable en logaritmos con respecto al tiempo es la tasa de crecimiento de esa variable:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{19}$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - g - n \tag{20}$$

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital III

Combinando las ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} + n + g = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} - \delta \tag{21}$$

$$\dot{\tilde{k}}(t) = s\tilde{k}(t)^{\alpha} - (n + g + \delta)\tilde{k}(t). \tag{22}$$

El capital por trabajador eficiente crece con el tiempo debido al ahorro por trabajador eficiente, $s\tilde{k}(t)^{\alpha}$. Se reduce debido al crecimiento de la población, el progreso tecnológico y la depreciación del capital.

Resolviendo para el estado estacionario

Conjetura que un estado estacionario existe, $\dot{\tilde{k}}(t) = 0$:

$$0 = s(\tilde{k}^*)^\alpha - (n + g + \delta)\tilde{k}^* \tag{23}$$

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} . \tag{24}$$

Tenga en cuenta que hemos encontrado de hecho un estado estacionario. Nuestra variable, $\tilde{k}^*$, epende sólo de parámetros invariantes en el tiempo. El capital de estado estacionario por trabajador eficiente aumenta en la tasa de ahorro y disminuye en la tasa de crecimiento de la población, el progreso tecnológico y la tasa de depreciación del capital.

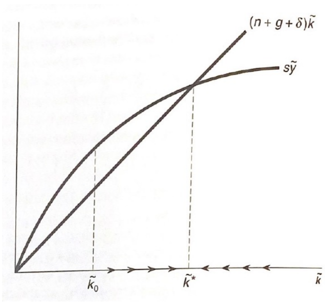
Resolviendo para el estado estacionario II

Una vez que sabemos $\tilde{k}^*$, es sencillo calcular las otras variables endógenas en estado estacionario:

$$\tilde{y}^* = \frac{K(t)^\alpha \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha}}{A(t)L(t)} = (\tilde{k}^*)^\alpha \tag{25}$$

$$\tilde{c}^* = (1-s)\tilde{y}^* = (1-s)(\tilde{k}^*)^\alpha. \tag{26}$$

El estado estacionario gráficamente



- Tenga en cuenta que existe un estado estacionario con $\tilde{k}^* > 0$.
- La clave para esto es que $s(\tilde{k}^*)^\alpha = s\tilde{y}^*$ es cóncavo. Para esto, requerimos rendimientos marginales decrecientes para el capital.

Producción per cápita en estado estacionario

$$\tilde{y}^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{27}$$

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = A(t)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{28}$$

A diferencia del modelo de Malthus, el modelo de Solow puede explicar las diferencias a largo plazo en el ingreso per cápita:

- Un nivel tecnológico más alto aumenta la producción per cápita.
- Una tasa de ahorro más alta aumenta la producción per cápita.
- Una mayor tasa de crecimiento de la población o una tasa de depreciación del capital disminuyen la producción per cápita.

Pagos de factores en estado estacionario

El precio de alquiler del capital viene dado por

$$r(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = \alpha K(t)^{\alpha-1} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha} = \alpha \tilde{k}(t)^{\alpha-1}, \tag{29}$$

lo cual es una constante a largo plazo. Por lo tanto, el modelo de Solow es consistente con el hecho de Kaldor sobre rendimientos constantes al capital.

$$w(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} = (1-\alpha) K(t)^{\alpha} A(t) \left(A(t)L(t)\right)^{-\alpha} = (1-\alpha) A(t) \tilde{k}(t)^{\alpha}, \tag{30}$$

que está creciendo con la tecnología. Kaldor no estudió los salarios, pero este hecho también se basa en los datos.

Crecimiento en estado estacionario

En estado estacionario, por definición, capital (y producción) por trabajador eficiente, $\tilde{k}(t)$, es constante. Esto no significa, sin embargo, que el capital o el capital per cápita, $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$, sean constantes. De hecho, ya sabemos que:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{31}$$

$$\left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}\right)^* = n + g \tag{32}$$

$$\left(\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}\right)^* = g. \tag{33}$$

Es decir, en estado estacionario, el capital per cápita crece al ritmo del progreso tecnológico. Una tasa de crecimiento constante del capital per cápita es uno de los hechos de Kaldor.

