Crecimiento endógeno: Lo que importa son las nuevas ideas

Felix Wellschmied

Universidad Carlos III de Madrid

Crecimiento Económico / Growth Theory

2023

Introducción

- El crecimiento tecnológico es el motor del crecimiento en el modelo Solow. Además, hemos visto que las diferencias tecnológicas entre países son clave para entender las diferencias de producción por trabajador. Sin embargo, hasta ahora, consideramos que el crecimiento tecnológico es exógeno.

- Romer (1990) presenta un marco sobre cómo analizar el crecimiento tecnológico a través de la investigación. Por ese trabajo, ganó el Premio Nobel.

- Es un modelo para el crecimiento en la frontera tecnológica a través del descubrimiento de nuevas innovaciones. A los países que no están rezagados les puede resultar más fácil crecer copiando las ideas existentes.

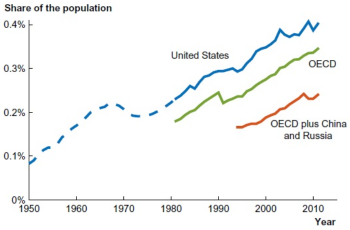
Cómo se descubren las ideas

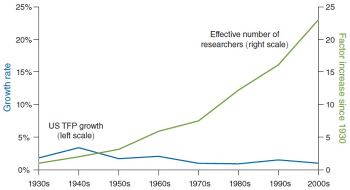
¿Cómo descubrimos nuevas ideas? Dos puntos de vista contrapuestos:

- De pie sobre los hombros de gigantes: A medida que los grandes innovadores que nos precedieron han tenido grandes ideas, se vuelve más fácil desarrollar nuevas ideas. Por ejemplo, habría sido imposible viajar a la Luna, si Newton y Leibniz no hubieran inventado el cálculo. Esta idea sugiere que descubriremos ideas más rápido con el tiempo con un constante uso de I&D.

- Las frutas más fáciles ya están recogidas: Imagina que hay muchas ideas nuevas por ahí, pero descubrir cada una contiene un grado variable de dificultad. Por ejemplo, en medicina, el hecho de que los médicos se laven las manos conduce a una disminución drástica de la mortalidad, pero descubrir nuevos tratamientos contra el cáncer ha resultado difícil. Naturalmente, comenzaremos descubriendo primero ideas fáciles. Esta idea sugiere que descubriremos ideas más lentamente con el tiempo con un constante uso de I&D.

Aumento de la contribución a la investigación y el desarrollo

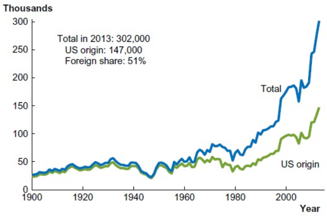




Source: Jones (2016) and Bloom et al. (2020)

- Con el tiempo, el ritmo de innovación, es decir, el progreso tecnológico, es casi constante.
- Sin embargo, hemos aumentado el número de insumos, es decir, el número de trabajadores de I&D.
- Esto sugiere que nos estamos quedando sin ideas fáciles.

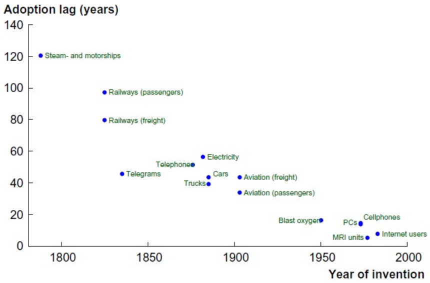
Caída de la productividad de la producción de I&D



Source: Jones (2016)

- A pesar de que el número de investigadores aumenta exponencialmente en los EE. UU., el número de nuevas patentes es casi plano y el aumento reciente probablemente se deba a cambios regulatorios.
- Un mayor número de patentes concedidas a extranjeros conduce a la concesión de más patentes, pero ni siquiera eso aumentó el crecimiento de la productividad, lo que sugiere que las innovaciones se vuelven más marginales.

Rapidez de adopción



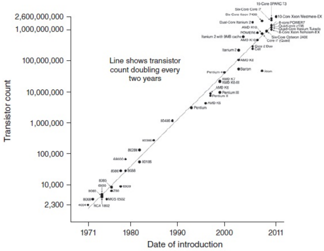
Source: Jones (2016)

- Una vez que se desarrolla una nueva idea, todavía debe ser adoptada por la economía.
- Los datos sugieren que hoy en día somos más rápidos en la adopción de nuevas ideas que en el pasado.

