La Teoría del Consumidor: Incertidumbre

Incertidumbre y Riesgo

La presencia de incertidumbre supone que las consecuencias que se derivan de cada alternativa disponible no se conocen de antemano, sino que dependen de la ocurrencia de sucesos aleatorios fuera del control del consumidor.

Ejemplos de decisión con incertidumbre:

- Elección de una carrera profesional
- Financiación para la adquisición bienes o activos (vivienda)
- Elección de un seguro de vida, de coche o de hogar.
- Elección de un candidato a un cargo político
- Inversión (en activos físicos o financieros, en capital humano).

Incertidumbre y Riesgo

En este contexto:

Elegir una alternativa implica asumir las consecuencias inciertas que se deriven de ésta.

Las alternativas disponibles son *loterías*.

Adoptar una decisión involucra *apostar*.

Loterías

Para simplificar, nos limitamos a tratar los problemas en los que las *consecuencias* de las decisiones son exclusivamente *monetarias*.

Las alternativas de decisión posibles, a las que nos referimos como *loterías,* son *variables aleatorias,*

$$l = (x,p),$$

que especifican los *pagos* (pérdidas o ganancias) posibles,

$$x = (x_1,\ldots,x_n),$$

y las *probabilidades* con que se reciben estos pagos,

$$p = (p_1,\ldots,p_n).$$

Loterías

Ejemplo 1. Jorge tiene el coche averiado. Reparar su coche costaría 300 euros si la avería es leve y 1.200 euros si es grave. La probabilidad de que la avería sea grave es 2/3.

Alternativamente, le ofrecen un coche usado por 1.000 euros.

Jorge necesita un medio de transporte.

¿Debería reparar su coche o reemplazarlo?

Preferencias y Riesgo

Para formular una teoría del consumidor (o de la decisión) con incertidumbre postulamos que el individuo tiene preferencias $\succcurlyeq$ sobre loterías, que satisficen las propiedades habituales:

A.1. *Completitud:* $\forall\ l, l' :\ l \succcurlyeq l'$, o $l' \succcurlyeq l$, o ambos.

A.2. *Transitividad:* $\forall\ l, l', l'':\ l \succcurlyeq l'$ y $l' \succcurlyeq l'' \Rightarrow l \succcurlyeq l''$.

A.3. *Montonicidad:* $\forall l=(x,p),\ l'=(y,p)$: $x > y \Rightarrow l \succ l'$.

A. 4. *Continuidad:* $[l_n \succcurlyeq l'\ \forall n,\ lim_{n\to\infty}\ l_n = l] \Rightarrow l \succcurlyeq l'$.

Si

Preferencias y Riesgo

Ejemplos: Sean $l = (x,p)$, $l' = (y,q)$.

[1] Preferencias VEM:

$l \succcurlyeq_{VEM} l'$ si $E[l] \geq E[l']$.

(Discutir la Paradoja de San Petersburgo.)

[2] Preferencias maxmin:

$l \succcurlyeq_{Mm} l'$ si $min\ \{x_1,\dots,x_n\} \geq min\ \{y_1,\dots,y_n\}$.

(Discutir la racionalidad de estas preferencias.)

[3] Preferencias α:

$l \succcurlyeq_{\alpha} l'$ si $E(l^{\alpha}) = \sum_i p_i\, x^{\alpha}_i \geq \sum_i q_i\, y^{\alpha}_i = E\,[(l')^{\alpha}]$.

Preferencias y Riesgo

Ejemplo 2. Ordene las loterías $l = (4,1;1/2,1/2)$ y $l' = (0,5;1/2,1/2)$ de acuerdo con las preferencias descritas en [1], [2] y [3].

[1] Tenemos

$$E[l] = 1/2\,(4) + 1/2\,(1) = 2{,}5$$

y

$$E[l'] = 1/2\,(0) + 1/2\,(5) = 2{,}5.$$

Por tanto

$$l \sim_{VEM} l'.$$

Preferencias y Riesgo

Ejemplo 2. Ordene las loterías $l = (4,1;1/2,1/2)$ y $l' = (0,5;1/2,1/2)$ de acuerdo con las preferencias descritas en [1], [2] y [3].