Crecimiento en estado estacionario II

Del mismo modo para la producción,

$$\frac{\dot{\tilde{y}}(t)}{\tilde{y}(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{34}$$

$$\left(\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}\right)^{*} = n + g \tag{35}$$

$$\left(\frac{\dot{y}(t)}{y(t)}\right)^{*} = g. \tag{36}$$

Por lo tanto, la producción per cápita en estado estacionario también crece a la tasa de progreso tecnológico. Además, como Y y K crecen a una tasa de $n + g$, su relación es constante que completa los hechos de Kaldor.

Crecimiento en estado estacionario III

Por último, para el consumo,

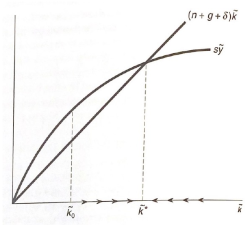
$$\frac{\dot{\tilde{c}}(t)}{\tilde{c}(t)} = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{37}$$

$$\left(\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\right)^* = n + g \tag{38}$$

$$\left(\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\right)^* = g. \tag{39}$$

Por lo tanto, el consumo per cápita en estado estacionario también crece a la tasa de progreso tecnológico. Un estado estacionario en el que todas las variables endógenas crecen al mismo ritmo se conoce como una *trayectoria de crecimiento balanceado*.

Convergencia al estado estacionario



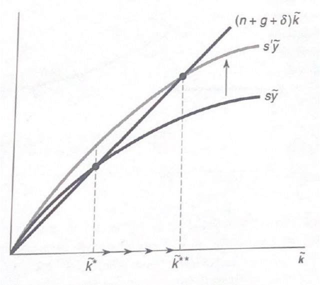
Recordemos la ecuación de acumulación de capital por trabajadora eficiente:

$$\dot{\tilde{k}}(t) = s\tilde{k}(t)^{\alpha} - (n+g+\delta)\tilde{k}(t). \tag{40}$$

$$s\tilde{k}(t)^{\alpha} > (n+g+\delta)\tilde{k}(t) \text{ if } \tilde{k}(t) < \tilde{k}^* \tag{41}$$
$$s\tilde{k}(t)^{\alpha} < (n+g+\delta)\tilde{k}(t) \text{ if } \tilde{k}(t) > \tilde{k}^*. \tag{42}$$

Por lo tanto, convergemos al estado estacionario desde cualquier punto de partida $\tilde{k}(0) > 0$.

Estática comparativa: Un aumento en la tasa de ahorro



Considere un aumento en la tasa de ahorro. Para cualquier nivel de $\tilde{k}(t)$, $s\tilde{y}(t) = s\tilde{k}(t)^\alpha$ aumenta. El nuevo estado estacionario se asocia con un mayor $\tilde{k}^*$ y, por lo tanto, un mayor $\tilde{y}^*$. Se deduce directamente que la producción per cápita también es mayor en el nuevo estado estacionario.

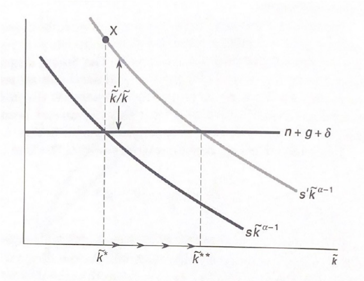
Estática comparativa: Un aumento en la tasa de ahorro II

Tenga en cuenta, en el estado estacionario antiguo y nuevo, $\tilde{y}^*$ son constantes y, por lo tanto, la producción per cápita crece en cada caso a una tasa g. Es decir, la tasa de ahorro cambia el nivel de producción per cápita en estado estacionario, pero no su tasa de crecimiento. Sin embargo, en la ruta de transición al nuevo estado estacionario, $\tilde{y}$ no es constante. Para ver esto, considere nuevamente la ecuación de acumulación de capital

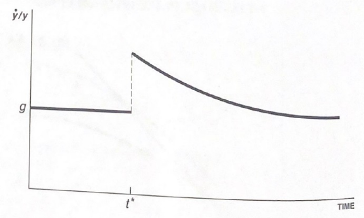
$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} - (n + g + \delta). \tag{43}$$

Durante la transición, $s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} > n + g + \delta$ y, por lo tanto, crece el capital por trabajadora eficiente.

Estática comparativa: Un aumento en la tasa de ahorro III



Nota, $\tilde{k}(t)^{\alpha-1}$ es una función convexa con pendiente descendente. Por lo tanto, la distancia entre $s\tilde{k}(t)^{\alpha-1}$ y $(n+g+\delta)$ es mayor en el primer período del ajuste. Esto es el resultado de la disminución de los rendimientos marginales del capital.

