Nombre y Apellidos: ....

ID: ....

Grupo: ....

¿Ha realizado evaluación continua? ....

SOLUCIONES

EXAMEN de TÉCNICAS ECONOMÉTRICAS

(Junio 2013, Convocatoria extraordinaria)

Lea cuidadosamente cada pregunta. Responda muy claramente dentro del espacio asignado. A efectos de corrección **únicamente** se tendrá en cuenta lo respondido en este espacio. Observe que los valores numéricos están en formato ordenador. **El valor de cada pregunta se indica entre corchetes**.

Las notas del examen aparecerán en aula global el día 19-20. La revisión será el día 21 (cada profesor anunciará el lugar y hora vía Aula Global o en su página web). Cualquier cambio se anunciará con la antelación posible en dichas páginas.

Tiempo límite: 90 minutos. **Total de puntos:** 100.

BUENA SUERTE

Pregunta 1 [35 Puntos]

Considere el siguiente modelo para la variable macroeconómica y_t:

$$y_t = 0.01 + 0.5u_{t-1} + 0.1u_{t-2} + u_t,$$

donde $\{u_t\}$ es i.i.d con media cero y varianza σ^2.

(a.) [**5 Puntos**] Calcula la esperanza y varianza incondicional de y_t.

Solución: La esperanza incondicional de y_t es:

$$E[y_t] = E[0.01 + 0.5u_{t-1} + 0.1u_{t-2} + u_t] = 0.01.$$

Para la varianza incondicional de y_t, observe que u_t es iid $(0, \sigma^2)$ y por lo tanto la correlación entre u_t y u_{t-k} es cero para $k \neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
Var(y_t) &= Var(0.01 + 0.5u_{t-1} + 0.1u_{t-2} + u_t) \\
&= 0.25Var(u_{t-1}) + 0.01Var(u_{t-2}) + Var(u_t) \\
&= 1.26\sigma^2.
\end{aligned}$$

(b.) [**5 Puntos**] Calcula la autocovarianza de primer y segundo orden de y_t.

Solución: La autocovarianza de primer orden es

$$\begin{aligned}
Cov(y_t, y_{t-1}) &= \gamma(1) = E[(y_t - E[y_t])(y_{t-1} - E[y_{t-1}])] \\
&= E[(0.5u_{t-1} + 0.1u_{t-2} + u_t)(0.5u_{t-2} + 0.1u_{t-3} + u_{t-1})] \\
&= E\left[0.5u_{t-1}^2 + 0.1 * 0.5u_{t-2}^2\right] \\
&= 0.5\sigma^2 + 0.05\sigma^2 \\
&= 0.55\sigma^2.
\end{aligned}$$

La de segundo orden es

$$\begin{aligned}
Cov(y_t, y_{t-2}) &= \gamma(2) = E[(y_t - E[y_t])(y_{t-2} - E[y_{t-2}])] \\
&= E[(0.5u_{t-1} + 0.1u_{t-2} + u_t)(0.5u_{t-3} + 0.1u_{t-4} + u_{t-2})] \\
&= E\left[0.1u_{t-2}^2\right] \\
&= 0.1\sigma^2.
\end{aligned}$$

(c.) [**5 Puntos**] Describa como son las autocovarianzas para retardos mayor que 2.

Solución: La autocovarianza para cualquier retardo $k > 2$ viene dada por

$$\begin{aligned} Cov\left(y_t, y_{t-k}\right) &= \gamma\left(k\right) = E\left[\left(y_t - E\left[y_t\right]\right)\left(y_{t-k} - E\left[y_{t-k}\right]\right)\right] \\ &= E\left[\left(0.5u_{t-1} + 0.1u_{t-2} + u_t\right)\left(0.5u_{t-1-k} + 0.1u_{t-2-k} + u_{t-k}\right)\right] \\ &= E\left[\begin{array}{c} 0.25u_{t-1}u_{t-1-k} + 0.05u_{t-1}u_{t-2-k} + 0.5u_{t-1}u_{t-k} \\ +0.05u_{t-2}u_{t-1-k} + 0.01u_{t-2}u_{t-2-k} + 0.1u_{t-2}u_{t-k} \\ +0.5u_{t-1-k}u_t + 0.1u_{t-2-k}u_t + u_{t-k}u_t \end{array}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que E[términos cruzados] $= 0$ al ser u_t iid $(0,\ \sigma^2)$.

