Nombre y apellidos: ....

DNI: ....

Grupo: ....

EXÁMEN EXTRAORDINARIO DE TÉCNICAS ECONOMÉTRICAS
(22 Junio, 2018)

Lea cuidadosamente cada pregunta. Responda de forma clara en el espacio asignado. Observe que los valores numéricos decimales se denotan por un "punto" en lugar de una "coma". **El valor de cada pregunta está entre paréntesis junto a la misma.**

Las notas aparecerán en "Aula global" dentro del plazo reglamentario. Cada profesor anunciará el lugar y hora de revisión vía Aula Global y/o en su página web. Cualquier cambio será anunciado con la antelación en dichas páginas.

Duración: 120 **minutos**. **Puntuación Total:** 100.

Buena suerte

Pregunta 1 [34 Puntos]

Los rendimientos trimestrales de las acciones de la empresa **HANSOLO** se modelizan vía el siguiente modelo $\{S_t\}$ definido como

$$S_t = 2 + 0.8S_{t-1} + 0.1S_{t-2} + \varepsilon_t,$$

donde ε_t es el término de error iid tal que $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

(a) (6 puntos) ¿Bajo qué condición este proceso es invertible?

Solución: Es un proceso AR(2), es invertible por definición.

(b) (6 puntos) ¿Bajo qué condición este proceso es causal?

Solución: Hay que comprobar que las raíces del polinomio $1 - 0.8L - 0.1L^2$ están fuera del círculo unidad.

$$L_1 = 1.099 \text{ y } L_2 = -9.099$$

Ambas son mayores que 1 en valor absoluto, por lo que el proceso es causal.

(c) (10 puntos) Proporcione su representación MA(∞), si es posible, al menos los primeros tres coeficientes.

Solución: La representación MA(∞) es $S_t = \mu + \psi(L)\varepsilon_t$, donde

$$\mu = \frac{2}{1 - 0.8 - 0.1} = 20,$$

$$\psi(L) = \frac{1}{1 - 0.8L - 0.1L^2} = 1.0 + 0.8L + 0.74L^2 + 0.672L^3 + ...$$

(d) (6 puntos) Calcule la media y la varianza de S_t.

Solución:

$$E[S_t] = 2 + 0.8E[S_{t-1}] + 0.1E[S_{t-2}] + 0, \quad E[S_t] = \frac{2}{1 - 0.8 - 0.1} = 20.$$

$$Var[S_t] = 0.8^2 Var[S_{t-1}] + 0.1^2 Var[S_{t-2}] + 2 * 0.8 * 0.1\gamma_S(1) + 1,$$

$$\gamma_S(1) = Cov(S_t, S_{t+1}) = Cov(S_t, 2 + 0.8S_t + 0.1S_{t-1} + \varepsilon_{t+1}),$$

$$\gamma_S(1) = 0.8Var(S_t) + 0.1\gamma_S(1),$$

$$\gamma_S(1) = \frac{0.8 * Var(S_t)}{1 - 0.1},$$

$$Var[S_t] = 4.81$$

(e) (6 puntos) Calcule la autocorrelación de primer y segundo orden de S_t.

Solución:

$$\gamma_0 - 0.8\gamma_1 - 0.1\gamma_2 = 1$$
$$\gamma_1 - 0.8\gamma_0 - 0.1\gamma_1 = 0$$
$$\gamma_2 - 0.8\gamma_1 - 0.1\gamma_0 = 0$$
$$\gamma_0 = 4.81, \gamma_1 = 4.28, \gamma_2 = 3.91$$
$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 0.89$$
$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = 0.81$$

Pregunta 2 [30 Puntos]

Economistas de la **UC3M** quieren estudiar la relación causal entre el PIB (X_t) y el tipo de interés (Z_t) en España. Para ello, han propuesto el siguiente modelo

$$X_t = \frac{5L}{1 - 0.9L + 0.2L^2} Z_t + u_t, \qquad (1)$$

donde L denota el operador de retardo y u_t es el término de error i.i.d con media cero y varianza igual a 1.

(a.) (10 puntos) Escriba el modelo anterior sin el operador de retardo. ¿Cuál es la clasificación del modelo? ¿Es estable?

Solución: El modelo sin operador de retardo es

$$X_t - 0.9X_{t-1} + 0.2X_{t-2} = 5Z_{t-1} + v_t; \quad v_t = u_t - 0.9u_{t-1} + 0.2u_{t-2}$$

El nuevo ruido aleatorio v_t tiene media 0 y varianza $\sigma_v^2 = 1.85\sigma^2$. Dado que el ruido v_t sigue un proceso $MA(2)$ hay correlación serial de orden j, para $j = 1, 2$.
El modelo es un $ARDL(2, 1)$ y es estable, puesto que las raćes del polinomio AR son 2 y 2.5, cada una de las cuales es mayor que 1.