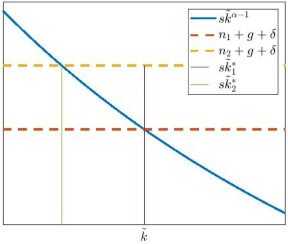


A medida que la economía acumula capital rápidamente inicialmente, la producción per cápita está creciendo rápidamente inicialmente:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g + \frac{\dot{\tilde{y}}(t)}{\tilde{y}(t)} = g + \alpha \frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)}. \tag{44}$$

A medida que la acumulación de capital se desacelera, también lo hace el crecimiento de la producción per cápita.

Estática comparativa: Un aumento en la tasa de crecimiento de la población



El nuevo estado estacionario se asocia con un $\tilde{k}^*$ más bajo y, por lo tanto, un $\tilde{y}^*$ más bajo. Se deduce directamente que la producción per cápita también es menor en el nuevo estado estacionario.

Estática comparativa: Un aumento en la tasa de crecimiento de la población II

Consideremos de nuevo la ecuación de acumulación de capital

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} - (n + g + \delta). \tag{45}$$

Durante la transición, $s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} < n + g + \delta$ y, por lo tanto, el capital por trabajador eficiente se reduce. Como consecuencia, la producción per cápita está creciendo a una tasa inferior a g durante la fase de transición.

La empírica del modelo de Solow

Resultados y predicciones

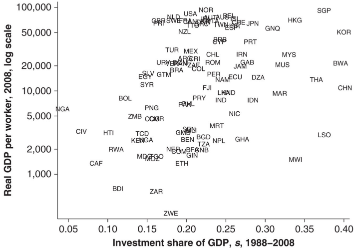
Hemos visto que el modelo de Solow es consistente con todos los hechos de Kaldor. Más allá de eso, hace algunas predicciones clave sobre el nivel de producción por trabajador en todos los países:

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^{*} = A(t)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{46}$$

- La producción per cápita está aumentando en la tasa de ahorro: $s = \frac{I}{Y}$.
- La producción per cápita está disminuyendo en la tasa de crecimiento de la población.
- La producción per cápita está aumentando en productividad (PTF).

PIB per cápita y tasa de ahorro

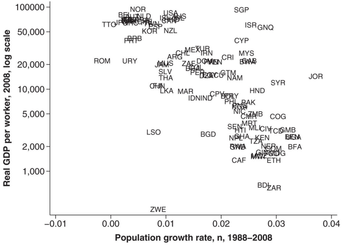
FIGURE 2.6 **GDP PER WORKER VERSUS THE INVESTMENT RATE**



De hecho, encontramos una correlación positiva entre la tasa de inversión y la PIB per cápita.

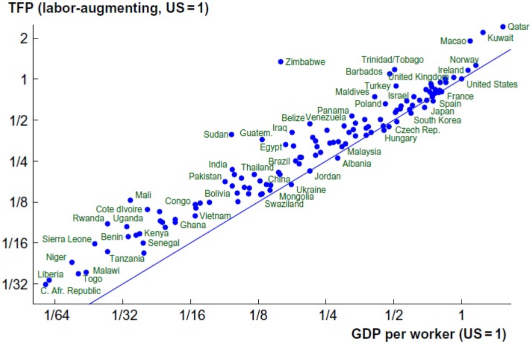
PIB per cápita y tasa de crecimiento de la población

FIGURE 2.7 GDP PER WORKER VERSUS POPULATION GROWTH RATES



De hecho, encontramos una correlación negativa entre la tasa de crecimiento de la población y la PIB per cápita.

PIB per cápita y productividad



De hecho, encontramos una correlación positiva entre la productividad y el PIB per cápita. Tenga en cuenta que los países pobres son "demasiado productivos", es decir, tienen "muy poco" capital.

