Nombre y Apellidos: ....

ID: ....

Grupo: ....

¿Ha realizado evaluación continua? ....

EXAMEN de TÉCNICAS ECONOMÉTRICAS
(Junio 2011, Convocatoria extraordinaria)

Lea cuidadosamente cada pregunta. Responda muy claramente dentro del espacio asignado. A efectos de corrección **únicamente** se tendrá en cuenta lo respondido en este espacio.Observe que los valores numéricos están en formato ordenador. **El valor de cada pregunta se indica entre corchetes**.

Las notas del examen aparecerán en aula global el día 28. La revisión será el día 30 (cada profesor anunciará el lugar y hora vía Aula Global o en su página web). Cualquier cambio se anunciará con la antelación posible en dichas páginas.

Tiempo límite: 90 minutos. **Total de puntos:** 100.

BUENA SUERTE

Pregunta 1 [40 Puntos]

(a.) [20 ptos.] Sea el siguiente proceso AR(2):

$$V_t = 2 + 0.8V_{t-1} + 0.1V_{t-2} + e_t,$$

donde $e_t \sim$ ruido blanco $(0, 1)$.

(a.1) Determine si el proceso AR(2) es causal. En caso afirmativo proporcione su representación MA(∞), al menos los tres primeros términos.

Solución:

Las raíces del polinomio $1 - 0.8z - 0.1z^2$ son:

$$1.099 \text{ y } -9.099.$$

Ambas son mayores que 1 en valor absoluto, por lo que el proceso es causal.

La representación MA(∞) es $V_t = \mu + \psi(L)e_t$, donde

$$\mu = \frac{2}{1 - 0.8 - 0.1} = 20,$$

$$\psi(L) = \frac{1}{1 - 0.8L - 0.1L^2} = 1.0 + 0.8L + 0.74L^2 + 0.672\,L^3 + \cdots.$$

(a.2) Calcule $\mathrm{E}(V_t)$, $Var(V_t)$ y la covarianza de primer orden $\gamma_V(1)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
E[V_t] &= 2 + 0.8E[V_{t-1}] + 0.1E[V_{t-2}] + 0 = \frac{2}{1 - 0.8 - 0.1} = 20, \\
Var[V_t] &= 0.8^2 Var[V_{t-1}] + 0.1^2 Var[V_{t-2}] + 2 * 0.8 * 0.1\gamma_V(1) + 1, \\
\gamma_V(1) &= Cov(V_t, V_{t+1}) = Cov(V_t, 2 + 0.8V_t + 0.1V_{t-1} + e_{t+1}) \\
&= 0.8Var(V_t) + 0.1\gamma_V(1) = 0.8 * 4.81 + 0.1 * \gamma_V(1), \\
Var[V_t] &= 4.81, \qquad \gamma_V(1) = \frac{0.8 * 4.81}{1 - 0.1} = 4.27.
\end{aligned}$$

(b.) [20 ptos.] Considere el proceso definido por:

$$X_t = 0.8e_{t-1} + e_t,$$

donde $e_t \sim$ ruido blanco $(0, 1)$. Asuma que X_t está afectada por un error de medida, y que sólo observamos

$$Y_t = X_t + \eta_t,$$

donde $\eta_t \sim$ ruido blanco $(0, \frac{1}{2})$ que está incorrelado con e_t. Demuestre que Y_t tiene la misma función de autocorrelación (FAC) que un proceso $MA(1)$ y proporcione el valor del parámetro θ correspondiente.

Solución:

Notad que

$$Y_t = X_t + \eta_t = 0.8e_{t-1} + e_t + \eta_t,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\gamma_Y(1) &= Cov(Y_t, Y_{t+1}) = Cov\big(Y_t, 0.8e_t + e_{t+1} + \eta_{t+1}\big) \\
&= 0.8Cov(Y_t, e_t) + Cov(Y_t, e_{t+1}) + Cov\big(Y_t, \eta_{t+1}\big) \\
&= 0.8Cov(e_t, e_t) + 0 + 0 \\
&= 0.8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_Y(2) &= Cov(Y_t, Y_{t+2}) = Cov\big(Y_t, 0.8e_{t+1} + e_{t+2} + \eta_{t+2}\big) \\
&= 0.8Cov(Y_t, e_{t+1}) + Cov(Y_t, e_{t+2}) + Cov\big(Y_t, \eta_{t+2}\big) \\
&= 0 + 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

y $\gamma_Y(j) = 0$, $j > 1$, como un proceso MA(1). Mientras que

$$\begin{aligned}
\gamma_Y(0) &= Var(Y_t) = Var(0.8e_{t-1} + e_t + \eta_t) \\
&= 0.8^2 Var(e_{t-1}) + Var(e_t) + Var(\eta_t) \\
&= 0.8^2 + 1 + \frac{1}{2} = 2.14,
\end{aligned}$$

por lo que

$$\rho_Y(1) = \frac{0.8}{2.14} = 0.374.$$

Para un modelo MA(1), $Z_t = \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$,

$$\rho_Z(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2} = 0.374,$$

es decir

$$0.374\theta^2 - \theta + 0.374 = 0,$$

y por tanto $\theta = 0.45$ si tomamos la solución invertible.