(b.) (6 puntos) Calcule los coeficientes de Z_t, Z_{t-1}, Z_{t-2}, Z_{t-3}, en el modelo de retardos distribuidos

$$X_t = \delta_0 Z_t + \delta_1 Z_{t-1} + \delta_2 Z_{t-2} + \delta_3 Z_{t-3} + ... + u_t. \qquad (2)$$

Solución: Los coeficientes requeridos se calculan, como siempre, a partir de la ecuacin:

$$\delta(L) = \frac{5L}{1 - 0.9L + 0.2L^2}$$

se obtiene $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 5$, $\delta_2 = 4.5$ y $\delta_3 = 3.05$.

(c.) (8 puntos) Calcule el multiplicador de corto plazo (multiplicador de impacto) y el multiplicador de largo plazo (multiplicador total).

Solución: Multiplicador de Impacto: $\delta_0 = 0$
Multiplicador Total:

$$m_T = \frac{5(1)}{1 - 0.9(1) + 0.2(1)^2} = \frac{5}{0.3} = 16.6667$$

(d.) (6 puntos) Calcule el retardo mediano.

Solución: El retardo mediano se obtiene observando que

$$\frac{m_0^0}{m_T} = 0 < 0.5$$

$$\frac{m_0^1}{m_T} = \frac{5}{16.6667} < 0.5$$

$$\frac{m_0^2}{m_T} = \frac{5 + 4.5}{16.6667} > 0.5$$

Con lo cual el retardo mediano es $q = 2$.

Pregunta 3 [36 Puntos]

Investigadores de la prestigiosa empresa **Industrias STARK** han modelado la tasa de destrucción de residuos de la misma como

$$R_t = 0.5 + R_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{3}$$

donde ε_t es un proceso iid con media cero y varianza 1.

(a.) (6 puntos) ¿ Es este proceso $\{R_t\}$ un proceso estacionario?

Solución: El proceso $\{R_t\}$ no es estacionario (en covarianzas) porque la raíz del polinomio AR está en el círculo unidad.

(b.) (12 puntos) Sea $I_t = \{R_1, ..., R_T, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_T\}$ el conjunto de información en T. Calcule la predicción de R_{T+h} con mínimo Error Cuadrático Medio, $\hat{R}_{T+h|T}$ para cada $h > 0$. Para $R_T = 0.7$, calcule la predicción puntual de la variable R cinco períodos hacia delante, $\hat{R}_{T+5|T}$.

Solución: Sustituyendo de forma recursiva, se obtiene

$$R_{T+h} = R_T + 0.5 * h + \sum_{i=1}^{h} \varepsilon_{T+i}$$

Tal que,

$$E[R_{T+h}] = R_T + 0.5 * h$$

Entonces, $\hat{R}_{T+5|T} = 0.7 + 0.5 * 5 = 3.2$.

(c.) (6 puntos) Calcule el error de predicción e_{T+h} para R_{T+h}.

Solución:

$$e_{T+h} = R_{T+h} - \hat{R}_{T+h|T}$$

$$e_{T+h} = R_T + 0.5 * h + \sum_{i=1}^{h} \varepsilon_{T+i} - (R_T + 0.5 * h)$$

$$e_{T+h} = \sum_{i=1}^{h} \varepsilon_{T+i}$$

(d.) (6 puntos) Calcule la varianza del error de predicción para R_{T+h}. ¿Cuál es la varianza del error de predicción para R_{T+5}?

Solución:

$$Var(e_{T+h}) = Var(\sum_{i=1}^{h} \varepsilon_{T+i}) = h * \sigma^2$$

Entonces, $Var(e_{T+h}) = 5$

(e.) (6 puntos) Calcule un interalo de confianza del 95% para la predicción de R_{T+h}. Si $R_T = 0.7$, ¿Cuál es el intervalo para la predicción para R_{T+5}?

Solución: Como los errores son normales, con un 95% de confianza la variable R_{T+h} estará en el intervalo

$$CI^{95\%}_{\hat{R}_{T+h|T}} = [R_T + 0.5 * h - 1.96 * \sigma * \sqrt{h}, R_T + 0.5 * h + 1.96 * \sigma * \sqrt{h}]$$

En el caso concreto de R_{T+5} el intervalo de confianza de su predicción es:

$$CI^{95\%}_{\hat{R}_{T+5|T}} = [-1.182, 7.582].$$