Evidencia a nivel micro

- Bloom et al. (2020) estudian tres casos en los que pueden observar la entrada y la salida en la función de producción de ideas.
- Esto les permite estudiar los cambios en la productividad de la investigación dentro de un campo a lo largo del tiempo.
- Encuentran que la productividad de la investigación está cayendo alrededor de un 8% por año.

Ley de Moore



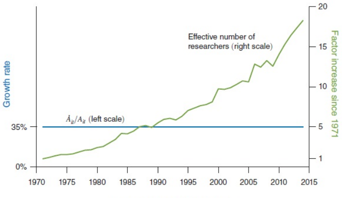


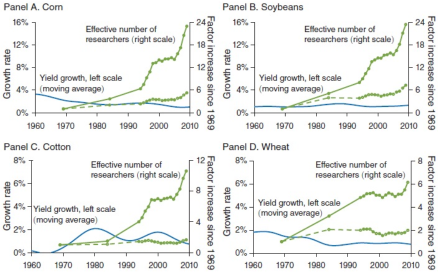
Figure 4. Data on Moore's Law

Source: Bloom et al. (2020)

- Desde la década de 1970, el número de transistores en una CPU se duplica cada 2 años, lo que implica un rendimiento anual de investigación del 35%.

- Utilizando los datos de investigación y desarrollo y salarios de los principales fabricantes de chips, hoy necesitamos 18 veces más insumos para el mismo crecimiento que en la década de 1970.

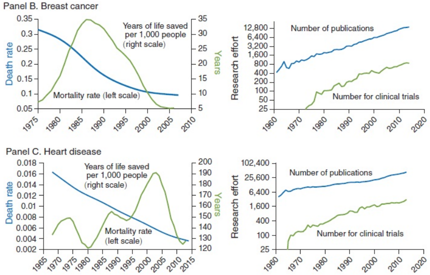
Rendimiento de los cultivos



Source: Bloom et al. (2020)

- El aumento de los rendimientos de los cultivos fue relativamente constante desde el decenio de 1960.
- Al mismo tiempo, el número de investigadores que intentan aumentar el rendimiento de los cultivos ha aumentado considerablemente.
- Los datos sugieren una disminución anual de la productividad del 6%.

Salud



Source: Bloom et al. (2020)

- Las mejoras en los resultados de salud no muestran un crecimiento exponencial, es decir, tasas de crecimiento constantes.
- Sin embargo, el número de investigadores, de nuevo, ha aumentado drásticamente.

El modelo

¿Necesitamos un nuevo marco? Bienes no rivales

Puede ser tentador pensar en la tecnología como un insumo más que podemos acumular (como el capital) y simplemente modificar nuestro modelo de Solow. Esto, sin embargo, pasa por alto un aspecto clave de la tecnología: a diferencia del capital, la tecnología es un biene no rival. Si a una persona se le ocurre una mejor idea de producir, todos podrían, en principio, usar esa idea:

- Un algoritmo informático recién descubierto podría ser utilizado por todos los productores / consumidores.
- Un medicamento recién descubierto podría beneficiar a todas las personas enfermas.
- La entrega justo a tiempo podría ser empleada por todas las empresas.
- Un diseño de avión más eficiente podría ser utilizado por todas las empresas.

¿Necesitamos un nuevo marco? Rendimientos crecientes a escala

La no rivalidad a menudo conduce a rendimientos crecientes a escala:

- La producción de la primera unidad es costosa, ya que se necesita invertir una gran cantidad de investigación y desarrollo.
- Una vez que se descubre la nueva idea, la producción de más unidades tiene un costo marginal relativamente barato (a veces cero). Por ejemplo:
$$f(x) = 100(x - F). \tag{1}$$
- Por lo tanto, $f(ax) > af(x)$, es decir, tenemos rendimientos crecientes a escala.

¿Necesitamos un nuevo marco? Competencia imperfecta

Con rendimientos crecientes a escala, los mercados suelen dar lugar a una competencia imperfecta:

- Los costos promedio son siempre más altos que los costos marginales. Por lo tanto, $p = MC$ daría lugar a beneficios negativos y a que ninguna empresa entrara en el mercado.

