

**PRACTICA I: Conceptos Básicos de las Series Temporales**  
(Fecha de Entrega: En la página Web)

**Problema 1.** Contesta a esta pregunta solo si has elegido realizar un proyecto de curso. Breve descripción del proyecto: Título, Variables a analizar, Artículo a seguir, etc.

**Problema 2.** En una hoja tamaño folio presenta el gráfico de cuatro series económicas. En otra hoja presenta el gráfico de las tasas de crecimiento  $((1 - L)\text{Log}(X_t))$  de las mismas series.

**Problema 3.** Sea  $x_t; t = 1, 2, \dots$  un proceso estacionario y define  $\gamma_h = \text{Cov}(x_t, x_{t+h})$  para  $h \geq 0$ . [Entonces,  $\gamma_0 = \text{Var}(x_t)$ .] Muestra que  $\text{Corr}(x_t, x_{t+h}) = \gamma_h/\gamma_0$ .

**Problema 4.** Suponga que la serie temporal  $y_t$  está generada por  $y_t = z + e_t$ , para todo  $t = 1, 2, \dots$ , donde  $e_t$  es una secuencia *i.i.d* con media cero y varianza  $\sigma_e^2$ . La variable aleatoria  $z$  no cambia en el tiempo; tiene media cero y varianza  $\sigma_z^2$ . Asuma que cada  $e_t$  está incorrelacionado con  $z$ .

- Encuentra el valor esperado y la varianza de  $y_t$ . Depende la respuesta de  $t$ ?
- Encuentra la  $\text{Cov}(y_t, y_{t+h})$  para cualquier  $t$  y  $h$ . Es  $y_t$  estacionaria debil (estacionaria en covarianza)?
- Usa las dos partes anteriores para mostrar que  $\text{Corr}(y_t, y_{t+h}) = \sigma_z^2/(\sigma_z^2 + \sigma_e^2)$  para todo  $t$  y  $h$ .
- Crees que  $y_t$  satisface el requerimiento intuitivo de ser asintóticamente incorrelacionado?

**Problema 5.** Sea  $y_t; t = 1, 2, \dots$  un paseo aleatorio ( $y_t = y_{t-1} + e_t$ , donde  $e_t$  es ruido blanco), con  $y_0 = 0$ . Muestra que  $\text{Corr}(y_t, y_{t+h}) = (t/(t+h))^{1/2}$  para  $t \geq 1, h > 0$ .

**Problema 5.** Sea  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias con  $E(Y) = \mu$  y  $E(Y)^2 < \infty$ .

- Muestra que la constante  $c$  que minimiza  $E(Y - c)^2$  es  $c = \mu$ .
- Deduce que la variable aleatoria  $f(X)$  que minimiza  $E[(Y - f(X))^2|X]$  es  $f(X) = E[Y|X]$ .
- Deduce que la variable aleatoria  $f(X)$  que minimiza  $E(Y - f(X))^2$  es tambien  $f(X) = E[Y|X]$ .

**Problema 6.** (Generalización del Problema 5.) Supongamos que  $X_1, X_2, \dots$ , es una secuencia de variables aleatorias con  $E(X_t)^2 < \infty$  y  $E(X_t) = \mu$ .

- Muestra que la variable aleatoria  $f(X_1, \dots, X_n)$  que minimiza  $E[(X_{n+1} - f(X_1, \dots, X_n))^2|X_1, \dots, X_n]$  es  $f(X_1, \dots, X_n) = E(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n)$ .
- Muestra que la variable aleatoria  $f(X_1, \dots, X_n)$  que minimiza  $E[(X_{n+1} - f(X_1, \dots, X_n))^2]$  es tambien  $f(X_1, \dots, X_n) = E(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n)$ .
- Si  $X_1, X_2, \dots$  es *iid* con  $E(X_i^2) < \infty$  y  $E(X_i) = \mu$ , donde  $\mu$  es conocido, cual es el predictor de  $X_{n+1}$  en terminos de  $X_1, \dots, X_n$  que minimiza el error cuadrático medio?
- Bajo las condiciones del apartado anterior muestra que el estimador lineal óptimo de  $\mu$  en terminos de  $X_1, \dots, X_n$  es  $\bar{X} = (1/n)(X_1 + \dots + X_n)$ .
- Si  $X_1, X_2, \dots$  es *iid* con  $E(X_i^2) < \infty$  y  $E(X_i) = \mu$ , y si  $S_0 = 0$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , cual es el predictor de  $S_{n+1}$  en terminos de  $S_1, \dots, S_n$  que minimiza el error cuadrático medio?