(d.) [**5 Puntos**] Con la información de las respuestas anteriores diga que modelo sigue y_t ¿Es y_t estacionario débil? ¿Es causal?

Solución: MA(2). Estacionario débil ya que la media y la varianza son constantes y la autocovarianza solo depende de k. Es causal por ser un MA.

(e.) [**5 Puntos**] ¿Es el modelo que sigue y_t invertible?

Solución: El modelo MA(2) es invertible ya que las raices del polinomio $(0.1z^2 + 0.5z + 1) = 0$ son $z = -2.5 \pm 1.94i$ mayores que uno en modulo.

(f.) [**5 Puntos**] ¿Cuál es la esperanza condicional de y_{t+1} dada toda la información disponible en t?

Solución: El conjunto de información en t es $I_t = (u_0, u_1, ..., u_t)$. La esperanza condicional dado I_t es

$$\begin{aligned} E\left[y_{t+1} \left| u_0, u_1, ..., u_t\right.\right] &= E\left[0.01 + 0.5u_t + 0.1u_{t-1} + u_{t+1} \left| u_0, u_1, ..., u_t\right.\right] \\ &= 0.01 + 0.5u_t + 0.1u_{t-1} + E\left[u_{t+1} \left| u_0, u_1, ..., u_t\right.\right] \\ &= 0.01 + 0.5u_t + 0.1u_{t-1}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene porque u_t es iid $(0,\ \sigma^2)$ y por tanto $E\left[u_{t+1} \left| u_0, u_1, ..., u_t\right.\right] = E\left[u_{t+1}\right] = 0$.

(g.) [**5 Puntos**] Suponga que $u_T = 0.02$ y $u_{T-1} = 0.1$. ¿Cuál es la mejor predicción (mínimo Error Cuadrático Medio) de y_{T+1}?

Solución: La esperanza condicional

$$E\left[y_{T+1}\left|u_0, u_1, ..., u_T\right.\right] = 0.01 + 0.5u_T + 0.1u_{T-1}.$$

Substituyendo $u_T = 0.02$ y $u_{T-1} = 0.1$ se obtiene

$$\begin{aligned} E\left[y_{T+1}\left|u_0, u_1, ..., u_T\right.\right] &= 0.01 + 0.5 * 0.02 + 0.1 * 0.1 \\ &= 0.03. \end{aligned}$$

Pregunta 2 [36 Puntos]

P.**2.1** Economistas de la prestigiosa universidad **Carlos III-Chicago 0** han modelado la tasa de déficit púbico (d_t) de Noruega como:

$$d_t = 23.4 + 0.6d_{t-1} - 0.2d_{t-2} + \varepsilon_t,$$

donde $\{\varepsilon_t\}$ is un proceso iid con media cero y varianza 1. Los datos señalan que $d_{T-1} = 50$ y $d_T = 40$.

(a.) [**6 Puntos**] Compute la predicción (menor ECM) del déficit público de Noruega dos periodos hacia adelante: $\hat{d}_{T+2|T}$.

Solución: Primero, observe que la predicción un periodo hacia adelante es:

$$\begin{aligned}
\hat{d}_{T+1|T} &= E\left[d_{T+1}\left|d_0, ...d_T\right.\right] \\
&= E\left[23.4 + 0.6d_T - 0.2d_{T-1} + \varepsilon_{T+1}\left|d_0, ...d_T\right.\right] \\
&= 23.4 + 0.6d_T - 0.2d_{T-1} + E\left[\varepsilon_{T+1}\left|d_0, ...d_T\right.\right] \\
&= 23.4 + 0.6 * 40 - 0.2 * 50 \\
&= 23.4 + 24 - 10 \\
&= 37.4.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la predicción dos periodos hacia adelante es:

