Nombre y Apellidos: ....

ID: ....

Grupo: ....

EXAMEN ECONOMETRÍA II (Febrero 2009)

Lea cuidadosamente cada pregunta. Responda muy claramente dentro del espacio asignado. Observe que los valores numéricos están en formato ordenador. **El valor de cada pregunta se indica entre corchetes**.

Las notas del examen aparecerán en aula global el Viernes 6 de Febrero. El día y lugar de la revisión será anunciado por cada profesor en su pagina web. Cualquier cambio se anunciará con la antelación posible en dichas páginas.

Tiempo límite: 105 minutos. **Total de puntos:** 80.

BUENA SUERTE

Pregunta 1 [30 Puntos]

La empresa **IWANTTOBEMADOFF** gestiona unos fondos de inversión cuyos rendimientos trimestrales $\{y_t\}$ siguen el siguiente proceso

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + a_t, \quad a_t \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma_a^2 = 4),$$

con

$$\phi_0 = 0.5,$$

$$\phi_1 = 0.8.$$

(a.) Determina si el modelo es causal.

Solución:
El polinomio característico de y_t es

$$1 - \phi_1 \lambda = 0,$$

donde λ es la raiz del polinomio. Como $|\lambda| = |1/\phi_1| = 1.25$, el modelo es causal.

(b.) Reescribe el modelo en forma de media móvil.

Solución:
La representación $MA(\infty)$ es:

$$y_t = \frac{\phi_0}{1-\phi_1} + \frac{1}{1-\phi_1 L} a_t$$

$$= \frac{\phi_0}{1-\phi_1} + \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_1)^j a_{t-j}$$

$$= 2.5 + \sum_{j=0}^{\infty} (0.8)^j a_{t-j}.$$

(c.) Calcula la media y la varianza de y_t.

Solución:
La media y variancia de y_t son:

$$\mu(y_t) = \tfrac{\phi_0}{1-\phi_1} = \tfrac{0.5}{1-0.8} = 2.5,$$

$$Var(y_t) = \tfrac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2} = \tfrac{4}{1-0.8^2} = 11.11.$$

(d.) Calcula las autocorrelaciones: ρ_k, $k = 1, 2$.

Solución:

Las autocorrelaciones de y_t en $k = 1$ y $k = 2$ son:

$$\rho_k = (\phi_1)^k = \begin{cases} \phi_1 = 0.8 & k = 1 \\ (\phi_1)^2 = 0.64 & k = 2 \end{cases}$$

(e.) Los gestores de la empresa quiere presentar a sus clientes una predicción de los rendimientos para el siguiente trimestre. Para ello cuentan con 100 obrsevaciones hasta el periodo T, por ejemplo saben que $y_{T-2} = 5\%, y_{T-1} = -3\%$, e $y_T = 4\%$. Calula la predicción de los rendimientos en $T + 1$ partiendo del presente T.

Solución:

La predicción puntual 1 periodo adelante es:

$$y_{T+1} = \phi_0 + \phi_1 y_T + a_{T+1}$$

$$E(y_{T+1}|y_T, y_{T-1}, y_{T-2}, \ldots) = \phi_0 + \phi_1 y_T$$

$$\widehat{y}_T(1) = 0.5 + (0.8 \cdot 4) = 3.7\%.$$

(f.) Algunos clientes se quejan de que la predicción puntual a un periodo por delante no es muy representativa de lo que puede pasar en el futuro. Poniéndose en una posición pesimista prefieren saber si la media de los rendimientos puede ser negativa o no. Sabiendo que la media muestral de y_t durante los últimos 100 periodos es $\bar{y}_{100} = 3\%$ construye un intervalo aproximado de confianza al 95% para el valor medio de y_t y responde a la pregunta de los clientes.

