Apéndice: Algunos trucos algebraicos para invertir el polinomio de retardos de un AR(p)
Econometría II

Sea $\{z_t\}$ un proceso estocástico que está caracterizado por el siguiente AR(2)

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t.$$

Utilizando el operador retardo L, podemos reescribir este proceso como

$$\Phi_2(L) z_t = a_t, \qquad \Phi_2(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2. \tag{1}$$

Supongamos que se trata de un AR(2) *causal*, esto es, las raíces del polinomio $1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$ caen fuera del círculo unidad. Si se cumple esta condición, sabemos que $\{z_t\}$ es un proceso *estacionario en covarianza* y de *media cero* que puede ser representado como

$$z_t = \Psi(L) a_t, \qquad \Psi(L) = \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + ..., \tag{2}$$

con $\psi_0 = 1$ y $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

A partir de las ecuaciones (1) y (2), tenemos que $z_t = \Phi_2(L)^{-1} a_t = \Psi(L) a_t$. Por lo tanto, $\Phi_2(L)^{-1} = \Psi(L)$. A continuación veremos distintos métodos para calcular $\Phi_2(L)^{-1}$ y así obtener la secuencia infinita de parámetros ψ_j, $\forall j \geq 0$.

Métodos Tipo I: Obtenemos $\{\psi_j\}_{j\geq 0}$ a partir de ϕ_1 y ϕ_2.

I-A:

$\frac{1}{\Phi_2(L)} = \Psi(L) \Rightarrow \Phi_2(L)\Psi(L) = 1.$
Esto es, para
$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + ...) = 1$
$1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + ...$
$\quad -\phi_1 L - \phi_1\psi_1 L^2 - \phi_1\psi_2 L^3 - ... -$
$\qquad\quad -\phi_2 L^2 - \phi_2\psi_1 L^3 - ... = 1$

Igualando los coeficientes de ambos polinomios tenemos que:

$\psi_0 = 1$
$\psi_1 - \phi_1 = 0 \qquad \Rightarrow \psi_1 = \phi_1$
$\psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2 = 0 \qquad \Rightarrow \psi_2 = \phi_1\psi_1 + \phi_2 = \phi_1^2 + \phi_2$
$\psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 = 0 \qquad \Rightarrow \psi_3 = \phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1 = \phi_1(\phi_1^2 + \phi_2) + \phi_2\phi_1 = \phi_1^3 + 2\phi_1\phi_2$
[...]
Para $j \geq 2$, tenemos que $\psi_j = \phi_1\psi_{j-1} + \phi_2\psi_1$.

I-B:

Dado un AR(1) *causal* con $|\phi| < 1$,

$$(1 - \phi L)^{-1} = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + ... = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j L^j. \tag{3}$$

Podemos utilizar esta misma fórmula para un AR(2) *causal* reescribiéndolo apropiadamente,

$(1 - [\phi_1 L + \phi_2 L^2])^{-1} = 1 + (\phi_1 L + \phi_2 L^2) + (\phi_1 L + \phi_2 L^2)^2 + (\phi_1 L + \phi_2 L^2)^3 + ... =$
$= 1 + (\phi_1 L + \phi_2 L^2) + (\phi_1^2 L^2 + \phi_2^2 L^4 + 2\phi_1\phi_2 L^3) + (\phi_2^3 L^6 + 3\phi_2^2\phi_1 L^5 + 3\phi_1^2\phi_2 L^4 + \phi_1^3 L^3)$
$= \underbrace{1}_{\psi_0} + \underbrace{\phi_1}_{\psi_1} L + \underbrace{(\phi_2 + \phi_1^2)}_{\psi_2} L^2 + \underbrace{(\phi_1^3 + 2\phi_1\phi_2)}_{\psi_3} L^3 + ...$

A partir de esta expresión podemos obtener que $\psi_j = \phi_1\psi_{j-1} + \phi_2\psi_1$, $j \geq 2$.

Métodos Tipo II (Factorización): Obtenemos $\{\psi_j\}_{j\geq 0}$ a partir de λ_1 y λ_2, donde λ_1 y λ_2 se definen a partir de las raíces[1] del polinomio $1-\phi_1 L-\phi_2 L^2=0$:

$$r_1=\frac{\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{-2\phi_2}, \qquad r_2=\frac{\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{-2\phi_2}. \tag{4}$$

Definimos $\lambda_1=1/r_1$ y $\lambda_2=1/r_2$.