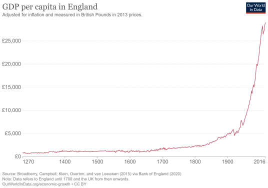
- En cambio, las empresas imperfectamente competitivas necesitan obtener ganancias por cada unidad de producción para recuperar los grandes costos fijos.

- Esto requiere que el bien sea excluible. De lo contrario, el gobierno tendrá que hacer las innovaciones, por ejemplo, las innovaciones en defensa nacional.

¿Cómo pueden las empresas obtener beneficios de sus innovaciones?

- Algunas ideas nuevas pueden ser difíciles de copiar. Por ejemplo, la receta de Coca Cola fue un secreto comercial durante mucho tiempo. Además, las innovaciones en la organización de las empresas, como los nuevos estilos de gestión, pueden ser difíciles de observar y de copiar de una empresa a otra.
- En otros casos, por ejemplo, los nuevos medicamentos, la ingeniería inversa y la copia pueden ser relativamente simples. Sin embargo, para incentivar a las empresas y a los particulares a innovar, el gobierno concede monopolios temporales a las innovaciones:
  - Patentes para ideas tangibles.
  - Derechos de autor para ideas no tangibles.

¿Puede el patentamiento explicar el despegue del crecimiento?



- Recordemos que no observamos un crecimiento de la producción por trabajador desde hace relativamente poco tiempo.
- Inglaterra estableció una ley de patentes en 1624, pero la difusión fue lenta.
- Algunos economistas creen que la difusión de la protección de la propiedad intelectual fue uno de los principales factores que contribuyeron a la revolución industrial.

El modelo Romer

Romer (1990) propone un modelo en el que las nuevas ideas se suman al acervo de ideas existente. Conceptualmente, lo más sencillo es tener un modelo con cuatro sectores diferentes:

- El sector de los hogares ahorra y acumula el stock de capital agregado y homogéneo.
- Los investigadores desarrollan nuevos diseños de productos que adoptan la forma de bienes de capital, por ejemplo, el diseño de un nuevo ordenador.
- Una empresa intermediaria compra este diseño y utiliza el capital del sector doméstico para convertirlo en un bien de capital productivo sobre el que posee una patente.
- Finalmente, un gran número de productores de bienes finales compran estos bienes de capital y producen el bien final bajo competencia perfecta.

Sector doméstico

El sector de los hogares, como hasta ahora, acumula el stock de capital agregado que estará disponible para transformarlo en capital productivo:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t), \tag{2}$$

donde Y es el bien final. A diferencia de antes, el hogar trabaja en el sector de producción de bienes, L_Y, o en el sector de la investigación, L_A:

$$L(t) = L_Y(t) + L_A(t) \tag{3}$$

$$L_A(t) = s_R L(t). \tag{4}$$

Producción de bienes finales

El productor de bienes finales utiliza mano de obra y una medida de $A(t)$ bienes de capital disponibles para producir el producto final del bien:

$$Y(t) = L_Y(t)^{1-\alpha} \int_0^{A(t)} x_j(t)^\alpha dj. \tag{5}$$

Tenga en cuenta que la función tiene rendimientos constantes a escala con respecto al capital y la mano de obra. Para una cantidad dada de bienes de capital, A, duplicando L_Y y cada x_j duplicará la producción.

Demanda óptima de insumos

Dado el salario, w, y los precios de cada bien de capital, p_j, el productor de bienes finales elige la cantidad de cada bien de capital y el mano de obra para maximizar las ganancias (el precio del bien de producción final es 1, y omitiendo los índices de tiempo):

$$Y = \max_{L_Y, x_j} \left\{ L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_j^{\alpha} dj - wL_Y - \int_0^A p_j x_j dj \right\}. \tag{6}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L_Y} = (1-\alpha) L_Y^{-\alpha} \int_0^A x_j^{\alpha} dj - w = 0 \tag{7}$$

$$w = (1-\alpha) \frac{Y}{L_Y}. \tag{8}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x_j} = \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1} - p_j = 0 \tag{9}$$

$$p_j = \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1}. \tag{10}$$

Productores de bienes de capital

Los productores de bienes de capital compran diseños de patentes a los investigadores a un precio fijo P_A. Una vez que tienen el diseño, producen bienes de capital transformando el capital del sector doméstico en bienes de capital productivos a una tasa de uno a uno. El precio del capital es de r:

$$\max_{x_j} \{\pi_j = p_j(x_j)x_j - rx_j\}, \tag{11}$$

donde $p_j(x_j)$ viene dado por la función demand (10).