Solución:

El intervalo de 95% para el valor medio de y_t es:

$$\mu \in \bar{x}(y_t) \pm 1.96 \sqrt{\frac{\psi^2(1)\sigma_a^2}{n}},$$

donde

$$\psi^2(1) = \left(\frac{1}{1 - \phi_1 L} \right)^2 \Bigg|_{L=1} = 25.$$

Sustituyendo valores tenemos que:

$$\mu \in 3\% \pm 1.96 \sqrt{\tfrac{25 \cdot 4}{100}}$$

$$\mu \in [3\% \pm 1.96].$$

Por lo tanto, a ese nivel de confianza la media sólo toma valores positivos.

Pregunta 2 [25 Puntos]

En el laboratorio de la prestigiosa **Universidad Carlos3-Harvard0** se han generado los siguientes datos: $x_1 = 1.343261482$, $x_2 = -0.10384662$, $x_3 = -1.423057674$ provenientes del modelo:

$$x_t = u_t - 0.5u_{t-1}$$

$$u_t \overset{iid}{\sim} N(0,1),$$

con $u_0 = -1.255110888$. El objetivo de este experimento es analizar diferentes formas de predecir. [**SE ACONSEJA REDONDEAR a DOS DECIMALES**].

(a.) Conociendo el modelo y asumiendo que se está en $T = 3$, realice predicciones de x_4, x_5 y x_6.

Solución:

La mejor predicción conociendo el modelo es la esperanza condicional dada la información que se tiene en $T = 3$. Escribiendo el modelo para la observación que queremos predecir y tomando esperanzas condicionales obtenemos

$$x_4 = u_4 - 0.5u_3; \qquad E(x_4|I_3) = -0.5u_3 = (-0.5)(x_3 + 0.5x_2 + 0.5^2x_1 + 0.5^3u_0) = 0.648027237$$

$$x_5 = u_5 - 0.5u_4; \qquad E(x_5|I_3) = 0$$

$$x_6 = u_6 - 0.5u_5; \qquad E(x_5|I_3) = 0.$$

(b.) Los investigadores de otro prestigioso centro de investigación, la **Universidad Harvard-CarlosQUE** piensan que se puede predecir de una forma más rápida usando una predicción incondicional donde solo se conocen las observaciones de la variable x_t y por lo tanto, no hace falta conocer el modelo que genera los datos. Realice predicciones incondicionales de x_4, x_5 y x_6.

Solución:

La mejor predicción incondicional es la media muestral. Por lo tanto los investigadores de este otro centro de investigación producirían las siguientes predicciones

$$\text{Predicción de } x_4 = \overline{x} = (x_1 + x_2 + x_3)/3 = -0.06121427$$

$$\text{Predicción de } x_5 = \overline{x} = (x_1 + x_2 + x_3)/3 = -0.06121427$$

$$\text{Predicción de } x_6 = \overline{x} = (x_1 + x_2 + x_3)/3 = -0.06121427.$$

(c.) Los dos centros de investigación quieren que se comparen las predicciones. Para ello se generan, siguiendo el modelo verdadero, las observaciones correspondientes: $x_4 = 1.587274971$, $x_5 = -1.038700438$ y $x_6 = 0.053870349$. Calcule los errores cuadráticos de cada predicción. ¿Qué grupo debería ganar?

Solución:

Para el primer grupo los errores cuadráticos son:

$$(e_4)^2 = (x_4 - E(x_4|I_3))^2 = (1.587274971 - 0.648027237)^2 = 0.882186306$$

$$(e_5)^2 = (x_5 - E(x_5|I_3))^2 = (-1.038700438 - 0)^2 = 1.078898601$$

$$(e_6)^2 = (x_6 - E(x_6|I_3))^2 = (0.053870349 - 0)^2 = 0.002902014.$$

Para el segundo grupo de investigadores los errores cuadráticos son:

$$(e_4)^2 = (x_4 - \overline{x})^2 = (1.587274971 - (-0.06121427))^2 = 2.71751678$$

$$(e_5)^2 = (x_5 - \overline{x})^2 = (-1.038700438 - (-0.06121427))^2 = 0.955479209$$

$$(e_6)^2 = (x_6 - \overline{x})^2 = (0.053870349 - (-0.06121427))^2 = 0.01324447.$$

La teoría dice que en media cuadrática la mejor predicción es la esperanza condicional, por lo que el grupo de la **Universidad Carlos3-Harvard0** debería ser "en media" el ganador. En el caso concreto de este experimento, lo que se observa es que en los casos puntuales de estas tres predicciones, el primer grupo gana 2 a 1 al segundo grupo.