II-A:

$1-\phi_1 L-\phi_2 L^2=(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)$

Notar que la expresión de la derecha se hace cero para $r_1=1/\lambda_1$ y $r_2=1/\lambda_2$, mientras que la expresión de la izquierda se hace cero para los valores de r_1 y r_2 obtenidos en (4).

$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)^{-1}=(1-\lambda_1 L)^{-1}(1-\lambda_2 L)^{-1}$

A partir de (3), podemos escribir

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda_1 L)^{-1}(1-\lambda_2 L)^{-1}=(\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_1^j L^j)(\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_2^j L^j)=\\
&=(1+\lambda_1 L+\lambda_1^2L^2+\lambda_1^3L^3+...)(1+\lambda_2 L+\lambda_2^2L^2+\lambda_2^3L^3+...)\\
&=1+\lambda_2 L+\lambda_2^2L^2+\lambda_2^3L^3+...\\
&\qquad +\lambda_1 L+\lambda_1\lambda_2L^2+\lambda_1\lambda_2^2L^3+\lambda_1\lambda_2^3L^4+...+\\
&\qquad\qquad +\lambda_1^2L^2+\lambda_1^2\lambda_2L^3+\lambda_1^2\lambda_2^2L^4+\lambda_1^2\lambda_2^3L^5+...+\\
&\qquad\qquad\qquad +\lambda_1^3L^3+\lambda_1^3\lambda_2L^4+\lambda_1^3\lambda_2^2L^5+\lambda_1^3\lambda_2^3L^6...=\\
&=\underbrace{1}_{\psi_0}+\underbrace{(\lambda_1+\lambda_2)}_{\psi_1}L+\underbrace{(\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1^2)}_{\psi_2}L^2+\underbrace{(\lambda_2^3+\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1^3)}_{\psi_3}L^3+...\\
&=\boxed{\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_1^k\lambda_2^{j-k})L^j}.
\end{aligned}$$

II-B:

$$\frac{1}{1-\phi_1 L-\phi_2 L^2}=\boxed{\frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}}=\frac{a}{1-\lambda_1 L}+\frac{b}{1-\lambda_2 L}=\frac{a(1-\lambda_2 L)+b(1-\lambda_1 L)}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}=\boxed{\frac{a+b-(a\lambda_2+b\lambda_1)L}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}}.$$

Igualando términos, tenemos que $a+b-(a\lambda_2+b\lambda_1)L=1$. Esto es,

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1\\ a\lambda_2+b\lambda_1=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} a=\lambda_1/(\lambda_1-\lambda_2)\\ b=-\lambda_2/(\lambda_1-\lambda_2)\end{array}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión de arriba y utilizando (3),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}(1-\lambda_1 L)^{-1}+\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(1-\lambda_2 L)^{-1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}(\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_1^jL^j)-\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_2^jL^j)=\\
&=\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^j-\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2^j)L^j=\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{\lambda_1\lambda_1^j-\lambda_2\lambda_2^j}{\lambda_1-\lambda_2})L^j=\boxed{\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{\lambda_1^{j+1}-\lambda_2^{j+1}}{\lambda_1-\lambda_2})L^j}=\\
&=\underbrace{1}_{\psi_0}+\underbrace{(\frac{\lambda_1^2-\lambda_2^2}{\lambda_1-\lambda_2})}_{\psi_1}L+\underbrace{(\frac{\lambda_1^3-\lambda_2^3}{\lambda_1-\lambda_2})}_{\psi_2}L^2+\underbrace{(\frac{\lambda_1^4-\lambda_2^4}{\lambda_1-\lambda_2})}_{\psi_3}L^3+...
\end{aligned}$$

Nota I: Dependiendo de la información de la que dispongamos, será más rápido usar uno u otro método. Esto es, si conocemos ϕ_1 y ϕ_2 será preferible utilizar los Métodos Tipo I. Por el contrario, si lo que conocemos son las raíces del polinomio de retardos, será preferible utilizar los Métodos Tipo II.

Nota II: A partir de las raíces del polinomio de retardos ($\lambda_1=1/r_1$ y $\lambda_2=1/r_2$) siempre podemos recuperar ϕ_1 y ϕ_2 y utilizar los Métodos tipo I.

$\boxed{1-\phi_1 L-\phi_2 L^2}=(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)=\boxed{1-(\lambda_1+\lambda_2)L+\lambda_1\lambda_2L^2}.$

Igualando términos,

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2=\phi_1\\ \lambda_1\lambda_2=-\phi_2\end{array}\right\}.$$

Nota III: Para un AR(p) tendríamos la siguiente factorización

$$1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-...-\phi_p L^p=(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)...(1-\lambda_p L),$$

donde $\lambda_1,...,\lambda_p$ se obtienen a partir de las raíces del polinomio de retardos de orden p.

