Teoría del Consumidor: Dualidad

Si las preferencias del consumidor sobre cestas de bienes $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ están representadas por una función de utilidad u continua, no-decreciente en x e y, y cóncava, la resolución del problema

$$\max_{x,y} \; u(x, y)$$
$$p_x x + p_y y \leq I,$$
$$x \geq 0, y \geq 0,$$

proporciona las *funciones de demanda ordinarias* (marshallianas) del consumidor,

$$x(p_x, p_y, I), \;\; y(p_x, p_y, I)$$

y la función indirecta de utilidad

$$v(p_x, p_y, I) = u(x(p_x, p_y, I), y(p_x, p_y, I)).$$

Estas funciones son continuas, homogéneas de grado cero en (p_x, p_y, I).

Teoría del Consumidor: Dualidad

El problema dual del consumidor consiste en minimizar el gasto necesario para alcanzar un cierto nivel de bienestar:

$$\min_{x,y} \; p_x x + p_y y$$
$$u(x,y) \geq u,$$
$$x \geq 0, y \geq 0.$$

La solución a este problema proporciona las *funciones de demanda compensadas* (hicksianas),

$$h_x(p_x, p_y, u)$$
$$h_y(p_x, p_y, u)$$

y la función de gasto

$$e(p_x, p_y, u) = p_x h_x(p_x, p_y, u) + p_y h_y(p_x, p_y, u)).$$

Estas funciones son continuas y homogéneas de grado cero en (p_x, p_y).

Teoría del Consumidor: Dualidad

Las relaciones entre las soluciones del primal y el dual están descritas por las identidades:

$$x(p_x, p_y, I) \equiv h_x(p_x, p_y, v(p_x, p_y, I))$$

$$y(p_x, p_y, I) \equiv h_y(p_x, p_y, v(p_x, p_y, I))$$

$$h_x(p_x, p_y, u) \equiv x(p_x, p_y, e(p_x, p_y, u))$$

$$h_y(p_x, p_y, u) \equiv y(p_x, p_y, e(p_x, p_y, u))$$

$$u \equiv v(p_x, p_y, e(p_x, p_y, u))$$

$$I \equiv e(p_x, p_y, v(p_x, p_y, I).$$

Teoría del Consumidor: Dualidad

Derivando la identidad

$$h_x(p_x, p_y, u) \equiv x(p_x, p_y, e(p_x, p_y, u))$$

con respecto a p_x obtenemos

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} + \frac{\partial x}{\partial I}\frac{\partial e}{\partial p_x} = \frac{\partial h_x}{\partial p_x}.$$

Despejando $\partial x/\partial p_x$ y observando que

$$\frac{\partial e}{\partial p_x} = h_x(p_x, p_y, u) = x,$$

(un resultado conocido como *Lema de Shephard*, que es una consecuencia directa del *Teorema de la Envolvente*), obtenemos la *Ecuación de Slutsky*,

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{\partial h_x}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial I}x.$$

Teoría del Consumidor: Dualidad

La Ecuación de Slutsky proporciona una descomposición del efecto de una variación del precio de un bien sobre su demanda en un *efecto sustitución*

$$\frac{\partial h_x}{\partial p_x} < 0$$

y un *efecto renta*

$$-\frac{\partial x}{\partial I} x \lesseqgtr 0 \begin{cases} x \text{ es un bien normal} \\ x \text{ es un bien inferior.} \end{cases}$$

Teoría del Consumidor: Dualidad

Cuando la renta monetaria del consumidor es el valor de su dotación inicial de bienes, como ocurre en el modelo consumo-ocio, la descomposición en efecto sustitución y renta del efecto total de la variación en el precio de un bien sobre su demanda adopta una forma distinta.

El problema del consumidor con dotación inicial $(\bar{x}, \bar{y})$ es:

$$\begin{gathered} \max_{x,y} \; u(x, y) \\ p_x x + p_y y \leq p_x \bar{x} + p_y \bar{y}, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{gathered}$$

Las funciones de demanda ordinarias que resultan de resolver este problema tienen como argumentos los precios de los bienes:

$$\tilde{x}(p_x, p_y), \tilde{y}(p_x, p_y).$$

La relación de estas funciones con las funciones de demanda ordinarias obtenidas para el caso en que la renta monetaria es exógena es:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(p_x, p_y) &\equiv x(p_x, p_y, I(p_x, p_y)) \\ \tilde{y}(p_x, p_y) &\equiv y(p_x, p_y, I(p_x, p_y)), \end{aligned}$$

donde $I(p_x, p_y) \equiv p_x\bar{x} + p_y\bar{y}$.

La Ecuación de Slutsky en este contexto se obtiene derivando esta identidad con respecto a p_x:

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_x} = \frac{\partial x}{\partial p_x} + \frac{\partial x}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial p_x}.$$

Teoría del Consumidor: Dualidad

Tenemos:

$$\frac{\partial I}{\partial p_x} = \frac{\partial \left(p_x \bar{x} + p_y \bar{y}\right)}{\partial p_x} = \bar{x}.$$

Utilizando la Ecuación de Slutsky para $x(p_x, p_y, I)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_x} &= \left(\frac{\partial h_x}{\partial p_x} - x\frac{\partial x}{\partial I}\right) + \frac{\partial x}{\partial I}\bar{x} \\ &= \frac{\partial h_x}{\partial p_x} - (x - \bar{x})\frac{\partial x}{\partial I}.\end{aligned}$$

En la Ecuación de Slutsky en este contexto,

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_x} = \frac{\partial h_x}{\partial p_x} - (x - \bar{x})\frac{\partial x}{\partial I},$$

el signo del efecto renta depende del signo del término $x - \bar{x}$. Cuando

$$x - \bar{x} > 0,$$

es decir, cuando el consumidor es un comprador neto de x, el efecto renta tiene el signo habitual: negativo si el bien es normal y positivo si es inferior.

Sin embargo, cuando

$$x - \bar{x} < 0,$$

es decir, cuando el consumidor es un vendedor neto de x, el efecto renta tiene el signo contrario al habitual: positivo si el bien es normal y negativo si es inferior.

En este caso, es posible que el efecto total de la variación del precio del bien sobre su demanda sea positivo (es decir, que un aumento del precio del bien resulte en un aumento de la demanda del bien), a pesar de que se trate de un bien normal.