[2] Tenemos

$$min\ \{4,\ 1\} = 1 \ y \ min\ \{0,\ 5\} = 0.$$

Por tanto

$$l \succ_{Mm} l'.$$

Preferencias y Riesgo

Ejemplo 2. Ordene las loterías $l = (4,1;1/2,1/2)$ y $l' = (0,5;1/2,1/2)$ de acuerdo con las preferencias descritas en [1], [2] y [3].

[3] Consideramos α = 0,5. (Nota $x^{0,5} = \sqrt{x}$.). Tenemos

$$E[l^{\alpha}] = 1/2\,\sqrt{4} + 1/2\,\sqrt{1} = 3/2$$

y

$$E[(l')^{\alpha}] = 1/2\sqrt{0} + 1/2\sqrt{5} = \sqrt{5}/2 < 3/2.$$

Por tanto,

$$l \succ_{0,5} l'.$$

Preferencias y Riesgo

Ejemplo 2. Ordene las loterías $l = (4,1;1/2,1/2)$ y $l' = (0,5;1/2,1/2)$ de acuerdo con las preferencias descritas en [1], [2] y [3].

[3a] Consideramos $\alpha = 2$. Tenemos

$$E[l^{\alpha}] = 1/2\ (4^2) + 1/2\ (1^2) = 17/2$$

y

$$E[(l')^{\alpha}] = 1/2\ (0^2) + 1/2\ (5^2) = 25/2.$$

Por tanto, $l' \succ_2 l$.

Utilidad Esperada

Las preferencias $\succcurlyeq_\alpha$ tienen un propiedad interesante: pueden representarse mediante una función de utilidad que puede expresarse como la "esperanza matemática" de una variable aleatoria cuyos valores son la función

$$u(x) = x^\alpha$$

aplicada a los pagos de la lotería.

Por tanto, es natural interpretar $u(x)$ como la *utilidad del pago x*.

Utilidad Esperada

En general, cualquier función $u: \Re \rightarrow \Re$ define una función de utilidad sobre loterías,

$$U(l) = E[u(l)] = \sum_i p_i u(x_i).$$

Nos referimos a las funciones *u* como *funciones de utilidad de Bernoulli*, y a las funciones de utilidad sobre loterías *U* que pueden expresarse de esta forma (como una composición del operador esperanza *E* y una función de utilidad de Bernoulli) como *funciones de utilidad von Neumann-Morgensten.*

Para reducir la notación, escribimos $Eu(l)$ por $E[u(l)]$.

Utilidad Esperada

¿Qué preferencias sobre loterías pueden representarse mediante funciones de utilidad von Neumann-Morgensten? La respuesta involucra un nuevo axioma sobre las preferencias de loterías.

Para $l=(x;p)$, $l' = (y;q)$, $\lambda \in [0,1]$, definimos la lotería

$$[\lambda l + (1-\lambda)\, l'] = ((x,y),(\lambda p,(1-\lambda)q)).$$

Axioma de *Independencia*: $\forall l, l', l'', \lambda \in [0,1]$:

$$l' \succcurlyeq l'' \Rightarrow [\lambda l + (1-\lambda)\, l'] \succcurlyeq [\lambda l + (1-\lambda)\, l''] \,.$$

¿En qué situaciones (no) se cumple el Axioma de de Indepencencia?

Utilidad Esperada

Teorema de la Utilidad Esperada

Si una relación de preferencias sobre loterías $\succcurlyeq$ satisface los axiomas A.1, A.2, A.4 y el Axioma de Independencia, entonces existe una función de utilidad de Bernoulli $u\colon \Re \rightarrow \Re$, tal que

$\forall l, l'$:

$$l \succcurlyeq l' \Leftrightarrow Eu(l) \geq Eu(l').$$

Si además la relación de preferencias $\succcurlyeq$ satisfacen el axioma A.3, entonces u es creciente.

Actitudes frente al Riesgo

El riesgo inherente en cada lotería es uno de los aspectos determinantes para ordenar las loterías posibles e identificar la mejor opción.

Obviamente, el grado de renuencia o aversión al riesgo (o el grado de atracción por el riesgo) es distinto para cada individuo.

Para empezar, proponemos definiciones específicas de los conceptos de *aversión al riesgo*, *neutralidad frente al riesgo* y *atracción por el riesgo*.

Actitudes frente al Riesgo

Discutamos las consecuencias de la actitud de un individuo frente al riesgo en un sencillo problema de decisión:

Supongamos que un individuo debe decidir si apostar a una lotería en la que se ganan o se pierden 10 euros con idéntica probabilidad, frente a la alternativa de no hacerlo.