Una evaluación cuantitativa

En lugar de simplemente mirar cualitativamente los datos, Mankiw et al. (1992) evaluan el rendimiento cuantitativo del modelo. Suponiendo que todos los países están en estado estacionario, parten de:

$$y(t) = A(t)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{47}$$

$$y(t) = A(0)\exp(gt)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{48}$$

$$\ln y(t) = \ln A(0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha}s - \frac{\alpha}{1-\alpha}(n+g+\delta). \tag{49}$$

Suponiendo que $\ln A(0) + gt = \beta_0 + \epsilon$, es decir, el nivel de tecnología es aleatorio entre países, y $g + \delta = 0.05$ esto se puede estimar mediante OLS lineal:

$$\ln y(t) = \beta_0 + \beta_1 s - \beta_2(n + 0.05) + \epsilon(t). \tag{50}$$

Una evaluación cuantitativa II

TABLE I

ESTIMATION OF THE TEXTBOOK SOLOW MODEL

Dependent variable: log GDP per working-age person in 1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	5.48	5.36	7.97
	(1.59)	(1.55)	(2.48)
ln(I/GDP)	1.42	1.31	0.50
	(0.14)	(0.17)	(0.43)
$\ln(n + g + \delta)$	−1.97	−2.01	−0.76
	(0.56)	(0.53)	(0.84)
$\overline{R}^2$	0.59	0.59	0.01

- Las tasas de ahorro y el crecimiento de la población explican casi el 60% en la variación entre países en el PIB per cápita.
- Los coeficientes tienen los signos esperados, y no podemos rechazar $\beta_1 = -\beta_2$.
- Sin embargo, el α implícito de las regresiones es demasiado alto (0.59).

¿Cuánto debemos ahorrar?

Hasta ahora, tomamos la tasa de ahorro como dada. Uno puede preguntarse si hay una tasa de ahorro óptima. Una posibilidad para definir óptimo es la tasa de ahorro que maximiza el consumo a largo plazo por trabajador:

$$\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right)^{*} = (1-s)\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^{*} = (1-s)A(t)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{51}$$

Como la productividad es exógena, esto equivale a maximizar el consumo por trabajador eficiente:

$$\tilde{c}^{*} = (1-s)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{52}$$

La tasa de ahorro resultante se conoce como la regla de oro s_{Gold}.

Regla de oro

Tomando la condición de primer orden de (52):

$$s_{Gold} = \alpha. \tag{53}$$

Intuición: Cuanto más importante es el capital en la función de producción, más debemos ahorrar.

La economía detrás de la regla de oro

En estado estacionario, una alternativa para escribir el problema es:

$$\tilde{c}^* = \tilde{y}^* - (n + g + \delta)\tilde{k}^*. \tag{54}$$

Ahora tome el derivado con respecto al stock de capital en estado estacionario por trabajador eficiente:

$$\alpha(\tilde{k}^*)^{\alpha-1} = n + g + \delta \tag{55}$$

$$PMK = n + g + \delta. \tag{56}$$

La ganancia marginal del ahorro debe ser igual a su costo marginal (la tasa de depreciación efectiva).

¿Estamos ahorrando lo suficiente?

Para evaluar si España tiene una tasa de ahorro consistente con la regla de oro, considere los siguientes datos

1. El coeficiente de producción de capital es 2.75: $k = 2.75y$.
2. La depreciación del capital es del 10 por ciento de la producción anual: $\delta k = 0.1y$.
3. La participación del capital en los ingresos es 30%
4. El crecimiento de la producción es 3%.

¿Estamos ahorrando lo suficiente? II

La combinación de 1 y 2 nos dice que la tasa de depreciación es 3.6%.

Según nuestro modelo, 3 implica $MPK^*k = 0.3y$. Combinando con 1 tenemos $MPK = 0.11$.

Según nuestro modelo, 4 implica $n + g = 0.03$.

Por lo tanto, $MPK > n + g + \delta$, es decir, ahorramos a poco.

¿Podemos racionalizar un PMK alto?

Podemos sacar dos posibles conclusiones de un alto PMK:

1. O bien necesitamos cambiar los incentivos de ahorro. La reforma del sistema de pensiones es un aspecto que los economistas han defendido.
2. O optimizar el consumo a largo plazo por trabajador no es óptimo. Si descontamos el consumo futuro en relación con el consumo actual, la regla de oro no es óptima. Se necesitaría una tasa de descuento anual de más del 4% para explicar los altos rendimientos de capital.

Introducción del capital humano

Por qué el capital humano

Hasta ahora, asumimos que todos los trabajadores son igualmente productivos a través del tiempo y los países. Sin embargo

- el número promedio de años de escolaridad varía sustancialmente dentro de un país a lo largo del tiempo y entre países.
- la calidad de la escolarización varía sustancialmente dentro de un país a lo largo del tiempo y entre países.
- dentro de un país en un momento dado, las diferencias de ingresos entre los grupos de educación son grandes, lo que sugiere que la educación es importante para la productividad.

