Nombre y Apellidos: ....

ID: ....

Grupo: ....

SOLUCIONES del EXAMEN ECONOMETRÍA II (Septiembre 2009)

Lea cuidadosamente cada pregunta. Responda muy claramente dentro del espacio asignado. Observe que los valores numéricos están en formato ordenador. **El valor de cada pregunta se indica entre corchetes**.

Las notas del examen aparecerán en aula global el Miércoles 16 Septiembre. El día y lugar de la revisión será anunciado por cada profesor en su página web. Cualquier cambio se anunciará con la antelación posible en dichas páginas.

Tiempo límite: 75 minutos. **Total de puntos:** 100.

BUENA SUERTE

Pregunta 1 [60 Puntos]

Estudiantes de doctorado del departamento de Economía de la Universidad **CarlosIII-Harvard0** han decidido empezar a rentabilizar sus conocimientos y se proponen predecir los rendimientos de activos financieros r_t (medidos en %) según el modelo anual

$$r_t = 0.9 + 0.5\ r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

donde ε_t es un proceso i.i.d. con media 0 y varianza 0.7.

a. ¿Es este modelo causal?

Solución: El modelo se puede reescribir como

$$(1 - 0.5\ L)\, r_t = 0.9 + \varepsilon_t.$$

Ya que el polinomio característico de la parte autorregresiva tiene todas sus raices fuera del círculo unidad,

$$1 - 0.5\ Z^* = 0 \Longrightarrow Z^* = \frac{1}{0.5} = 2 > 1,$$

el modelo es causal.

b. Calcula la media incondicional μ de r_t, su varianza $\gamma_{0,}$ y la correlación de orden tres ρ_3.

Solución: Ya que r_t es un proceso estacionario su media se calcula como

$$\mu = E[r_t] = 0.9 + 0.5\ E[r_{t-1}] + E[\varepsilon_t] \Longrightarrow \mu = 1.8.$$

Por la misma razón la varianza,

$$\gamma_0 = 0.25\ Var\,(r_{t-1}) + Var\,(\varepsilon_t)$$

$\Longrightarrow$

$$\gamma_0 = Var\,(r_t) = \frac{Var\,(\varepsilon_t)}{(1 - 0.25)} = 0.933.$$

La correlación de orden tres es

$$\rho_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_0} = (0.5)^3 = 0.125.$$

c. Suponga que en un momento dado "t" se da a conocer una cierta noticia financiera que hace que el shock ε_t aumente en una unidad con respecto al valor que hubiera tenido si dicha noticia no se hubiera conocido. ¿Qué efecto tendrá la publicación de dicha noticia sobre r_{t+3}? y ¿sobre r_{t+100}?

Solución: Para responder a esta pregunta lo primero es escribir el modelo en forma de media móvil:

$$r_t = 1.8 + \Psi(L)\varepsilon_t,$$

donde

$$\Psi(L) = 1 + 0.5L + (0.5)^2 L^2 + (0.5)^3 L^3 + ...$$

El efecto de un shock en r_{t+k} se mide por $\frac{\partial r_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}$. De la representación anterior de media móvil se obtiene

$$\frac{\partial r_{t+3}}{\partial \varepsilon_t} = (0.5)^3 = 0.125 \text{ y } \frac{\partial r_{t+100}}{\partial \varepsilon_t} \sim 0.$$

d. La media de la inflación en los últimos 100 años ha sido del 3%. La media de los rendimientos ha sido del 4%. Los estudiantes temen que en media los rendimientos de los activos financieros que están analizando no supere a la inflación. Construya un intérvalo de confianza al 95% para la media μ de los rendimientos. ¿Es dicha media mayor que el 3%? [*Si le hace falta, el valor crítico de la Normal es 1.96*]

Solución: Partiendo de la anterior representación en forma de media móvil y usando un teorema central del límite tenemos

$$\sqrt{T}\left(\bar{r}_t - \mu\right) \sim N\left(0, \Psi(1)^2 * Var\left(\varepsilon_t\right)\right),$$

donde

$$\bar{r}_t = \text{media estimada}, \Psi(1) = 2 \text{ y } Var\left(\varepsilon_t\right) = 0.7.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{100}\left(\bar{r}_t - \mu\right) \sim N\left(0,\ 2.8\right).$$