Podemos representar las dos loterías que enfrenta el individuo como $l = (10, -10; 1/2, 1/2)$ y $l' = (0; 1)$.

Actitudes frente al Riesgo

Puesto que

$$E[l] = E\,[l'] = 0,$$

un individuo *neutral al riesgo* (es decir, alguien que no sienta atracción ni aversión por el riesgo) sería indiferente entre apostar por la lotería o no hacerlo. Es decir, si $\succcurlyeq_N$ son las preferencias de un individuo neutral al riesgo, entonces

$$l \sim_N l'.$$

Actitudes frente al Riesgo

Sin embargo, un *amante del riesgo* debería encontrar excitante apostar por la lotería l. Es decir, si $\succcurlyeq_{AM}$ son las preferencias de un amante del riesgo, entonces

$$l \succ_{AM} l'.$$

Y si el individuo es *averso al riesgo* preferirá no apostar. Es decir, si $\succcurlyeq_{AV}$ son las preferencias de un averso al riesgo, entonces

$$l' \succ_{AV} l.$$

Actitudes frente al Riesgo

Este simple ejemplo motiva las siguientes definiciones:

Decimos que una lotería l es *no degenerada* si involucra al menos dos pagos distintos con probabilidad positiva.

En el ejemplo descrito, la lotería l es no degenerada, mientras que l' es una lotería degenerada.

Actitudes frente al Riesgo

Sea l una lotería cualquiera no degenerada y sea l_c una lotería (degenerada) que paga $E(l)$ con certidumbre; es decir $l_c = (E(l);1)$.

Decimos que el individuo con preferencias $\succcurlyeq$ sobre loterías es

- Neutral al Riesgo: si $\forall\, l$: $l \sim l_c$.
- Averso al Riesgo: si $\forall\, l$: $l_c \succ l$.
- Amante del Riesgo: si $\forall\, l$: $l \succ l_c$.

Actitudes frente al Riesgo

Ejercicio. Un individuo participa en un concurso en el que si se responde correctamente a la primera pregunta se opta a responder a una segunda, y si se acierta la segunda, se opta a responder a una tercera. La ganancia que se obtiene si se acierta la primera pregunta es 16 mil euros y con cada nueva respuesta acertada se doblan las ganancias. Pero si responde erróneamente a una pregunta, se pierde todo lo ganado.

Después de acertar la primera pregunta, el individuo, que cree que conoce la respuesta a cualquier pregunta con probabilidad 1/2, debe decidir si optar a la segunda y/o a la tercera.

Representar el problema mediante un árbol de decisión y resolverlo para un individuo averso al riesgo, para uno neutral al riesgo y para uno amante del riesgo.

Actitudes frente al Riesgo

Proposición 1. Si las preferencias de un individuo sobre loterías están representadas por la función de utilidad de Bernoulli u, el individuo es

- Neutral al Riesgo: si $\forall l$: $Eu(l) = u(E[l])$.
- Averso al Riesgo: si $\forall l$: $Eu(l) < u(E[l])$.
- Amante del Riesgo: si $\forall l$: $Eu(l) > u(E[l])$.

Actitudes frente al Riesgo

Sean $l = (x_1, x_2; \lambda, 1\text{-}\lambda)$, $x_1 \neq x_2$, y $0 < \lambda < 1$. Tenemos

$$Eu(l) = \lambda\, u(x_1) + (1\text{-}\lambda)\, u(x_2)$$

$$E[l] = \lambda x_1 + (1\text{-}\lambda) x_2$$

$$u(E[l]) = u(\lambda x_1 + (1\text{-}\lambda) x_2).$$

La actitud de un individuo frente al riesgo depende del signo de la desigualdad

$$u(\lambda x_1 + (1\text{-}\lambda) x_2) \gtreqless \lambda\, u(x_1) + (1\text{-}\lambda)\, u(x_2),$$

que determina la *curvatura* de la función u.