Precio óptimo

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j(x_j)}{\partial x_j} x_j + p_j - r = 0 \tag{12}$$

$$0 = \frac{\frac{\partial p_j(x_j)}{\partial x_j} x_j}{p_j} + 1 - \frac{r}{p_j}. \tag{13}$$

De (10) tenemos

$$\frac{\frac{\partial p_j}{\partial x_j} x_j}{p_j} = \frac{(\alpha - 1)\alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-2} x_j}{\alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1}} \tag{14}$$

$$= \alpha - 1. \tag{15}$$

Precio óptimo II

Juntando las cosas:

$$p_j = \frac{1}{\alpha} r > r. \tag{16}$$

La competencia imperfecta implica que los productores de bienes de capital obtienen un beneficio por cada unidad que venden:

$$\pi_j = \frac{1}{\alpha} r x_j - r x_j = x_j r \frac{1-\alpha}{\alpha}. \tag{17}$$

El sector de la investigación

Un solo investigador descubre ideas de acuerdo con

$$\bar{\theta} = \theta A(t)^{\phi}. \tag{18}$$

Más investigadores conducen a más descubrimientos, de modo que se descubren nuevas ideas de acuerdo con

$$\dot{A}(t) = \theta L_A(t)^{\lambda} A(t)^{\phi}. \tag{19}$$

- Más investigadores, L_A, aumenta el descubrimiento de ideas. Si $\lambda < 1$, hay un efecto de pisar los dedos de los pies, de lo contrario, hay efectos de red.
- El stock actual de ideas, A, tiene un efecto ambivalente sobre las nuevas ideas. Cuando $\phi < 1$, descubrir ideas se vuelve más difícil con el tiempo, como se argumenta en los datos.

El valor de una patente

Para alquilar una patente por un período, el productor de bienes de capital tiene que pagar rP_A. Su beneficio es el beneficio del flujo más el cambio en el valor de la patente durante ese período:

$$rP_A = \pi + \dot{P}_A. \tag{20}$$

Se puede demostrar que esto resuelve

$$P_A = \frac{\pi}{r - n}. \tag{21}$$

El número de investigadores

Para un investigador individual, el valor de ser investigador es $\bar{\theta}P_A$. Esto tiene que igualar el salario que ha dejado de pagar por ser trabajadora de producción:

$$\bar{\theta}P_A = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y} \tag{22}$$

A lo largo de la trayectoria de crecimiento balanceado, se puede demostrar que esto resuelve

$$s_R = \frac{1}{1+\frac{r-n}{\alpha g_A}}. \tag{23}$$

- Un crecimiento tecnológico más eficiente alentará a más investigadores.
- Una tasa de ahorro más alta disminuirá el r y aumentará la investigación.

El resultado simétrico

Como cada bien de capital x_j tiene el mismo costo y el mismo beneficio, el resultado de equilibrio es que todos se producen en la misma cantidad:

$$x_j = x. \tag{24}$$

La compensación de cada bien de capital implica, por lo tanto:

$$\int_0^A x_j dj = Ax = K \tag{25}$$

$$x = \frac{K}{A}. \tag{26}$$

El resultado simétrico II

Conectando el resultado en nuestra función de producción de bienes finales se obtiene:

$$Y(t) = L_Y(t)^{1-\alpha} A(t) x(t)^{\alpha} \tag{27}$$

$$Y(t) = L_Y(t)^{1-\alpha} A(t) \left(\frac{K(t)}{A(t)} \right)^{\alpha} \tag{28}$$

$$Y(t) = \left(A(t) L_Y(t) \right)^{1-\alpha} K(t)^{\alpha} \tag{29}$$

que es nuestra función de producción familiar. Tenga en cuenta que la función tiene rendimientos crecientes a escala con respecto a todos los *tres* factores de producción.