$$\begin{aligned}
\hat{d}_{T+2|T} &= E\left[d_{T+2}\left|d_0, ...d_T\right.\right] \\
&= E\left[23.4 + 0.6d_{T+1} - 0.2d_T + \varepsilon_{T+2}\left|d_0, ...d_T\right.\right] \\
&= 23.4 + 0.6 * \hat{d}_{T+1|T} - 0.2d_T + E\left[\varepsilon_{T+2}\left|d_0, ...d_T\right.\right] \\
&= 23.4 + 0.6 * 37.4 - 0.2 * 40 \\
&= 23.4 + 22.44 - 8 \\
&= 37.84.
\end{aligned}$$

(b.) [**6 Puntos**] Compute la predicción (menor ECM) de largo plazo, es decir, el límite de $\hat{d}_{T+h|T}$ cuando h tiende hacia infinito: $\lim\limits_{h\to\infty} \hat{d}_{T+h|T}$.

Solución: Sabemos que para un modelo estacionario como el que sigue d_t el límite de la predicción $\hat{d}_{T+h|T}$ cuando h tiende a infinito viene dada por la media incondicional, $\lim\limits_{h\to\infty} \hat{d}_{T+h|T} = E\left[d_t\right]$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to\infty} \hat{d}_{T+h|T} &= E\left[d_t\right] = \frac{23.4}{1 - 0.6 + 0.2} \\
&\simeq 39.
\end{aligned}$$

P.**2.2** [**6 Puntos**] Considere la variable aleatoria w. Con un cierto método de predicción se han realizado tres predicciones con los correspondientes errores de predicción: -1, -2, y -6. Compute el Error Absoluto Medio de w (en inglés $MAE\,(w)$).

Solución: El MAE de la predicción de w es

$$MAE(w) = \frac{1}{3}\left(|-1| + |-2| + |-6|\right) = \frac{9}{3} = 3.$$

P.2.3 Investigadores de la prestigiosa universidad **Carlos III-Harvard 0** han modelado la tasa de paro (ur) en Europa como:

$$ur_t = 1 + 0.7ur_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.14\varepsilon_{t-2}, \tag{1}$$

donde $\{\varepsilon_t\}$ es un proceso iid con media cero y varianza 1.

(a.) [**6 Puntos**] ¿Cuántas raíces o factores comunes tiene este modelo (1)?

Solución: Hay una raíz o factor común que es : $(1 - 0.7L)$:

Polinomio AR(1)l: $(1 - 0.7L)$.
Polinomio MA(2): $(1 - 0.5L - 0.14L) = (\mathbf{1} - \mathbf{0.7L})(1 + 0.2L)$.

(b.) [**6 Puntos**] Elimine los posibles factores o raíces comunes que pudieran existir. Después de esta posible eliminación compute la predicción puntual (menor ECM) de la tasa de paro a uno, dos y tres periodos hacia adelante dada la información en T, es decir, $\widehat{ur}_{T+1|T}$, $\widehat{ur}_{T+2|T}$ y $\widehat{ur}_{T+3|T}$, respectivamente..

Solución: $\widehat{ur}_{T+1|T} = 1/(1 - 0.7) + 0.2\varepsilon_T$; $\widehat{ur}_{T+2|T} = \widehat{ur}_{T+3|T} = 1/(1 - 0.7) = 3.333$.

(c.) [**6 Puntos**] Las predicciones anteriores tienen su correspondiente error. ¿Cual es la varianza de estos erroes de predicción?

Solución: $Var\left(ur_{T+1} - \widehat{ur}_{T+1|T}\right) = 1$; $Var\left(ur_{T+2} - \widehat{ur}_{T+2|T}\right) = Var\left(ur_{T+3} - \widehat{ur}_{T+3|T}\right) = 1.04.$

Pregunta 3 [29 Puntos]

Economistas de la prestigiosa universidad **Carlos III-Princeton 0** están interesados en analizar el impacto de los tipos de interés (i_t) en el PNB (g_t). Para realizar esta tarea estiman el siguiente modelo:

$$g_t = \frac{2.5}{1 - 0.5L + 0.25L^2} i_{t-1} + e_t, \tag{2}$$

donde $\{e_t\}$ es ruido blanco con media cero y varianza σ^2. Como ayudante de investigación tiene que obtener algunas de las propiedades de este modelo para facilitar su uso práctico.