Actitudes frente al Riesgo

Si el individuo es neutral al riesgo, entonces

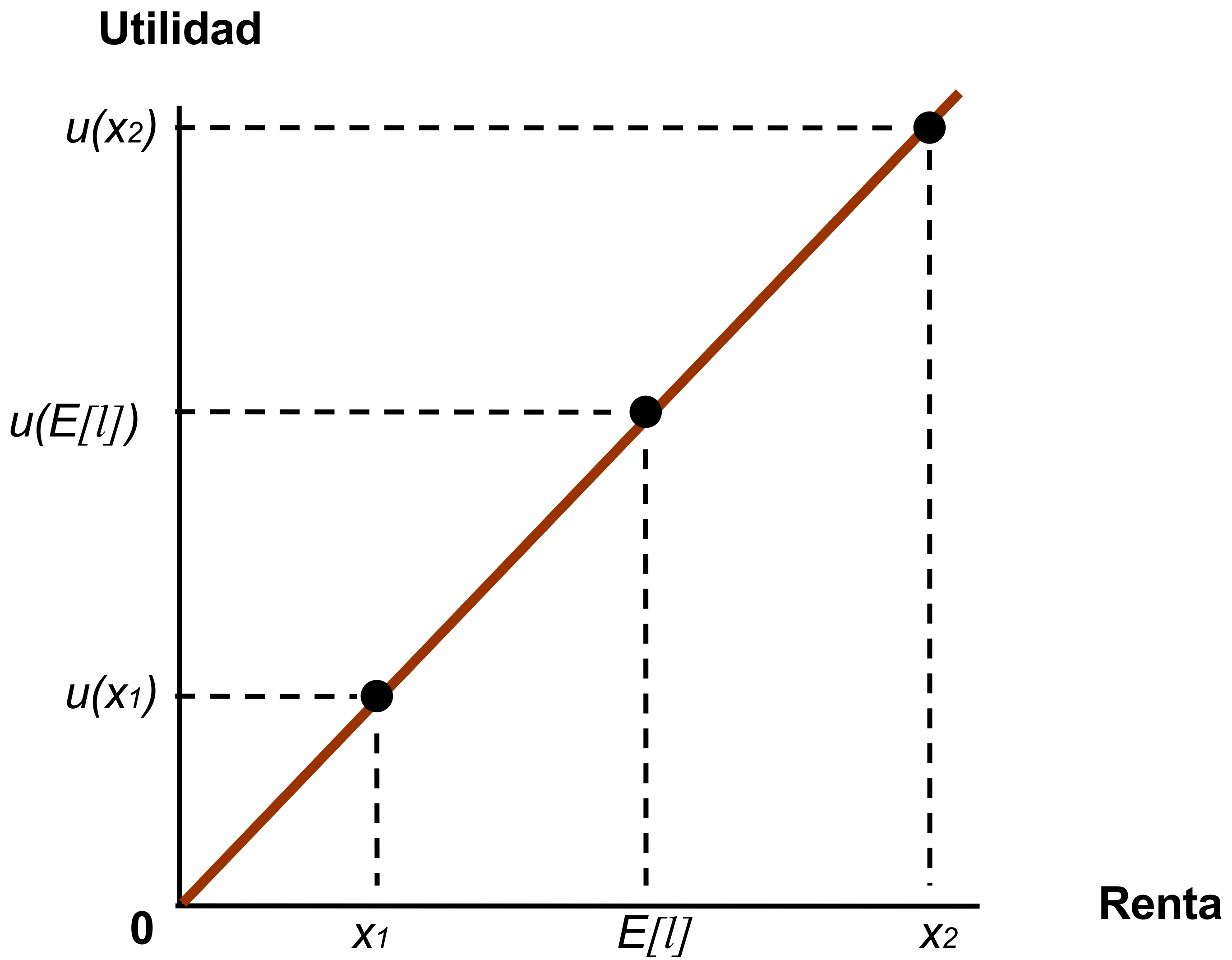
$$\lambda u(x_1) + (1-\lambda)u(x_2) = Eu(l) = u(E[l]) = u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).$$

Puesto que x_1, x_2 y λ son arbitrarias, esto implica que u es una función afín; es decir,

$$u(x) = a + bx.$$

Obsérvese que A.3 implica que $u'(x) = b > 0$.