La trayectoria de crecimiento balanceado

Reescritura de la función de producción:

$$Y(t)^{1-\alpha} = (A(t)L_Y(t))^{1-\alpha}\left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\alpha}. \tag{30}$$

Se puede demostrar una vez más que la relación capital-producción es constante a lo largo de la trayectoria de crecimiento balanceado. Por lo tanto

$$\left(\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}\right)^{*} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + n. \tag{31}$$

Además, la producción por trabajador crece al ritmo de las nuevas ideas: $\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$.

La tasa de crecimiento de las nuevas ideas

Reescribiendo la ecuación de acumulación de ideas:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\theta L_A(t)^{\lambda}}{A(t)^{1-\phi}} = \frac{\theta(s_R L(t))^{\lambda}}{A(t)^{1-\phi}}. \tag{32}$$

Supongamos que la tasa de crecimiento es constante. Esto solo puede ser si el numerador y el denominador crecen al mismo ritmo, es decir,

$$(1-\phi)\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \lambda\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \lambda n \tag{33}$$

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\lambda n}{1-\phi}. \tag{34}$$

Los efectos de red, λ y pisar los hombros de gigantes, ϕ, crean un progreso tecnológico más rápido.

Ideas clave

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\lambda n}{1 - \phi}. \tag{35}$$

- El progreso tecnológico constante solo es posible a través del crecimiento de la población (o de una proporción creciente de personas que investigan). Más personas aportan más ideas, lo que aumenta la producción, es decir, muy diferente del modelo de Solow.

- Con $\phi = 1$, el crecimiento tecnológico constante también sería posible sin el crecimiento de la población:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \theta L_A(t)^{\lambda}. \tag{36}$$

- La proporción de investigadores en la población no afecta la tasa de crecimiento de la tecnología.

El estado estacionario

Para analizar el estado estacionario, defina

$$\tilde{k}(t) = \frac{K(t)}{A(t)(1-s_R)L(t)} \tag{37}$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{Y(t)}{A(t)(1-s_R)L(t)} = \tilde{k}(t)^{\alpha}. \tag{38}$$

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital:

$$\dot{K}(t) = sK(t)^{\alpha}\left(A(t)(1-s_R)L(t)\right)^{1-\alpha} - \delta K(t) \tag{39}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} - \delta \tag{40}$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} - (n + g_A + \delta). \tag{41}$$

El estado estacionario II

Conjetura que $\tilde{k}$ es constante en estado estacionario:

$$(n + g_A + \delta) = s \left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha - 1} \tag{42}$$

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n + g_A + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{43}$$

Lo cual es, de hecho, una constante. Esto implica que a lo largo de la la trayectoria de crecimiento balanceado

$$\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^* = \left(\frac{s}{n + g_A + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (1 - s_R)A(t) \tag{44}$$

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = \left(\frac{s}{n + g_A + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1 - s_R)A(t). \tag{45}$$

Producción por trabajador y porcentaje de investigadores

Podemos reescribir (19) como

$$g_A = \theta L_A(t)^{\lambda} A(t)^{\phi-1} \tag{46}$$

$$A(t) = \left(\frac{\theta (s_R L(t))^{\lambda}}{g_A} \right)^{\frac{1}{1-\phi}} \tag{47}$$

Juntando las cosas, tenemos a lo largo de la trayectoria de crecimiento balanceado

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)} \right)^{*} = \left(\frac{s}{n + g_A + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1 - s_R) \left(\frac{\theta (s_R L(t))^{\lambda}}{g_A} \right)^{\frac{1}{1-\phi}} . \tag{48}$$

Producción por trabajador y porcentaje de investigadores II

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-s_R)\left(\frac{\theta(s_R L(t))^\lambda}{g_A}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}. \tag{49}$$

La proporción de investigadores tiene un efecto ambivalente sobre la producción por trabajador:

- Más investigadores reducen el grupo disponible para producir bienes.
- Un mayor número de investigadores conduce a un mayor stock de ideas y, por lo tanto, hace que los que producen bienes sean más productivos.

Tenga en cuenta que la producción por trabajador es *creciente* en el tamaño de la población.