(d.) El equipo de la **Universidad Harvard-CarlosQUE** enfadado por no haber ganado, comenta que la **Universidad Carlos3-Harvard0** ha podido realizar sus predicciones porque el modelo MA generador de los datos era invertible. Opine en dos lineas sobre este comentario.

Solución:
El equipo de la Universidad Harvard-CarlosQUE tiene razón. El modelo generador de los datos es invertible ($0.5 < 1$) y gracias a ello en el apartado (a) se ha podido calcular u_3.

Pregunta 3 [25 Puntos]

Los investigadores de la escuela de negocios de la **Universidad MIT-MIT-MIT** (universidad conocida popularmente por la corre-caminos) están analizando el siguiente modelo dinámico para estudiar el efecto de los precios del petróleo (x_t) en el precio de la gasolina (y_t)

$$y_t = 0.5y_{t-1} + 0.7x_{t-1} + 0.3x_{t-2} + e_t, \tag{1}$$

donde los errores e_t son i.i.d con media cero y varianza igual a 2.

(a.) Escribe el modelo (1) en terminos del operador de retardos. ¿Es el modelo estable?

Solución:

$$C(L)y_t = B(L)x_t + e_t,$$

donde

$$B(L) = 0.7L + 0.3L^2$$

$$C(L) = 1 - 0.5L$$

Como

$$C(z) = 1 - 0.5z = 0$$

$\Longrightarrow$

$$z = \frac{1}{0.5} = 2 > 1$$

el modelo es estable.

(b.) Calcule los multiplicadores de corto o de impacto m_0 y largo plazo o total m_T.

Solución:

El multiplicador de corto plazo es:

$$m_0 = \frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \frac{B(0)}{C(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

El multiplicador de largo plazo es:

$$m_T = \sum_{j=0}^{\infty} m_j = \frac{B(1)}{C(1)} = \frac{0.7 + 0.3}{1 - 0.5} = 2.$$

(c.) Calcule el retardo medio.

Solución:

$$\text{Retardo Medio} = \frac{B'(1)}{B(1)} - \frac{C'(1)}{C(1)} = 2.3.$$

(d.) Calcule el retardo mediano.

Solución:

L	0	1	2
$\frac{\sum_{j=0}^{L} m_j}{m_T}$	$\frac{m_0}{m_T} = 0$	$\frac{m_0+m_1}{m_T} = 0.35$	$\frac{m_0+m_1+m_2}{m_T} = \frac{0.7+0.65}{2} = 0.675$

donde

$$m_1 = \frac{\partial y_{t+1}}{\partial x_t} = \frac{\partial[0.5y_t + 0.7x_t + 0.3x_{t-1}]}{\partial x_t} = 0.5\frac{\partial y_t}{\partial x_t} + 0.7 = 0.7.$$

$$m_2 = \frac{\partial y_{t+2}}{\partial x_t} = \frac{\partial[0.5y_{t+1} + 0.7x_{t+1} + 0.3x_t]}{\partial x_t} = 0.5\frac{\partial y_{t+1}}{\partial x_t} + 0.3 = 0.65.$$

Entonces,

$$\text{Retardo Mediano} = 2.$$

(e.) Los investigadores anteriores, una vez que han calculado todos los multiplicadores y los diferentes retardos se dan cuenta que los errores del modelo no son iiid sino que presentan cierta correlación, siguen una estructura AR(1). En este caso ¿cree que la estimación por MCO presentaría problemas? En caso afirmativo qué les sugeriría para resolver dichos problemas.

Solución:

En este caso estamos ante un modelo con variables dependientes retardadas y errores correlacionados. Ésto genera inconsistencia en los estimadores de MCO. Hay dos formas de resolverlo: (i) Utilizando variables intrumentales o (ii) transformando el modelo para que los nuevos errores no esten correlacionados.