El intérvalo de confianza requerido es

$$IC_{95\%} = \left[\bar{r}_t \pm 1.96 * \sqrt{\frac{2.8}{100}}\right] = \left[3.67,\ 4.32\right].$$

Con este intervalo de confianza $[3.67, 4.32]$, hay evidencia para rechazar la hipótesis de $\mu \leq 3$.

e. Supongamos que tenemos las siguientes observaciones $r_{2009} = 4$, $r_{2008} = 3$ y $r_{2007} = 2$. Calcule la mejor predicción condicional de r_{2010}, r_{2011} y r_∞.

Solución:

$$E[r_{2010} \mid r_{2009} = 4] = 0.9 + 0.5 * 4 = 2.9$$

$$E[r_{2011} \mid r_{2009} = 4] = 0.9 + 0.5 * E[r_{2010} \mid r_{2009} = 4] = 2.35$$

$$E[r_\infty \mid r_{2009} = 4] = 1.8, \text{ media incondicional.}$$

f. Construya un intérvalo asintótico de confianza al 95% para las anteriores predicciones condicionales de r_{2010} y r_{2011}. [*Si le hace falta, el valor crítico de la Normal es 1.96*].

Solución: La varianza del error de predicción para r_{2010} es

$$Var\left(\varepsilon_{2010}\right) = 0.7.$$

Por lo tanto, el intérvalo de confianza asintótico del 95% para la predicción condicional de r_{2010} es:

$$CI^{95\%}_{\hat{r}_{2010}} = 2.9 \pm 1.96 * \sqrt{0.7} = [1.26,\ 4.53]\,.$$

La varianza del error de predicción para r_{2011} es

$$Var\left((1+\psi_1 L)\varepsilon_{2011}\right) = \left[1 + (0.5)^2\right] * 0.7 = 0.7 * 1.25 = 0.875.$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza asintótico del 95% para la predicción condicional de r_{2011} es:

$$CI^{95\%}_{\hat{r}_{2011}} = 2.35 \pm 1.96 * \sqrt{0.875} = [0.51,\ 4.18]\,.$$

Preguntа 2 [20 Puntos]

En el laboratorio de la prestigiosa **Universidad Carlos3-Harvard0** se han generado los siguientes datos: $x_1 = 1.343261482$, $x_2 = -0.10384662$, $x_3 = -1.423057674$ provenientes del modelo:

$$x_t = u_t - 0.5u_{t-1}$$

$$u_t \overset{iid}{\sim} N(0,1),$$

con $u_0 = -1.255110888$. El objetivo de este experimento es analizar diferentes formas de predecir. [SE ACONSEJA REDONDEAR a DOS DECIMALES].

a. Conociendo el modelo y asumiendo que se está en $T = 3$, realice predicciones de x_4, x_5 y x_6.

Solución:

La mejor predicción conociendo el modelo es la esperanza condicional dada la información que se tiene en $T = 3$. Escribiendo el modelo para la observación que queremos predecir y tomando esperanzas condicionales obtenemos

$$x_4 = u_4 - 0.5u_3; \qquad E(x_4|I_3) = -0.5u_3 = (-0.5)(x_3 + 0.5x_2 + 0.5^2x_1 + 0.5^3u_0) = 0.648027237$$

$$x_5 = u_5 - 0.5u_4; \qquad E(x_5|I_3) = 0$$

$$x_6 = u_6 - 0.5u_5; \qquad E(x_5|I_3) = 0.$$

b. Los investigadores de otro prestigioso centro de investigación, la **Universidad Harvard-CarlosQUE** piensan que se puede predecir de una forma más rápida usando una predicción incondicional donde solo se conocen las observaciones de la variable x_t y, por lo tanto, no hace falta conocer el modelo que genera los datos. Realice predicciones incondicionales de x_4, x_5 y x_6.