Producción

Para introducir el capital humano, hacemos un pequeño cambio en la función de producción:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} \left(A(t)H(t)\right)^{1-\alpha} \tag{57}$$

$$H(t) = \exp(\psi\, u)L(t), \tag{58}$$

donde $L(t)$ es la cantidad de trabajo, y $H(t)$ es la cantidad de capital humano total. El capital humano total no solo depende de la cantidad de mano de obra sino también del tiempo invertido en el aprendizaje, u.

Calidad del aprendizaje

Tenga en cuenta que

$$\frac{\partial H(t)}{\partial u} = \psi \exp(\psi\, u) L(t) = \psi H(t) \tag{59}$$

$$\frac{\partial \ln H(t)}{\partial u} = \psi. \tag{60}$$

Es decir, un cambio en u se traduce en ψ por ciento más de capital humano. Una forma de interpretar ψ es pensar en la calidad del sistema educativo durante un tiempo fijo en él.

Estado estacionario

Necesitamos definir de nuevo una variable que tiene un estado estacionario. Volveremos a definir:

$$\tilde{k}(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \tag{61}$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = \tilde{k}(t)^{\alpha} \left(\exp(\psi u)\right)^{1-\alpha} \tag{62}$$

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital

$$\dot{K}(t) = sK(t)^{\alpha} \left(A(t)H(t)\right)^{1-\alpha} - \delta K(t) \tag{63}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} \left(\exp(\psi u)\right)^{1-\alpha} - \delta \tag{64}$$

Necesitamos encontrar de nuevo una expresión para $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}$.

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital II

Tenga en cuenta que

$$\tilde{k} = \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \tag{65}$$

$$\ln \tilde{k} = \ln K(t) - \ln A(t) - \ln L(t) \tag{66}$$

Ahora tomemos la derivada con respecto al tiempo:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{67}$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - g - n \tag{68}$$

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital III

Combinando las ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} + n + g = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1}\left(\exp(\psi u)\right)^{1-\alpha} - \delta \tag{69}$$

$$\dot{\tilde{k}}(t) = s\tilde{k}(t)^{\alpha}\left(\exp(\psi u)\right)^{1-\alpha} - (n + g + \delta)\tilde{k}(t). \tag{70}$$

Tenga en cuenta que este es casi el mismo sistema dinámico que en el modelo sin capital humano. La única diferencia es el término de educación adicional.

Resolviendo para el estado estacionario

Resolviendo para el estado estacionario:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp(\psi u) \tag{71}$$

$$\tilde{y}^* = \tilde{k}(t)^{\alpha} \left(\exp(\psi u)\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \exp(\psi u) \tag{72}$$

$$\tilde{c}^* = (1-s)\tilde{y}^* = (1-s)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \exp(\psi u). \tag{73}$$

Producción per cápita en estado estacionario

Por lo tanto, la producción por trabajador en estado estacionario es:

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^{*} = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)\exp(\psi\, u) \tag{74}$$

La producción per cápita está aumentando en la cantidad de educación. Una fuerza laboral más educada es más productiva y, por lo tanto, permite que cada trabajador produzca más.

Crecimiento en estado estacionario

Podemos preguntar de nuevo sobre la tasa de crecimiento en estado estacionario. Como se supone que la educación es constante, nada cambia realmente:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{75}$$

$$\left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}\right)^* = n + g \tag{76}$$

$$\left(\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}\right)^* = g. \tag{77}$$

Es decir, el capital per cápita (y la producción/consumo per cápita) crece al ritmo del progreso tecnológico.

Dinámica de transición

Ya hemos visto que los cambios en las tasas de crecimiento de la población y las tasas de ahorro pueden tener una rica dinámica de transición para la producción por trabajador. Ahora también podemos analizar los cambios en la educación. En general, la producción por trabajador es:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = \tilde{k}(t)^{\alpha} A(t) \left(\exp(\psi\, u)\right)^{1-\alpha} \tag{78}$$

El aumento del tiempo dedicado a la educación, u, o la calidad de la educación, ψ, tiene un impacto de nivel inicial en la producción por trabajador de $(\exp(\psi\, u))^{1-\alpha}$.

