Econometría II - examen (SOLUCION)

4 de septiembre de 2006

Nombre y Apellidos: ....

ID: ....

Grupo: ....

Lea cuidadosamente cada pregunta. Responda muy claramente dentro del espacio asignado.
El valor de cada pregunta se indica entre corchetes.

Tiempo límite: 80 minutos.

Total de puntos: 100.

BUENA SUERTE

Pregunta 1 [30 puntos]

Considera el siguiente modelo de una serie temporal

$$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}, \tag{1}$$

donde Z_t es un ruido blanco con media cero y varianza $\sigma^2_{Z_t}$.

a) ¿Para qué valores del parámetro θ es el proceso estacionario?

Solución: El proceso es estacionario para cualquier valor (finito?) del parámetro θ.

b) ¿Para qué valores del parámetro θ es el proceso invertible?

Solución: Cuando $|\theta| < 1$, el proceso es invertible.

c) Escriba la representación $AR(\infty)$ del proceso X_t.

Solución:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-\theta L} X_t = Z_t, \\
&(1 + \theta L + \theta^2 L^2 + \ldots) X_t = Z_t, \\
&X_t = -(\theta L + \theta^2 L^2 + \ldots) X_t + Z_t, \\
&X_t = -\theta X_{t-1} - \theta^2 X_{t-2} - \ldots + Z_t.
\end{aligned}$$

d) Suponga que conoce el verdadero valor del parámetro θ. Calcule la mejor predicción en media cuadrática de X_{t+1}, X_{t+2} y X_{t+8} realizada en t.

Solución:

$$\begin{aligned}
X_{t+1} &= Z_{t+1} - \theta Z_t, \\
\hat{X}_t(1) &= \mathrm{E}(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \ldots) \\
&= -\theta Z_t \\
&= -\theta \frac{1}{1-\theta L} X_t \\
&= -\theta(1 + \theta L + \theta^2 L^2 + \ldots) X_t \\
&= -\theta X_t - \theta^2 X_{t-1} - \theta^3 X_{t-2} - \ldots.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{t+2} &= Z_{t+2} - \theta Z_{t+1}, \\
\hat{X}_t(2) &= \mathrm{E}(X_{t+2}|X_t, X_{t-1}, \ldots) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{t+8} &= Z_{t+8} - \theta Z_{t+7}, \\
\hat{X}_t(8) &= \mathrm{E}(X_{t+8}|X_t, X_{t-1}, \ldots) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

e) Calcule la varianza del error de predicción en los tres casos anteriores.

Solución:

$$\begin{aligned}
e_t(1) &= X_{t+1} - \hat{X}_t(1) \\
&= Z_{t+1}, \\
\mathrm{Var}(e_t(1)) &= \sigma^2_{Z_t}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_t(2) &= X_{t+2} - \hat{X}_t(2) \\
&= Z_{t+2} - \theta Z_{t+1}, \\
\mathrm{Var}(e_t(2)) &= (1+\theta^2)\sigma^2_{Z_t}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_t(8) &= X_{t+8} - \hat{X}_t(8) \\
&= Z_{t+8} - \theta Z_{t+7}, \\
\mathrm{Var}(e_t(8)) &= (1+\theta^2)\sigma^2_{Z_t}.
\end{aligned}$$

Pregunta 2 [30 puntos]

Considera el siguiente modelo:

$$y_t = 0{,}25 y_{t-2} + 3x_t + 1{,}5 z_{t-2} + \varepsilon_t, \tag{2}$$

donde $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$.

a) Escribe el modelo con el operador de retardo. ¿Es este modelo estable?

Solución:

$$(1 - 0{,}25L^2) y_t = 3x_t + 1{,}5L^2 z_t + \varepsilon_t.$$

Las raíces características son $\lambda_1 = 0{,}5$ y $\lambda_2 = -0{,}5$, las dos están dentro del círculo de unidad, y entonces el modelo es estable.

b) ¿Cuál es el multiplicador de impacto de la variable x_t y cuáles son los multiplicadores de los retardos 1, 2 y 3 de esta variable?

Solución:

$$D_x(L) = \frac{B_x(L)}{C_x(L)} = \frac{3}{1 - 0{,}25L^2} = 3 \times (1 + 0{,}25L^2 + 0{,}0625L^4 + \ldots).$$

Entonces $\delta_0 = 3$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0{,}75$ y $\delta_3 = 0$.

c) ¿Cuál es el multiplicador total de la variable x_t?

Solución:

$$D_x(1) = \frac{B_x(1)}{C_x(1)} = \frac{3}{1 - 0{,}25} = 4.$$

d) ¿Cuál es entonces el retardo mediano de la variable x_t? ¿Y cuál es según tu intuición (y sin hacer más cálculos) el retardo mediano de la variable z_t?

Solución: El retardo mediano de x_t es 0 ya que el multiplicador de impacto es 3 y el multiplicador total es 4. El retardo mediano de la variable z_t es 2 porque los efectos de z_t sobre y_t son exactamente proporcionales pero ocurren dos períodos más tarde que los efectos de x_t sobre y_t.

e) ¿Cuáles son los retardos medios de las variable x_t y z_t? Comenta sobre la intuición del resultado.