Dinámica de transición

Aunque la proporción de investigadores no afecta el crecimiento a largo plazo, los cambios en la proporción conducen a cambios en el crecimiento a corto plazo. Considere un aumento en s_R y, para simplificar, suponga $\phi = 0$ y $\lambda = 1$, es decir,

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \theta \frac{s_R L(t)}{A(t)}. \tag{50}$$

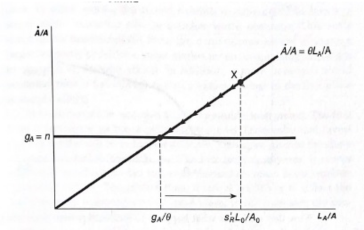
En general, y a lo largo de la trayectoria de crecimiento balanceado tenemos:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = n. \tag{51}$$

Por lo tanto, a lo largo de la trayectoria de crecimiento balanceado tenemos:

$$\frac{n}{\theta} = \frac{s_R L(t)}{A(t)} \tag{52}$$

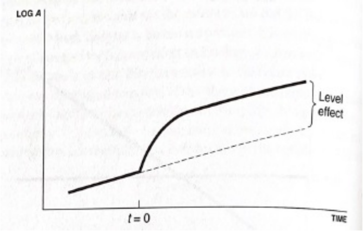
Dinámica de transición II



El aumento de s_R conduce a un mayor progreso tecnológico en la actualidad:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \theta \frac{s_R L(t)}{A(t)}. \tag{53}$$

A medida que se acumula el stock de ideas, $\theta \frac{s_R L(t)}{A(t)}$ cae y también lo hace el progreso tecnológico.



La tasa de crecimiento temporalmente más alta de las ideas conduce a un stock de ideas permanentemente más alto.

Crecimiento schumpeteriano

- En el modelo Romer, una vez descubierto, los diseños se utilizan para siempre.

- Sin embargo, volviendo a Schumpeter, los economistas han pensado en el progreso tecnológico como diseños *mejores* que reemplazan a los diseños más antiguos.

- Por ejemplo
  - los teléfonos con pantalla táctil reemplazaron a los teléfonos con teclado.
  - el motor a reacción reemplazó a las hélices.
  - la entrega justo a tiempo sustituyó a las grandes unidades de almacenamiento central.

- Grossman and Helpman (1991) y Aghion and Howitt (1992) desarrollar modelos de esta destrucción creativa.

La economía modelo

Al igual que antes, tendremos los mismos cuatro sectores:

- El sector de los hogares ahorra y acumula el stock de capital agregado y homogéneo.
- Los investigadores desarrollan nuevos diseños de productos que adoptan la forma de bienes de capital, por ejemplo, el diseño de un nuevo ordenador.
- Una empresa intermediaria compra este diseño y utiliza el capital del sector doméstico para convertirlo en un bien de capital productivo sobre el que posee una patente.
- Finalmente, un productor de bienes finales compra estos bienes de capital y produce el bien final bajo competencia perfecta.

Sector doméstico

El sector de los hogares, al igual que antes, acumula el stock de capital agregado y trabaja en el sector de bienes finales o en el sector de la investigación:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) \tag{54}$$

$$L(t) = L_Y(t) + L_A(t) \tag{55}$$

$$L_A(t) = s_R L(t). \tag{56}$$

Producción de bienes finales

El productor de bienes finales utiliza la mano de obra de producción y la última versión de capital, x_i y productividad A_i para producir:

$$Y(t) = \left(L_Y(t)A_i(t)\right)^{1-\alpha} x_i(t)^{\alpha}, \tag{57}$$

siendo x_i más nuevo y productivo que x_{i-1}. Por ejemplo, x_i puede ser el motor a reacción y x_{i-1} la hélice, y A_i mide la productividad del motor a reacción mientras que A_{i-1} es la productividad de la hélice.

Demanda óptima de insumos

Dado el salario, w, y los precios de cada bien de capital, p_i, el productor de bienes finales elige la cantidad de cada bien de capital y el mano de obra para maximizar las ganancias (el precio del bien de producción final es 1, y omitiendo los índices de tiempo):

$$Y = \max_{L_Y, x_i} \left\{ (L_Y A_i)^{1-\alpha} x_i^{\alpha} - wL_Y - p_i x_i \right\}. \tag{58}$$

$$w = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y} \tag{59}$$

$$p_i = \alpha (L_Y A_i)^{1-\alpha} x_i^{\alpha-1}. \tag{60}$$

Productores de bienes de capital

Los productores de bienes de capital compran diseños de patentes a los investigadores a un precio fijo P_A. Una vez que tienen el diseño, producen bienes de capital transformando el capital del sector doméstico en bienes de capital productivos a una tasa de uno a uno. El precio del capital es de r:

$$\max_{x_i} \left\{ \pi_i = p_i(x_i)x_i - rx_i \right\}, \tag{61}$$

lo que resuelve de nuevo para

$$p_i = \frac{1}{\alpha} r. \tag{62}$$

Como todos los diseños i cobran el mismo precio, el productor final de bienes solo comprará el último diseño, y solo este productor de bienes de capital tendrá ventas, es decir, $x_i = K$.