Solución:

La mejor predicción incondicional es la media muestral. Por lo tanto, los investigadores de este otro centro de investigación producirían las siguientes predicciones

$$\text{Predicción de } x_4 = \overline{x} = (x_1 + x_2 + x_3)/3 = -0.06121427$$

$$\text{Predicción de } x_5 = \overline{x} = (x_1 + x_2 + x_3)/3 = -0.06121427$$

$$\text{Predicción de } x_6 = \overline{x} = (x_1 + x_2 + x_3)/3 = -0.06121427.$$

c. Los dos centros de investigación quieren que se comparen las predicciones. Para ello se generan, siguiendo el modelo verdadero, las observaciones correspondientes: $x_4 = 1.587274971$, $x_5 = -1.038700438$ y $x_6 = 0.053870349$. Calcule los errores cuadráticos de cada predicción. ¿Qué grupo debería ganar?

Solución:

Para el primer grupo los errores cuadráticos son:

$$(e_4)^2 = (x_4 - E(x_4|I_3))^2 = (1.587274971 - 0.648027237)^2 = 0.882186306$$

$$(e_5)^2 = (x_5 - E(x_5|I_3))^2 = (-1.038700438 - 0)^2 = 1.078898601$$

$$(e_6)^2 = (x_6 - E(x_6|I_3))^2 = (0.053870349 - 0)^2 = 0.002902014.$$

Para el segundo grupo de investigadores los errores cuadráticos son:

$$(e_4)^2 = (x_4 - \overline{x})^2 = (1.587274971 - (-0.06121427))^2 = 2.71751678$$

$$(e_5)^2 = (x_5 - \overline{x})^2 = (-1.038700438 - (-0.06121427))^2 = 0.955479209$$

$$(e_6)^2 = (x_6 - \overline{x})^2 = (0.053870349 - (-0.06121427))^2 = 0.01324447.$$

La teoría dice que en media cuadrática la mejor predicción es la esperanza condicional, por lo que el grupo de la **Universidad Carlos3-Harvard0** debería ser "en media" el ganador. En el caso concreto de este experimento, lo que se observa es que en los casos puntuales de estas tres predicciones, el primer grupo gana 2 a 1 al segundo grupo.

d. El equipo de la **Universidad Harvard-CarlosQUE** enfadado por no haber ganado, comenta que la **Universidad Carlos3-Harvard0** ha podido realizar sus predicciones porque el modelo MA generador de los datos era invertible. Opine en dos líneas sobre este comentario.

Solución:

El equipo de la Universidad Harvard-CarlosQUE tiene razón. El modelo generador de los datos es invertible ($0.5 < 1$) y gracias a ello en el apartado (a) se ha podido calcular u_3.

Pregunta 3 [20 Puntos]

Pregunta 3.1 [Subraye la respuesta correcta]

En la famosa descomposición de Wold por la que todo proceso estacionario admite una representación de media móvil, el término de error es

- i.i.d.
- i.i.d.Normal $(0, \sigma^2)$
- En esta descomposición no hay término de error
- **Ruido blanco (0,** σ^2).

Pregunta 3.2 [Subraye la respuesta correcta]

Los investigadores de la Universidad del Burgo de Osma consideran que el crecimiento de la población en Soria sigue un modelo ARMA. Con este modelo pretenden predecir dicho crecimiento. El error de predicción "k" periodos hacia adelante es

- Ruido blanco
- **Un proceso MA(**$k-1$**)**
- Un proceso MA(k)
- Si la variable crecimiento de la población sigue de verdad un modelo ARMA, entonces no hay ningún error de predicción.

Pregunta 3.3 [Subraye la respuesta correcta]

Desde principios del siglo XX se ha pensado que los precios de activos financieros siguen un paseo aleatorio ($X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$). Si ésto es cierto, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- Contando sólo con la información de $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}$, *etc*, la mejor predicción de los precios es el valor cero.
- Contando sólo con la información de $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}$, *etc*, la mejor predicción de los rendimientos (X_t -
- X_t es un proceso estacionario
- X_t no es estacionario pero existe una solución que es causal.

Pregunta 3.4 [Subraye la respuesta correcta]

La invertibilidad de los modelos MA es clave para

- Estimar los parámetros del modelo
- Que el modelo MA sea de orden finito
- Que el equivalente modelo AR sea de orden finito
- **Realizar predicciones.**