PRACTICA II: Modelos ARMA
(Fecha de Entrega: En la página Web)

Problema 1. Muestra, utilizando la serie geométrica $\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j$ para $|x| < 1$, que $\frac{1}{1-\phi z} = -\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} z^{-j}$ para $|\phi| > 1$ y $|z| \geq 1$.

Problema 2. Sea Y_t una serie AR(1) más un ruido blanco (WN, en ingles white noise), esto es, $Y_t = X_t + W_t$ donde $W_t \sim WN(0, \sigma_w^2)$, $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$, con $Z_t \sim WN(0, \sigma_z^2)$, y $E(W_s Z_t) = 0$ para todo s y t.

- Muestra que Y_t es estacionaria y encuentra su función de autocovarianzas.
- Muesra que la serie $U_t = Y_t - \phi Y_{t-1}$ tiene únicamente el primer coeficiente de autocorrelación diferente de cero; y por tanto, es un proceso MA(1). Utiliza para ello la siguiente proposición: *Si U_t es una serie temporal estacionaria q-correlacionada con media* 0*, entonces ésta puede ser representada como un proceso MA(q).*
- Concluye a partir del apartado anterior que Y_t, es un proceso ARMA(1,1) y expresa los tres parámetros de este modelo en términos de ϕ, σ_w^2 y σ_z^2.

Problema 3. Determina cuáles de los siguientes procesos ARMA son causales y cuáles son invertibles. (En cada caso Z_t denota ruido blanco).

- $X_t + 0.2X_{t-1} - 0.48X_{t-2} = Z_t$.
- $X_t + 1.9X_{t-1} + 0.88X_{t-2} = Z_t + 0.2Z_{t-1} + 0.7Z_{t-2}$.
- $X_t + 0.6X_{t-1} = Z_t + 1.2Z_{t-1}$.
- $X_t + 1.8X_{t-1} + 0.81X_{t-2} = Z_t$.
- $X_t + 1.6X_{t-1} = Z_t - 0.4Z_{t-1} + 0.04Z_{t-2}$.

Problema 4. Para cada uno de los siguientes modelos

- $(1 - L)X_t = (1 - 1.5L)Z_t$
- $(1 - 0.8L)X_t = (1 - 0.5L)Z_t$
- $(1 - 1.1L + 0.8L^2)X_t = (1 - 1.7L + .72L^2)Z_t$
- $(1 - 0.6L)X_t = (1 - 1.12L + 0.2L[2)Z_t$
- (i) Expresar en forma de MA si tal representación existe
- (ii) Expresar en forma AR si tal reprensetación existe.

Problema 5. Computa la FAC (función de autocorrelación) y la FACP (función de autocorrelación parcial) del siguiente proceso AR(2),

$$X_t = 0.8X_{t-2} + Z_t \qquad \textit{donde} \qquad Z_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

Problema 6. Muestra que los siguientes procesos MA(1)

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}, \qquad Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

$$Y_t = \bar{Z}_t + \frac{1}{\theta}\bar{Z}_{t-1}, \qquad \bar{Z}_t \sim WN(0, \sigma^2\theta^2)$$

con $0 < |\theta| < 1$, tienen la misma función de autocovarianza.

Problema 7. Supon que X_t es un proceso MA(1) no invertible

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}, \qquad Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

donde $|\theta| > 1$. Define un nuevo proceso W_t como

$$W_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^{-j} X_{t-j}$$

y muestra que $W_t \sim WN(0, \sigma_w^2)$. Expresa σ_w^2 en términos de θ y σ^2 y muestra que X_t tiene la representación invertible (en términos de W_t)

$$X_t = W_t + \frac{1}{\theta}W_{t-1}.$$

Problema 8. Sea X_t la única solución estacionaria de las ecuaciones autorregresivas

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t \qquad \textit{para} \qquad t = 0, \pm 1, ...$$

donde $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ y $|\phi| > 1$. Entonces X_t viene dada por la expresión $X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} Z_{t+j}$. Define la nueva secuencia

$$W_t = X_t - \frac{1}{\phi}X_{t-1},$$

muestra que $W_t \sim WN(0, \sigma_w^2)$ y expresa σ_w^2 en términos de σ^2 y ϕ. Estos cálculos muestran que X_t es la (única y estacionaria) solución de las ecuaciones AR causales

$$X_t = \frac{1}{\phi}X_{t-1} + W_t \qquad \textit{para} \qquad t = 0, \pm 1, ...$$