1. Sea el proceso
$$X_t = 1 + 0{,}7X_{t-1} - 0{,}25X_{t-2} + \varepsilon_t$$
donde $\varepsilon_t \sim WN(0,4)$.
   (a) (5 points) ¿Es el proceso causal?
   (b) (5 points) Calcule la esperanza de X_t
   (c) (10 points) Calcule la varianza de X_t, así como las autocorrelaciones de órdenes 1 y 2 (ρ_1, y ρ_2)
   (d) (10 points) Los dos últimos valores de la muestra son $X_{199} = 3$ y $X_{200} = 2{,}9$. Calcule las predicciones para X_{201}, X_{202} y X_{203}. Calcule las varianzas de los errores de predicción correspondientes.

Solution:

(a) Podemos expresar el modelo como:
$$\phi(L)X_t = 1 + \varepsilon_t$$
$$\phi(L) = 1 - 0{,}7L + 0{,}25L^2$$
La raíz del polinomio será compleja y su conjugada correspondiente: $1{,}4 \pm 1{,}428286i$. el valor absoluto es igual a 2 luego el proceso es causal.

(b) Dado que el proceso es estacionario:
$$E(X_t) = E(X_{t-1}) = E(X_{t-2}) = \mu.$$
Por tanto, teneindo en cuenta que $E(\varepsilon_t) = 0$,
$$\mu = \frac{1}{1 - 0{,}7 + ,25} = 1{,}82$$

(c) Expresamos el modelo en desviaciones frente a la media:
$$\dot{X}_t - 0{,}7\dot{X}_{t-1} + 0{,}25\dot{X}_{t-2} = \varepsilon_t.$$
Esta expresión la premultiplicamos por $\dot{X}_t$, $\dot{X}_{t-1}$ y $\dot{X}_{t-2}$, respectivamente y aplicamos esperanzas:
$$\gamma_0 - 0{,}7\gamma_1 + ,25\gamma_2 = 4$$
$$\gamma_1 - 0{,}7\gamma_0 + ,25\gamma_1 = 0$$
$$\gamma_2 - 0{,}7\gamma_1 + 0{,}25\gamma_0 = 0$$
donde hemos tenido en cuenta que:
$$E(X_t, X_{t-j}) = \gamma_j, \qquad E(X_t\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 = 4 \qquad E(X_{t-j}, \varepsilon_t) = 0 \quad \forall j \neq 0.$$

Las soluciones son:

$$\gamma_0 = 6{,}216 \qquad \gamma_1 = 3{,}481 \qquad \gamma_2 = 0{,}882$$

γ_0 es la varianza de X. Las autocorrelaciones son:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 0{,}45 \qquad \rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = 0{,}142$$

(d) Las predicciones son:

$$X_{200}(1) = 1 + 0{,}7X_{200} + -0{,}25X_{199} = 2{,}28$$
$$X_{200}(2) = 1 + 0{,}7X_{200}(1) - 0{,}25X_{200} = 1{,}871$$
$$X_{200}(3) = 1 + 0{,}7X_{200}(2) - 0{,}25X_{200}(1) = 1{,}7397$$

Para calcular las varianzas de los errores de predicción necesitamos expresarel polinomio en forma MA de orden infinito. en concretamos, necesitamoslos coeficientes Ψ_1 y Ψ_2, que toman los valores:

$$\Psi_1 = ,7 \qquad \Psi_2 = ,24.$$

Las varianzas de los errores de predicción son:

$$V(e_T(1)) = \sigma_\varepsilon^2 = 4$$
$$V(e_T(2)) = (1 + \psi_1^2)\sigma_\varepsilon^2 = 5{,}96$$
$$V(e_T(3)) = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2)\sigma_\varepsilon^2 = 6{,}19$$

2. Tenemos el modelo
$$Y_t = -0{,}5Y_{t-1} + 0{,}5X_t - 0{,}3X_{t-1} + u_t$$
   (a) (10 points) ¿Es causal el modelo?
   (b) (10 points) ¿Cuál es el efecto contemporáneo de una variación de X sobre la variable Y?
   (c) (10 points) ¿Cuál es el efecto total (acumulado) de una variación de X sobre la variable Y?