[1] Las raíces del polinomio de segundo orden $ax^2+bx+c=0$ vienen dadas por la fórmula

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Ejemplo numérico para un AR(2):

Consideremos un AR(2) con $\phi_1 = 0.6$ y $\phi_2 = -0.08$. Esto es, $z_t = 0.6z_{t-1} - 0.08z_{t-2} + a_t$. Utilizando el operador retardo L, podemos reescribir este proceso como

$$\Phi_2(L)z_t = a_t, \qquad \Phi_2(L) = 1 - 0.6L + 0.08L^2.$$

Las raíces del polinomio de segundo orden $0.08L^2 - 0.6L + 1 = 0$ son

$$r_1 = \frac{0.6 + \sqrt{(0.6)^2 - 4(0.08)}}{2(0.08)} = 2.5, \qquad r_2 = \frac{0.6 - \sqrt{(0.6)^2 - 4(0.08)}}{2(0.08)} = 5.$$

Como $|r_1| > 1$ y $|r_2| > 1$, el proceso AR(2) generado es CAUSAL.
A partir de las raíces calculamos

$$\lambda_1 = 1/(2.5) = 0.4, \qquad \lambda_2 = 1/5 = 0.2.$$

Podemos factorizar $\Phi_2(L)$ como sigue

$$1 - 0.6L + 0.08L^2 = (1 - 0.4L)(1 - 0.2L).$$

A continuación utilizamos los distintos métodos para calcular $\{\psi_j\}_{j\geq 0}$:

I-A y I-B:

$\psi_0 = 1;$
$\psi_1 = \phi_1 = 0.6;$
$\psi_2 = \phi_2 + \phi_1^2 = -0.08 + (0.6)^2 = -0.08 + 0.36 = 0.28;$
$\psi_3 = \phi_1^3 + 2\phi_1\phi_2 = (0.6)^3 - 2(0.6)(0.08) = 0.216 - 0.096 = 0.12;$
[...]

II-A:

$\psi_0 = 1;$
$\psi_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0.4 + 0.2 = 0.6;$
$\psi_2 = \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2 = (0.2)^2 + (0.4)(0.2) + (0.4)^2 = 0.04 + 0.08 + 0.16 = 0.28;$
$\psi_3 = \lambda_2^3 + \lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^3 = (0.2)^3 + (0.4)(0.2)^2 + (0.4)^2(0.2) + (0.4)^3 = 0.008 + 0.016 + 0.032 + 0.064 = 0.12;$
[...]

II-B:

$\psi_0 = 1;$
$\psi_1 = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(0.4)^2 - (0.2)^2}{0.4 - 0.2} = \frac{0.16 - 0.04}{0.2} = \frac{0.12}{0.2} = 0.6;$
$\psi_2 = \frac{\lambda_1^3 - \lambda_2^3}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(0.4)^3 - (0.2)^3}{0.4 - 0.2} = \frac{0.064 - 0.008}{0.2} = \frac{0.056}{0.2} = 0.28;$
$\psi_3 = \frac{\lambda_1^4 - \lambda_2^4}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(0.4)^4 - (0.2)^4}{0.4 - 0.2} = \frac{0.0256 - 0.0016}{0.2} = \frac{0.024}{0.2} = 0.12;$
[...]

Notar que si por algún motivo conociésemos el valor de las raíces del polinomio de retardos $r_1 = 2.5$ y $r_2 = 5$ pero no ϕ_1 y ϕ_2, atendiendo a la Nota II, siempre podemos recuperar el valor de estos parámetros y utilizar **I-A** ó **I-B**:

$$\lambda_1 = 1/(2.5) = 0.4, \qquad \lambda_2 = 1/5 = 0.2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = \phi_1 \\ \lambda_1\lambda_2 = -\phi_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \phi_1 = 0.4 + 0.2 = 0.6 \\ \phi_2 = -(0.4)(0.2) = -0.08. \end{array}$$

En base a los resultados obtenidos,

$$z_t = 0.6z_{t-1} - 0.08z_{t-2} + a_t,$$

tiene la siguiente representación como MA(∞),

$$z_t = a_t + 0.6a_{t-1} + 0.28a_{t-2} + 0.12a_{t-3} + ...$$