Neutral al Riesgo



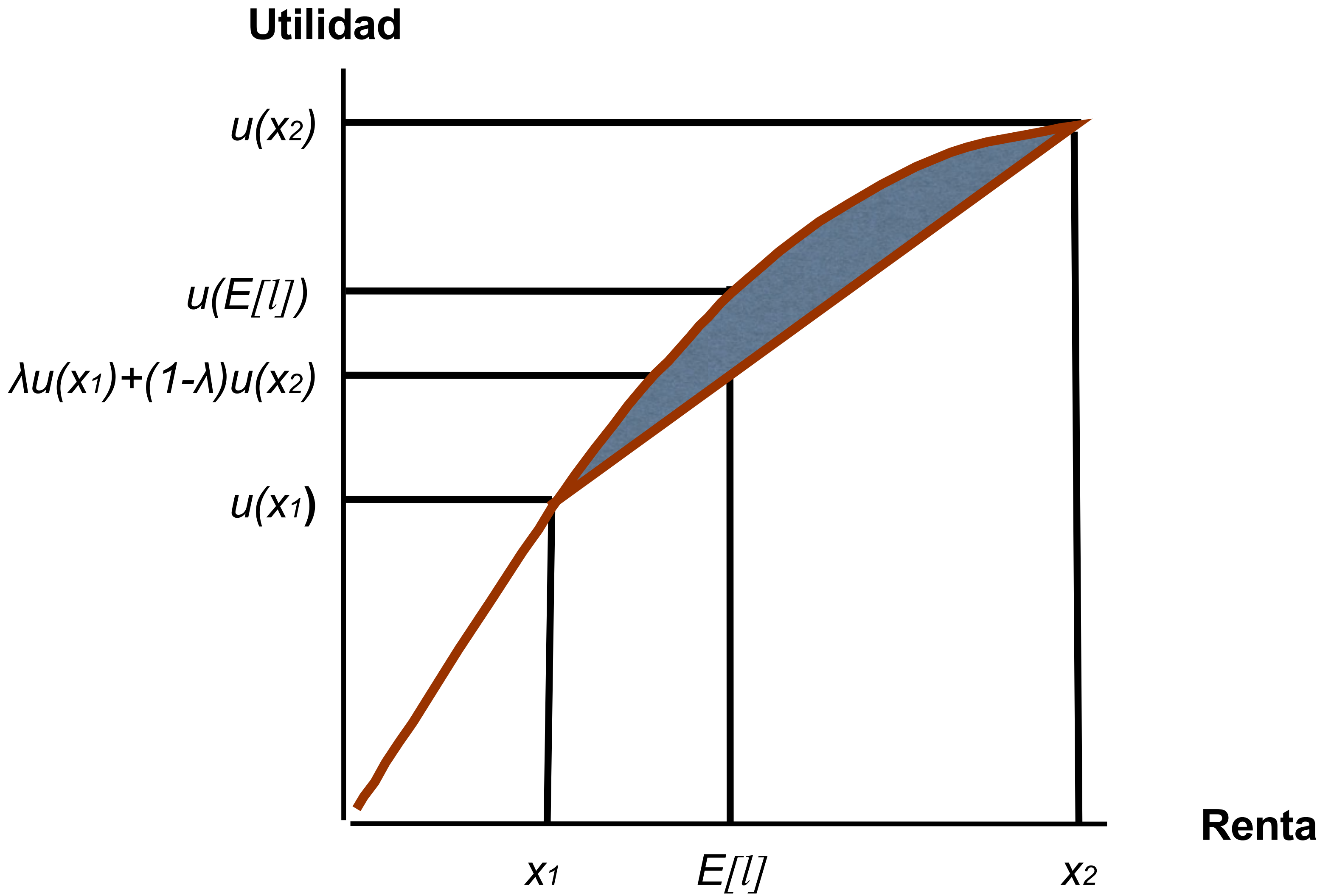
Actitudes frente al Riesgo

Por otra parte, puesto que la lotería *l* es no degenerada, si el individuo es averso al riesgo, entonces

$$\lambda u(x_1) + (1-\lambda)u(x_2) = Eu(l) < u(E[l]) = u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).$$

Es decir, *u* es una función es (estrictamente) cóncava.