Dinámica de transición II

Además, conduce a una dinámica de transición a través de la acumulación de capital. Recuerde que, en estado estacionario,

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp(\psi u). \tag{79}$$

Al aumentar el capital humano, aumentamos el producto marginal del capital que conduce a una acumulación adicional de capital:

$$\dot{\tilde{k}}(t) = s\tilde{k}(t)^{\alpha} \left(\exp(\psi u)\right)^{1-\alpha} - (n+g+\delta)\tilde{k}(t) > 0. \tag{80}$$

El capital adicional aumenta aún más la producción hasta que hayamos alcanzado el nuevo estado estacionario de capital más alto por trabajador eficiente:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \alpha \frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} + g. \tag{81}$$

Por la misma lógica que antes, la producción (capital) por trabajador crece particularmente rápido inicialmente.

Empírica del modelo de Solow revisada

Mankiw et al. (1992) consideren también el modelo de regresión lineal aumentada donde miden el capital humano por la proporción de personas con educación secundaria:

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^{*} = A(t)\exp(\psi\, u)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{82}$$

$$\ln y(t) = \ln A(0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha}s - \frac{\alpha}{1-\alpha}(n+g+\delta) + \psi\, u \tag{83}$$

$$\ln y(t) = \beta_0 + \beta_1 s + \beta_2(n+0.05) + \beta_3 u + \epsilon(t). \tag{84}$$

Empírica del modelo de Solow revisada II

Dependent variable: log GDP per working-age person in 1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	6.89	7.81	8.63
	(1.17)	(1.19)	(2.19)
ln(I/GDP)	0.69	0.70	0.28
	(0.13)	(0.15)	(0.39)
$\ln(n+g+\delta)$	−1.73	−1.50	−1.07
	(0.41)	(0.40)	(0.75)
ln(SCHOOL)	0.66	0.73	0.76
	(0.07)	(0.10)	(0.29)
$\overline{R}^2$	0.78	0.77	0.24

- Las tres variables juntas explican casi el 80% en la variación entre países en el PIB per cápita.
- Como era de esperar, una mayor escolaridad aumenta la producción per cápita.
- El α implícito es más razonable.

Inconvenientes del modelo de regresión lineal

El enfoque del modelo de regresión lineal tiene varios inconvenientes:

- La endogeneidad de las variables es un problema grave. Los inobservables, como la capacidad de gestión, probablemente estén correlacionados con la educación (y las tasas de ahorro).
- Tenemos que asumir un estado estacionario.
- Nuestras medidas pueden ser bastante imprecisas. En particular, la regresión no controla la calidad de la educación.
- El R^2 no nos dice qué parte de la distribución encaja bien el modelo de regresión.

Contabilidad del desarrollo

La contabilidad del desarrollo es un enfoque alternativo para preguntar qué tan bueno es el modelo de Solow para explicar las diferencias de ingresos entre países. Relaciona los insumos observables con el PIB per cápita a través de la función de producción:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} \left(A(t)H(t)\right)^{1-\alpha} \tag{85}$$

$$Y(t)^{1-\alpha} = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\alpha} \left(A(t)H(t)\right)^{1-\alpha} \tag{86}$$

$$Y(t) = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)H(t) \tag{87}$$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)\exp(\psi u). \tag{88}$$

Tenga en cuenta que cualquier diferencia entre países en s o n, el corazón del modelo de Solow, debe reflejarse en la relación entre la producción y el capital.

Contabilidad del desarrollo II

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t) \exp(\psi u). \tag{89}$$

- Vamos a asumir $\alpha = 0.3$.
- Utilizamos microestimaciones del retorno a la escolaridad para ψ.
- Nota, a diferencia del marco de regresión lineal, ahora fijamos valores para α y ψ en lugar de dejar que la regresión elija los que mejor se ajusten a los datos. Además, no imponemos que todas las economías estén en estado estacionario, es decir, que la función de producción se mantenga dentro y fuera del estado estacionario.

Contabilidad del desarrollo III

Tomando como referencia a los Estados Unidos, podemos preguntar qué factor explica las diferencias en la producción per cápita en relación con los Estados Unidos:

$$\frac{y(t)}{y^{US}(t)} = \frac{\left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\left(\frac{K^{US}(t)}{Y^{US}(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \frac{A(t)}{A^{US}(t)} \exp(\psi(u - u^{US})). \tag{90}$$

Por ejemplo, Estados Unidos tiene alrededor de 11 años de escolaridad, mientras que los países más pobres tienen solo 3. Con un retorno de la escolaridad del 10%, tenemos:

$$\exp(0.1(3 - 11)) = 0.45, \tag{91}$$

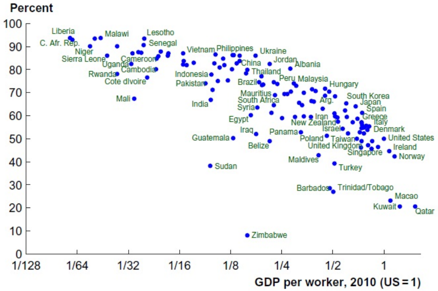
es decir, las diferencias en la educación pueden explicar una producción per cápita 55% menor en los países más pobres.