El sector de la investigación

Cada nueva innovación es una mejora constante con respecto a la anterior:

$$A_i(t) = (1+\gamma)A_{i-1}(t). \tag{63}$$

La probabilidad de que un investigador encuentre un nuevo diseño es

$$\bar{\mu} = \frac{\theta L_A(t)^{\lambda-1}}{A_i(t)^{1-\phi}}. \tag{64}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que se descubra un nuevo diseño es

$$\bar{\mu} L_A(t) = \frac{\theta L_A(t)^{\lambda}}{A_i(t)^{1-\phi}}. \tag{65}$$

El valor de una patente

Para calcular el valor de una patente, tenemos que tener en cuenta que pierde todo valor con probabilidad $\bar{\mu} L_A$:

$$rP_A = \pi + \dot{P}_A - \bar{\mu} L_A P_A. \tag{66}$$

Se puede demostrar que esto resuelve

$$P_A = \frac{\pi}{r - n + \bar{\mu}(1-\gamma)}. \tag{67}$$

Cuanto más innovadora es una nueva patente, γ, más valor tiene. Cuanto más probable sea que aparezca una nueva innovación, $\bar{\mu}$, menor será el valor.

El número de investigadores

Utilizando de nuevo una condición de no arbitraje, a lo largo de la trayectoria de crecimiento balanceado, se puede demostrar que la proporción de investigadores es

$$s_R = \frac{1}{1 + \frac{r - n + \bar{\mu}(1-\gamma)}{\alpha \bar{\mu}}}. \tag{68}$$

Una mayor eficiencia en la investigación hace que sea más probable que reciba una patente y, por lo tanto, aumenta el número de investigadores, pero también reduce su valor.

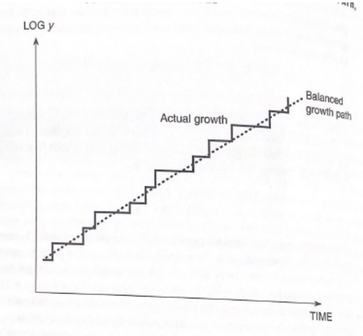
La función de producción agregada

Usando el hecho de que $x_i = K$, tenemos de nuevo

$$Y(t) = (A(t)L_Y(t))^{1-\alpha} K(t)^{\alpha} \tag{69}$$

que es nuestra función de producción familiar.

La trayectoria de crecimiento balanceado



- Como la llegada de las ideas es ahora estocástica, el crecimiento ya no es suave.

- En las expectativas, las tasas de crecimiento son las mismas que en el modelo de Romer.

Volvamos a nuestras tres grandes preguntas

1. ¿Por qué somos tan ricos nosotros y ellos tan pobres?
   - Diferentes tasas de ahorro, tasas de crecimiento de la población y tecnologías para la acumulación de ideas.
2. ¿Por qué hay milagros de crecimiento?
   - Rápida acumulación de capital físico o de ideas.
3. ¿Cuáles son los motores del crecimiento económico a largo plazo?
   - Crecimiento de la población.

References

Aghion, P. and P. Howitt (1992): "A model of growth through creative destruction," *Econometrica*, 60.

Bloom, N., C. I. Jones, J. Van Reenen, and M. Webb (2020): "Are ideas getting harder to find?" *American Economic Review*, 110, 1104–1144.

Grossman, G. M. and E. Helpman (1991): "Innovation and growth in the global environment," .

Jones, C. I. (2016): "The facts of economic growth," in *Handbook of macroeconomics*, Elsevier, vol. 2, 3–69.

Romer, P. M. (1990): "Endogenous technological change," *Journal of political Economy*, 98, S71–S102.