Averso al Riesgo



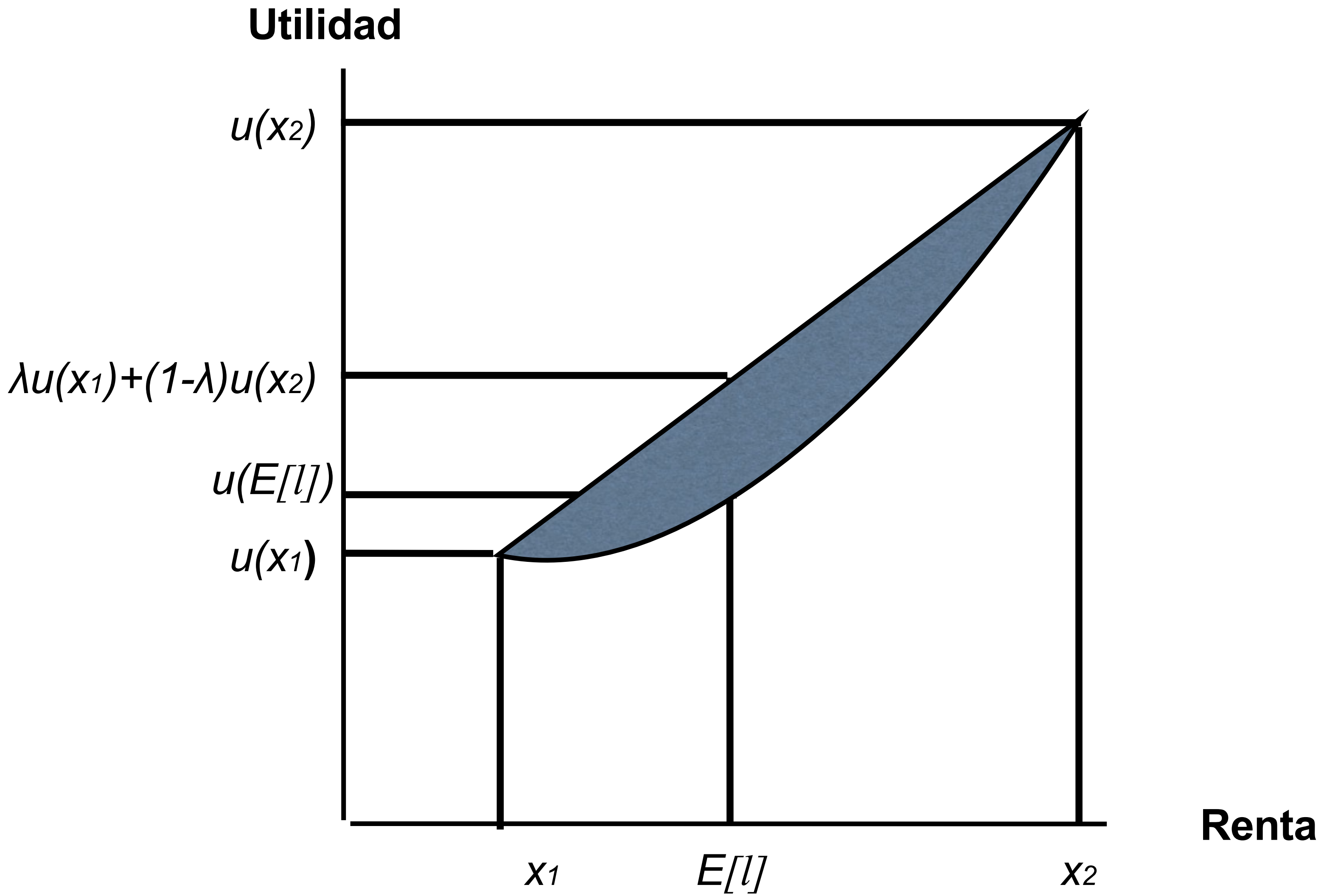
Actitudes frente al Riesgo

Y si el individuo es amante del riesgo, entonces

$$\lambda u(x_1) + (1-\lambda)u(x_2) = Eu(l) > u(E[l]) = u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).$$

Es decir, *u* es una función es (estrictamente) convexa.

Amante del Riesgo



Actitudes frente al Riesgo

Proposición 2. Si las preferencias de un individuo sobre loterías están representadas por la función de utilidad de Bernoulli u, el individuo es

- Neutral al Riesgo: si u es una función afín.
- Averso al Riesgo: si u es una función (estrictamente) cóncava.
- Amante del Riesgo: si u es una función (estrictamente)convexa.

Actitudes frente al Riesgo

Si la función de utilidad de Bernoulli u que representa las preferencias sobre loterías de un individuo es dos veces diferenciable, entonces el individuo es

- Neutral al Riesgo: si $u'' = 0$.
- Averso al Riesgo: si $u'' < 0$.
- Amante del Riesgo: si $u'' > 0$.