Contabilidad del desarrollo IV

	GDP per worker, y	Capital/GDP $(K/Y)^{\alpha/(1-\alpha)}$	Human capital, h	TFP	Share due to TFP
United States	1.000	1.000	1.000	1.000	–
Hong Kong	0.854	1.086	0.833	0.944	48.9%
Singapore	0.845	1.105	0.764	1.001	45.8%
France	0.790	1.184	0.840	0.795	55.6%
Germany	0.740	1.078	0.918	0.748	57.0%
United Kingdom	0.733	1.015	0.780	0.925	46.1%
Japan	0.683	1.218	0.903	0.620	63.9%
South Korea	0.598	1.146	0.925	0.564	65.3%
Argentina	0.376	1.109	0.779	0.435	66.5%
Mexico	0.338	0.931	0.760	0.477	59.7%
Botswana	0.236	1.034	0.786	0.291	73.7%
South Africa	0.225	0.877	0.731	0.351	64.6%
Brazil	0.183	1.084	0.676	0.250	74.5%
Thailand	0.154	1.125	0.667	0.206	78.5%
China	0.136	1.137	0.713	0.168	82.9%
Indonesia	0.096	1.014	0.575	0.165	77.9%
India	0.096	0.827	0.533	0.217	67.0%
Kenya	0.037	0.819	0.618	0.073	87.3%
Malawi	0.021	1.107	0.507	0.038	93.6%
Average	0.212	0.979	0.705	0.307	63.8%
1/Average	4.720	1.021	1.418	3.260	69.2%

- La gran mayoría de las diferencias de ingresos se deben a las diferencias de PTF.
- Las relaciones capital/producción son relativamente similares entre los países.

Contabilidad del desarrollo V



- Las diferencias de PTF son importantes para todos los países.
- Las diferencias en la PTF explican casi todas las diferencias de ingresos de los países más pobres.

Contabilidad del desarrollo VI

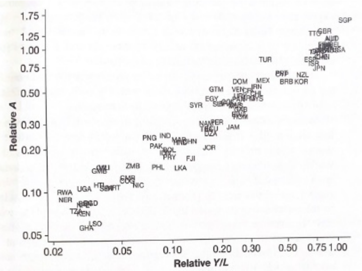
Una forma diferente de ver el mismo punto es reescribir:

$$y(t) = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)\exp(\psi u) \tag{92}$$

$$A(t) = \left(\frac{Y(t)}{K(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{Y(t)}{\exp(\psi u)}, \tag{93}$$

es decir, preguntar qué nivel de tecnología requerimos para explicar la producción per cápita observada. Vamos a expresar esto de nuevo en relación con los EE.UU.

Contabilidad del desarrollo VII



Como era de esperar, existe una fuerte correlación entre el producto per cápita y la PTF inferida, es decir, otros factores explican relativamente poco.

Volviendo a nuestras tres grandes preguntas

1. ¿Por qué somos tan ricos y ellos tan pobres?
   - Diferentes tasas de ahorro, tasas de crecimiento de la población, niveles de educación y niveles de tecnología.
2. ¿Por qué hay milagros de crecimiento?
   - Rápida acumulación de capital físico o aumentos en el capital humano.
3. ¿Cuáles son los motores del crecimiento económico a largo plazo?
   - Progreso tecnológico.

Referencias

HERRENDORF, B., R. ROGERSON, AND A. VALENTINYI (2019): "Growth and the kaldor facts," *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*.

KALDOR, N. (1961): "Capital accumulation and economic growth," in *The theory of capital*, Springer, 177–222.

MANKIW, N. G., D. ROMER, AND D. N. WEIL (1992): "A contribution to the empirics of economic growth," *The quarterly journal of economics*, 107, 407–437.

SOLOW, R. M. (1956): "A contribution to the theory of economic growth," *The quarterly journal of economics*, 70, 65–94.