Solución:

$$\frac{D'_x(1)}{D_x(1)} = \frac{B'_x(1)}{B_x(1)} - \frac{C'_x(1)}{C_x(1)} = \frac{0}{3} - \frac{-0{,}5}{1-0{,}25} = \frac{2}{3},$$
$$\frac{D'_z(1)}{D_z(1)} = \frac{B'_z(1)}{B_z(1)} - \frac{C'_z(1)}{C_z(1)} = \frac{3{,}0}{1{,}5} - \frac{-0{,}5}{1-0{,}25} = \frac{8}{3}.$$

Las variables x_t y z_t son variables exógenas. La variable x_t afecta la variable y_t inmediatamente mientras que la variable z_t tiene efectos exactamente proporcionales pero dos períodos más tarde. Por eso, el retardo medio de z_t es dos períodos mayor que el retardo medio de la variable x_t.

Pregunta 3 [40 puntos]

Una de las versiones de la teoría de las expectativas de la estructura temporal de los tipos de interés mantiene que el tipo de interés a largo plazo es igual a una media de las predicciones futuras de los tipos de interés a corto plazo, más un término $I(0)$. En concreto si denotamos por Rk_t el tipo de interés a k periodos hacia adelante, por $R1_t$ el tipo de interés a corto plazo (un período hacia adelante) y por e_t el término $I(0)$, entonces la teoría anteriormente descrita lo que dice es que

$$Rk_t = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} R1_{t+i|t} + e_t, \tag{3}$$

donde $R1_{t+i|t}$ es la predicción hecha en t del valor de $R1$ en el período $t+i$. Suponga que $R1_t$ siga un proceso paseo aleatorio, es decir, $R1_t = R1_{t-1} + a_t$, donde a_t es i.i.d. con media cero y varianza uno.

a) Calcule $R1_{t+i|t} = E[R1_{t+i}|R1_t, R1_{t-1}, ...]$ para $i = 1, 2, ..., k$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(R1_{t+1}|R1_t, R1_{t-1}, \ldots) &= \mathrm{E}(R1_t + a_{t+1}|R1_t, R1_{t-1}, \ldots) \\
&= R1_t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(R1_{t+2}|R1_t, R1_{t-1}, \ldots) &= \mathrm{E}(R1_{t+1} + a_{t+2}|R1_t, R1_{t-1}, \ldots) \\
&= \mathrm{E}(R1_t + a_{t+1} + a_{t+2}|R1_t, R1_{t-1}, \ldots) \\
&= R1_t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(R1_{t+k}|R1_t, R1_{t-1}, \ldots) \\
&\quad = \mathrm{E}(R1_{t+k-1} + a_{t+k}|R1_t, R1_{t-1}, \ldots) \\
&\quad = \mathrm{E}(R1_{t+k-2} + a_{t+k-1} + a_{t+k}|R1_t, R1_{t-1}, \ldots) \\
&\quad = \mathrm{E}(R1_{t+k-3} + a_{t+k-2} + a_{t+k-1} + a_{t+k}|R1_t, R1_{t-1}, \ldots) \\
&\quad = \ldots \\
&\quad = R1_t.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$R1_{t+i|t} = \mathrm{E}(R1_{t+i}|R1_t, R1_{t-1}, \ldots) = R1_t, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

b) Introduzca lo calculado en (a) en la expresión de la ecuación (2) y muestre que $Rk_t = R1_t + e_t$.

Solución:

$$\begin{aligned}
Rk_t &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} R1_{t+i|t} + e_t \\
&= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} R1_t + e_t \\
&= R1_t + e_t.
\end{aligned}$$

c) Muestre que Rk_t y $R1_t$ están cointegradas. ¿Cuál es el vector de cointegración?

Solución: Ahora notamos que $R1_t \sim I(1)$ y que $Rk_t \sim I(1)$. Las dos variables están cointegradas porque sabemos que existe una combinación lineal que produce una variable estacionaria:

$$Rk_t - R1_t = e_t \sim I(0).$$

El vector de cointegración es $(1, -1)$.

d) Ahora suponga que $\Delta R1_t = 0{,}5\Delta R1_{t-1} + a_t$, donde $\Delta = (1-L)$. ¿Cómo cambia tu respuesta respecto al apartado anterior?

Solución: Notamos que $R1_t$ sigue teniendo una raíz unitaria:

$$R1_t = 1{,}5R1_{t-1} - 0{,}5R1_{t-2} + a_t.$$

La ecuación característica,

$$\lambda^2 - 1{,}5\lambda + 0{,}5 = 0,$$

tiene las raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0{,}5$.

Los futuros valores de $R1_t$ se derivan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R1_{t+i} &= R1_{t+i-1} + 0{,}5\Delta R1_{t+i-1} + a_{t+i} \\ &= R1_{t+i-2} + 0{,}5(\Delta R1_{t+i-1} + \Delta R1_{t+i-2}) \\ &\quad + a_{t+i} + a_{t+i-1} \\ &= \ldots \\ &= R1_t + 0{,}5(\Delta R1_{t+i-1} + \Delta R1_{t+i-2} + \ldots + \Delta R1_t) \\ &\quad + a_{t+i} + a_{t+i-1} + \ldots + a_{t+1}. \end{aligned}$$

Entonces existe de nuevo una relación de cointegración con el mismo vector de cointegración ya que:

$$\begin{aligned} Rk_t &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} R1_{t+i|t} + e_t \\ &= R1_t + I(0). \end{aligned}$$

e) Ahora suponga que $R1_t = 0{,}5R1_{t-1} + a_t$. ¿Cómo cambia tu respuesta con respecto al apartado (c)?

Solución: Ahora, $R1_t \sim I(0)$. Entonces ya no puede existir una relación de cointegración porque las variables están ahora estacionarias.