Actitudes frente al Riesgo

Obsérvese que mientras que para cualquier función creciente $f: \Re \rightarrow \Re$, la función de utilidad sobre loterías

$$W(l) = f(U(l))$$

representa las mismas preferencias que la función de utilidad $U(l)$.

Este no es el caso para las función de utilidad de Bernoulli. Por ejemplo, las funciones de Bernoulli u_1 y u_2,

$$u_1(x) = x,\ u_2(x) = x^2 = (u_1(x))^2,$$

no representan las mismas preferencias, a pesar de que u_2 es una transformación monótona creciente de u_1.

Mientras que u_1 representa la preferencias de un individuo neutral al riesgo ($Eu_1(l) = E(l)$), la función $u_2(x)$ representa las preferencias de un individuo amante del riesgo.

Actitudes frente al Riesgo

Sin embargo, si u_2 es una transformación afín de u_1, es decir,

$$u_2(x) = a + b\, u_1(x),$$

donde $b > 0$, entonces la funciones de utilidad de Bernoulli u_1 y u_2 representan las mismas preferencias.

Esto es debido simplemente a que la esperanza matemática es un operador lineal. (Si X es una variable aleatoria y $a,b \in \Re$, entonces

$E(a+bX) = a + b\, E(X)$.) Por ello, para cualquier lotería l tenemos

$$E\, u_2(l) = a + b\, E\, u_1(l),$$

y, por consiguiente, $\forall l,l'$:

$$E\, u_2(l) \geq E\, u_2(l') \Leftrightarrow a + b\, E\, u_1(l) \geq a + b\, E\, u_1(l') \Leftrightarrow Eu_1(l) \geq E\, u_1(l').$$

(En particular, todas las funciones lineales crecientes representan las mismas preferencias que la función $u(x) = x$.)

Actitudes frente al Riesgo

Si la función de utilidad de Bernoulli u representa las preferencias de un individuo sobre loterías el *equivalente de certidumbre* de la lotería l, $EC(l)$, es la solución a la ecuación

$$u(x) = Eu(l).$$

Y la *prima de riesgo* de la lotería l, $PR(l)$, es

$$PR(l) = E[l] - EC(l).$$

Actitudes frente al Riesgo

Proposición 3. Un individuo es

- Neutral al Riesgo: si $\forall l : EC(l) = E[l]$.
- Averso al Riesgo: si $\forall l : EC(l) < E[l]$.
- Amante del Riesgo: si $\forall l : EC(l) > E[l]$.

Actitudes frente al Riesgo

Proposición 4. Un individuo es

- Neutral al Riesgo: si $\forall l : PR(l) = 0$.

- Averso al Riesgo: si $\forall l : PR(l) > 0$.

- Amante del Riesgo: si $\forall l : PR(l) < 0$.

Valor de la Información

En situaciones de incertidumbre, la adquisición de información adicional puede permitir al individuo reducir su incertidumbre, ayudándole a seleccionar la mejor alternativa y, en definitiva, a aumentar su bienestar.

Sin embargo, cuando adquirir nueva información es costoso, determinar si el individuo debe adquirir la información requiere un análisis coste-beneficio.

Nos planteamos esta cuestión en el contexto de un ejemplo ya discutido.

Valor de la Información

Ejemplo 1 : Jorge tiene el coche averiado y debe decidir si repararlo o reemplazarlo por otro coche usado cuyo precio es 1.000 euros. Reparar su coche costaría 300 euros si la avería es leve y 1.200 euros si es grave. La probabilidad de que la avería sea grave es 2/3.

¿Cuánto pagaría Jorge por saber de antemano si la avería es leve o grave?

Valor de la Información

Recordemos que Jorge era neutral al riesgo, por lo que podemos representar sus preferencias mediante la función de utilidad de Bernoulli $u(x) = x$, y que su decisión óptima l^* era reparar su coche. Esta decisión le reportaba una utilidad esperada

$$Eu(l^*) = E[l^*] = 1/3\ (-300) + 2/3\ (-1200) = -900.$$

Valor de la Información

Si Jorge supiera con certeza si la avería es leve o grave, podría condicionar su decisión a una situación o la otra, reparando su coche si la avería es leve y sustituyéndolo si es grave.