Solution:

(a) El modelo lo podemos escribir de diferentes formas:
$$\phi(L)Y_t = \theta(L)X_t + u_t$$
$$Y_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}X_t + u_t$$
$$\phi(L) = 1 + 0{,}5L \qquad \theta(L) = 0{,}5 - 0{,}3L$$
En cualquier caso, la raíz del polinomiio $\theta(L)$ tiene valor absoluto mayor que uno, luego el modelo es causal.

(b) $\theta_0 = 0{,}5$

(c) $\frac{0{,}5-0{,}3}{1+0{,}5} = {,}13$

3. (15 points) Hemos analizado varias regresiones dinámicas, como se ve en la Tabla.

	m1	m2	m3	m4
(Intercept)	0,003	0,002	0,002	0,002
	(0,001)	(0,001)	(0,001)	(0,001)
Y(t-1)	0,181	0,213	0,193	0,200
	(0,077)	(0,076)	(0,076)	(0,077)
Y(t-2)	0,213	0,245	0,234	0,227
	(0,077)	(0,076)	(0,075)	(0,077)
X	0,012		0,011	
	(0,005)		(0,005)	
X(t-1)	0,001			0,003
	(0,006)			(0,006)
X(t-2)	0,007			0,005
	(0,006)			(0,005)

Cuadro 1: Modelos pregunta 3. La variable dependiente es Y_t en todos los casos. Los valores entre paréntеesis son los errores estándar.

Modelo no restringido	Modelo restringido	F-stat	p-valor
M1	M2	2.0096	0.1147
M1	M3	0.9867	0.375
M1	M4	4.5181	0.03505
M3	M2	4.056	0.04565
M4	M2	0.7394	0.479

Cuadro 2: Contrastes realizados en los modelos de la pregunta 3.

La variable dependiente es Y en todos los modelos, y las variables explicativas son retardos de las variables X e Y. ¿Qué podemos asegurar acerca de la causalidad de X sobre Y?

Solution: Para contrastar la causalidad en sentido de Granger debemos usar como base el modelo M4. El modelo restringido es M2. Por tanto, el contrastees el que aparece en la última fila. Al no poder rechazar la hipótesis nula de que los coeficientes correspondientes a los retardos de la variable X son iguales a cero, no podemos descartar la ausencia de causalidad en sentido de Granger.

4. Se han estimado 3 modelos para una variable determinada:

$$\Delta Y_t = \delta + \gamma t + bY_{t-1} + \theta_1 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

$$\Delta Y_t = \delta + bY_{t-1} + \theta_1 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2}$$

$$\Delta Y_t = bY_{t-1} + \theta_1 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3}$$

donde suponemos que $\varepsilon_t \sim WN$.

	EQ1	EQ2	EQ3
(Intercept)	0,802	0,066	
	(0,536)	(0,406)	
trend	0,007		
	(0,003)		
Y(t-1)	−0,012	0,001	0,002
	(0,007)	(0,003)	(0,001)
Δ Y(t-1)	0,330	0,332	0,331
	(0,059)	(0,059)	(0,059)

Cuadro 3: Resultados de pregunta 4. La variable dependiente es ΔY_t. Los valores entre parénteesis son los errores estándar.

- Los resultados de la primera ecuación son los de la primera columna de la Tabla, y el valor crítico del contraste ADF es -3.42.
- Los resultados de la segunda ecuación son los que aparecen en la segunda columna de la Tabla, y el valor crítico del contraste ADF es -2.87.
- Los resultados de la tercera ecuación son los que aparecen en la tercera columna de la Tabla, y el valor crítico del contraste ADF es -1.95.

A la vista de los resultados anteriores:

(a) (10 points) ¿Piensa que la serie tiene una raíz unitaria?

(b) (10 points) Si la perturbación ε_t sufre un shock: ¿el efecto sobre la variable Y será permanente o transitorio?

(c) (5 points) ¿La variable Y tiene tendencia estocástica?

Solution:

(a) En este caso el estadístico DF toma los valores:

$$\frac{-0{,}012}{0{,}007} = -1{,}71 \qquad \frac{0{,}001}{0{,}003} = 0{,}33 \qquad \frac{0{,}002}{0{,}001} = 2$$

para los casos respectivos. No se rechaza la hipótesis nula $(b = 0)$ en ningn caso, luego tenemos raíz unitaria.

(b) Como tenemos raíz unitaria, el efecto es permanente.

(c) Como tenemos raíz unitaria, hay tendencia estoc'astica