Pregunta 2 [30 Puntos]

Investigadores de una prestigiosa Universidad Europea creen que la tasa de crecimiento del Producto Interior Bruto (Y_t) de un determinado país europeo puede modelizarse de la siguiente forma:

$$y_t = 0.3 + 0.7 y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.14\varepsilon_{t-2},$$

donde ε_t es un ruido blanco de media 0 y varianza 1.

(a.) [**10 ptos.**] Cuántas raíces comunes (factores comunes) contienen los polinomios AR y MA de este modelo?

Solución: Una raíz común o factor común: $(1 - 0.7L)$.
Polinomio AR(1): $(1 - 0.7L)$.
Polinomio MA(2): $(1 - 0.5L - 0.14L) = (1 - 0.7L)(1 + 0.2L)$

(b.) [**10 ptos.**] Después de eliminar el/los factores comunes, en caso de que existan, y dada la información hasta el periodo T, calcule la predicción puntual para y_{T+1}, y_{T+2} e y_{T+3}, es decir, $\hat{y}_{T+1|T}, \hat{y}_{T+2|T}$ e $\hat{y}_{T+3|T}$.

Solución: $\hat{y}_{T+1|T} = 1 + 0.2\varepsilon_T$; $\hat{y}_{T+2|T} = \hat{y}_{T+3|T} = 1$.

(c.) [**10 ptos.**] Después de eliminar el/los factores comunes, en caso de que existan, y dada la información hasta el periodo T, calcule las varianzas de los errores de predicción para y_{T+1}, y_{T+2} e y_{T+3}.

Solución: $Var\left(y_{T+1} - \hat{y}_{T+1|T}\right) = 1$; $Var\left(y_{T+2} - \hat{y}_{T+2|T}\right) = Var\left(y_{T+3} - \hat{y}_{T+3|T}\right) = 1.04$.

Pregunta 3 [40 Puntos]

Los investigadores de la Universidad Carlos III quieren comprobar si existen relaciones causales entre el GDP (y_t) y el coste del endeudamiento (tipo de interés, x_t). Para ello, han propuesto y estimado el siguiente modelo

$$y_t = \frac{5L}{1 - 0.9L + 0.2L^2} x_t + u_t,$$

con u_t ruido blanco de media 0 y varianza σ^2. Como ayudantes de investigación, nuestra labor consiste en desarrollar algunas de las propiedades teóricas de este modelo a fin de facilitar su uso práctico.

(a.) [**10 ptos.**] Escriba el modelo sin el operador de retardos indicando la media y la varianza del nuevo ruido aleatorio. ¿Hay correlación serial en este nuevo ruido? En caso afirmativo, ¿de qué orden es?

Solución:
El modelo sin operador de retardo es

$$y_t - 0.9y_{t-1} + 0.2y_{t-2} = 5x_{t-1} + v_t; \quad v_t = u_t - 0.9u_{t-1} + 0.2u_{t-2}.$$

El nuevo ruido aleatorio v_t tiene media 0 y varianza $\sigma_v^2 = 1.85\sigma^2$. Dado que el ruido v_t sigue un proceso $MA(2)$ hay correlación serial de orden j, para $j = 1, 2$.

(b.) [**10 ptos.**] Clasifique el modelo y determine si es estable.

Solución:
El modelo es un ARDL(2,1) y es estable, puesto que las raíces del polinomio $1 - 0.9x + 0.2x^2$ son 2 y 2.5, cada una de las cuales es mayor que 1.

(c.) [**10 ptos.**] Calcule los coeficientes de x_t, x_{t-1}, x_{t-2} y x_{t-3}, en

$$y_t = \delta_0 x_t + \delta_1 x_{t-1} + \delta_2 x_{t-2} + \delta_3 x_{t-3} + ... + u_t.$$

Solución:
Los coeficientes requeridos se calculan, como siempre. A partir de la ecuación

$$\delta(L) = \frac{5L}{1 - 0.9L + 0.2L^2},$$

se obtiene $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 5$, $\delta_2 = 4.5$ y finalmente $\delta_3 = 3.05$.

(d.) [**10 ptos.**] Calcule los retardos medio y mediano.

Solución: El retardo medio es

$$Rmedio = \frac{B'(1)}{B(1)} - \frac{C'(1)}{C(1)} = \frac{5}{5} - \frac{-0.9 + 2(0.2)}{1 - 0.9 + 0.2} = 2.6667.$$

Para calcular el retardo mediano, comenzamos por el multiplicador total, que se calcula como

$$m_T = \frac{5(1)}{1 - 0.9(1) + 0.2(1)^2} = \frac{5}{0.3} = 16.6667.$$

Ahora, el retardo mediano se obtiene observando que

$$\begin{aligned}
\frac{m_0^0}{m_T} &= 0 < 0.5 \\
\frac{m_0^1}{m_T} &= \frac{5}{16.6667} < 0.5 \\
\frac{m_0^2}{m_T} &= \frac{5 + 4.5}{16.6667} > 0.5.
\end{aligned}$$

Con lo cual $Rmediano = 2$.

FIN