Por tanto, si dispusiera de esta información antes de decidir, se garantizaría un coste de 300 euros si la avería es leve, y de sólo 1000 euros (el coste del vehículo de ocasión que le ofrecen) si es grave.

Por tanto, enfrentaría la lotería l_I cuya utilidad esperada es

$$Eu(l_I) = E[l_I] = 1/3\ (-300) + 2/3\ (-1000) = -766{,}6.$$

Valor de la Información

¿Cuánto estaría dispuesto a pagar Jorge por esta información que le permite conocer el estado de la naturaleza con certeza?

Si Jorge paga M euros por la información, entonces obtiene una utilidad esperada

$$Eu(l_I(M)) = 1/3\ (-300-M) + 2/3\ (-1000-M) = -(766{,}6 + M).$$

Valor de la Información

La cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar, M*, debe ser tal que añadida al coste de la alternativa óptima en cada estado de la naturaleza le reporte un nivel de utilidad esperada idéntico al que obtendría sin información, $Eu(l^*)$.

Por consiguiente, M* es la solución a la ecuación

$$Eu(l_I(M)) = Eu(l^*).$$

Valor de la Información

Como

$$Eu(l^*) = -900,$$

la cantidad máxima que Jorge pagaría por la información es la solución a la ecuación

$$-(766{,}6 + M^*) = -900;$$

es decir, $M^* = 133{,}3$ euros.

Valor de la Información

Nos referimos a M^* como el *valor de la información (perfecta)* para Jorge.

Observe que el cálculo del valor de la información involucra las preferencias de Jorge. Por consiguiente, este el valor de la información no es *objetivo* sino *subjetivo*.

Valor de la Información

Obsérvese que como Jorge es neutral al riesgo y representamos sus preferencias mediante $u(x) = x$, tenemos

$$Eu(l) = E[l],$$

y

$$Eu(l_I(M)) = E[l_I] - M.$$

Por ello, en este caso

$$Eu(l_I(M^*)) = Eu(l^*) \Leftrightarrow E[l_I] = E[l^*] - M^*.$$

Es decir,

$$M^* = E[l_I] - E[l^*].$$

Valor de la Información

Sin embargo, esta fórmula no es correcta cuando el individuo no es neutral al riesgo. Comprobémoslo.

Supongamos que las preferencias de Jorge están representadas por la función de utilidad de Bernoulli

$$u(x) = \sqrt{(1200 + x)}.$$

Como $u''(x) < 0$, Jorge es ahora averso al riesgo.

Su utilidad esperada si repara el coche es

$$Eu(l_R) = 1/3 \sqrt{900} + 2/3 \sqrt{0} \approx 10.$$

Valor de la Información

Su utilidad esperada si lo sustituye por uno usado es

$$Eu(l_S) = \sqrt{200} \approx 14,14.$$

Por consiguiente,

$$Eu(l_S) > Eu(l_R);$$

con estas preferencias (y creencias) la decisión óptima es sustituir el coche, $l^* = l_S$.

Valor de la Información

Por otra parte, si Jorge conociera el estado de la naturaleza repararía el coche si la avería es leve pero lo sustituiría si es grave. (justificar).

Por tanto, si Jorge paga M euros por la información, su utilidad esperada sería

$$Eu(l_I(M)) = 1/3 \sqrt{1200-300-M} + 2/3 \sqrt{1200-1000-M}.$$

Valor de la Información

El valor de la información lo obtenemos de resolver la ecuación

$$Eu(l_I(M)) = Eu(l^*);$$

es decir,

$$1/3 \sqrt{900-M} + 2/3 \sqrt{200-M} = \sqrt{200}.$$

Resolviendo, obtenemos

$$M^* \approx 144{,}23 \neq 133{,}3.$$

Valor de la Información

La fórmula obtenida en este ejemplo para calcular el valor de la información,

$$Eu(l_I(M)) = Eu(l^*),$$

nos permite en general calcular el valor de la información, ya se información perfecta, como en el ejemplo, o imperfecta o parcial.

Sin embargo, cuando la información es parcial, el cálculo de la lotería $l_I(M)$, que requiere identificar la alternativa óptima en función de la realización de esta información, puede ser complicado.

Valor de la Información

Valor de la Información Imperfecta

Ejercicio 4. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar Pedro Banderas por saber si la película se estrenará o no?