(a.) [**5 Puntos**] Escriba el modelo sin el operador de retardos (L). ¿Cuál es la media y la varianza del nuevo termino de error? ¿Está correlociando? Si fuera así, ¿de qué orden es la correlación?

Solución: Sin el operador de retardos el modelo es:

$$g_t - 0.5g_{t-1} + 0.25g_{t-2} = 2.5i_{t-1} + v_t; \quad v_t = e_t - 0.5e_{t-1} + 0.25e_{t-2}.$$

El nuevo termino de error v_t tiene media cero y varianza $\sigma_v^2 = 1.3125\sigma^2$. v_t sigue un proceso $MA(2)$ por lo que tiene correlación serial de orden 2.

(b.) [**6 Puntos**] Clasifique y determine si el proceso (2) es estable.

Solución: El modelo es un ARDL(2,1) y es estable porque las raices del polinomio $1-0.5z+0.25z^2$ son $1-1.74i$ y $1+1.74i$, con modulo mayor que uno.

(c.) [**9 Puntos**] Compute los coeficientes de la variable tipo de interés i_t, i_{t-1}, i_{t-2} y i_{t-3}, en la ecuación siguiente:

$$g_t = \delta_0 i_t + \delta_1 i_{t-1} + \delta_2 i_{t-2} + \delta_3 i_{t-3} + ... + e_t.$$

Solución: Los coeficientes requeridos se calculan usando la ecuación

$$\delta(L) = \frac{2.5L}{1 - 0.5L + 0.25L^2},$$

$\Rightarrow$

$$\left(\delta_0 + \delta_1 L + \delta_2 L^2 + \delta_3 L^3 + ...\right)\left(1 - 0.5L + 0.25L^2\right) = 2.5L$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2.5L &= \delta_0 + \delta_1 L + \delta_2 L^2 + \delta_3 L^3 + ... \\ &\quad -0.5\delta_0 - 0.5\delta_1 L - 0.5\delta_2 L^2 - 0.5\delta_3 L^3 + ... \\ &\quad +0.25\delta_0 + 0.25\delta_1 L + 0.25\delta_2 L^2 + 0.25\delta_3 L^3 + ... \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \delta_0 = 0 \\ \delta_1 = 2.5 \\ \delta_2 = 0.5\delta_1 - 0.25\delta_0 \\ \delta_3 = 0.5\delta_2 - 0.25\delta_1. \end{cases}$$

Por lo tanto, $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 2.5$, $\delta_2 = 1.25$, y $\delta_3 = 0$.

(d.) [**9 Puntos**] Calcule el retardo medio y mediano del efecto de los tipos de interés en el PNB.

Solución: El retardo medio es

$$\text{Retardo Medio} = \frac{B'(1)}{B(1)} - \frac{C'(1)}{C(1)},$$

con

$$B(L) = 2.5L \;\; \text{y} \;\; C(L) = 1 - 0.5L + 0.25L^2.$$

Por lo tanto

$$B'(L) = 2.5$$

y entonces

$$B(1) = 2.5 \text{ y } B'(1) = 2.5.$$

Similarmente

$$C'(L) = -0.5 + 0.5L$$

$$C(1) = 1 - 0.5 + 0.25 = 0.75 \text{ y } C'(1) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\text{Retardo Medio} = 1.$$

Para computar el retardo mediano comenzamos calculando el multiplicador total:

$$m_T = \frac{B(1)}{C(1)} = \frac{2.5(1)}{1 - 0.5(1) + 0.25(1)^2} = \frac{2.5}{0.75} = 3.33.$$

El retardo mediano es uno ya que $\frac{m_0}{m_T} = 0 < 0.5$ y $\frac{m_1}{m_T} = \frac{2.5}{3.33} = 0.75 > 0.5$.

FIN.

QUE TENGAIS UN BUEN VERANO