Nombre y Apellidos: ....

ID: ....

Grupo: ....

EXAMEN ECONOMETRÍA II (Febrero 2008)

Lea cuidadosamente cada pregunta. Responda muy claramente dentro del espacio asignado. Observe que los valores númericos están en formato ordenador. **El valor de cada pregunta se indica entre corchetes**.

Las notas del examen aparecerán en aula global el día 13. El día y lugar de la revisión sera anunciado por cada profesor en su pagina web. Cualquier cambio se anunciará con la antelación posible en dichas páginas.

Tiempo límite: 105 minutos. **Total de puntos:** 80.

BUENA SUERTE

Pregunta 1 [45 puntos]

Sea $\{Z_t\}$ un proceso estocástico que viene representado por el siguiente modelo:

$$Z_t = 0.2 + a_t + 0.3a_{t-1} - 0.5a_{t-2}, \tag{1}$$

donde $\{a_t\}$ es un Ruido Blanco (RB) con media cero y varianza 1.

a. Reescriba el modelo (1) utilizando el operador de retardos e indique que tipo de modelo es.[**5**]

Solución:

$$Z_t = 0.2 + a_t + 0.3a_{t-1} - 0.5a_{t-2} \Rightarrow Z_t = 0.2 + \underbrace{(1 + 0.3L - 0.5L^2)}_{\theta_2(L)}a_t.$$

Esto es, $Z_t = 0.2 + \theta_2(L)a_t$. El modelo es un MA(2).

b. Calcule $\mu = E[Z_t]$ y la función de autocovarianzas $\gamma_k = Cov(Z_{t-k}, Z_t) = E[(Z_{t-k} - \mu)(Z_t - \mu)]$ para $k \in \{0, 1, 2, ...\}$. En base al resultado obtenido: (I) ¿es $\{Z_t\}$ un proceso ESTACIONARIO EN COVARIANZA?; (II) ¿ y CAUSAL? En caso afirmativo, obtenga la representación causal de $\{Z_t\}$.[**10**]

Solución: El enunciado me dice que $\{a_t\}$ es un RB con media cero y varianza 1. Por lo tanto, sabemos que

$$\begin{aligned} E(a_t) &= 0 \quad \forall t, \\ Var(a_t) &= E(a_t^2) = 1 \quad \forall t, \\ Cov(a_{t-k}, a_t) &= E(a_{t-k}a_t) = 0 \quad \forall t, \ \forall k \neq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Utilizamos (2) para calcular los momentos de primer y segundo orden:

(i) $\mu = E[Z_t] = E[0.2 + a_t + 0.3a_{t-1} - 0.5a_{t-2}] = 0.2$, pues a_t RB con $E[a_t] = 0 \quad \forall t$.

(ii) $\gamma_0 = E[(Z_t - 0.2)^2] = E[(a_t + 0.3a_{t-1} - 0.5a_{t-2})^2] = E[a_t^2 + 0.09a_{t-1}^2 + 0.25a_{t-2}^2 + \text{productos cruzados } a_ta_s \text{ con } t \neq s] = (1 + 0.09 + 0.25)E(a_t^2) = 1.34$, pues a_t RB con $E(a_t^2) = 1$ y $E[a_ta_s] = 0 \quad \forall t \neq s$.

(iii) $\gamma_1 = E[(Z_{t-1} - 0.2)(Z_t - 0.2)] = E[(a_{t-1} + 0.3a_{t-2} - 0.5a_{t-3})(a_t + 0.3a_{t-1} - 0.5a_{t-2})] = 0.3E[a_{t-1}^2] - 0.3 * 0.5E[a_{t-2}^2] = 0.3 - 0.15 = 0.15$, pues a_t RB con $E(a_t^2) = 1$ y $E[a_t a_s] = 0 \quad \forall t \neq s$.

$\gamma_2 = E[(Z_{t-2} - 0.2)(Z_t - 0.2)] = E[(a_{t-2} + 0.3a_{t-3} - 0.5a_{t-4})(a_t + 0.3a_{t-1} - 0.5a_{t-2})] = -0.5E[a_{t-2}^2] = -0.5$, pues a_t RB con $E(a_t^2) = 1$ y $E[a_t a_s] = 0 \quad \forall t \neq s$.

$\gamma_3 = E[(Z_{t-3} - 0.2)(Z_t - 0.2)] = E[(a_{t-3} + 0.3a_{t-4} - 0.5a_{t-5})(a_t + 0.3a_{t-1} - 0.5a_{t-2})] = 0$, pues a_t RB con $E[a_t a_s] = 0 \quad \forall t \neq s$. Por lo tanto, $\gamma_k = 0 \quad \forall k > 2$ (este resultado podíamos anticiparlo pues se trata de un MA(2) y sabemos que la ACF se anula a partir del tercer retardo).

(I) Un proceso MA es ESTACIONARIO EN COVARIANZA por construcción, es decir, los momentos de primer y segundo orden cumplen que:

$$
\begin{aligned}
E(Z_t) &= \mu \quad \forall t, \\
Var(Z_t) &= E[(Z_t - \mu)^2] = \gamma_0 \quad \forall t, \\
Cov(Z_{t-k}, Z_t) &= E[(Z_{t-k} - \mu)(Z_t - \mu)] = \gamma_k \quad \forall t.
\end{aligned}
$$

(II) Un proceso se dice que es una función CAUSAL de $\{a_t\}$ si admite la representación $Z_t = \Psi(L)a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}$ con $\{\psi_j\}$ tal que $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Por lo tanto, un proceso MA es CAUSAL por construcción. Observar que para este caso $\Psi(L) = \theta_2(L) = 1 + 0.3L - 0.5L^2$, esto es $\psi_0 = 1$; $\psi_1 = 0.3$; $\psi_2 = -0.5$ y $\psi_j = 0 \quad \forall j \geq 3 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| = 1 + 0.3 + 0.5 = 1.8 < \infty$.

c. Estudie si el proceso representado en (1) es INVERTIBLE. En base al resultado obtenido, ¿sería posible una representación AR(∞) para este proceso, esto es, $a_t = \alpha + \Pi(L)Z_t$, con $\alpha = cte$ y $\Pi(L) = 1 + \pi_1 L + \pi_2 L^2 + \pi_3 L^3 + ...$? En caso afirmativo, compruebe que $\alpha = -0.25$ y calcule los tres primeros términos del polinomio infinito, esto es, π_1, π_2 y π_3. **[10]**

Solución: **(i)** Para estudiar la INVERTIBILIDAD del proceso tenemos que calcular las raíces del polinomio del operador retardos $\theta_2(L)$. Si las raíces de este polinomio caen fuera del circulo unidad (esto es, su valor absoluto es mayor que 1), entonces el proceso será invertible. En nuestro caso, tenemos el siguiente polinomio de orden 2: $\theta_2(L) = 1 + 0.3L - 0.5L^2$. Por lo tanto tendremos dos raíces: $-0.5L^2 + 0.3L + 1 = 0 \Rightarrow L_1 = \frac{-0.3+\sqrt{(0.3)^2-4*(-0.5)*1}}{2*(-0.5)} = -1.15$ y $L_2 = \frac{-0.3-\sqrt{(0.3)^2-4*(-0.5)*1}}{2*(-0.5)} = 1.75$. Notar que $|L_1| = |-1.15| > 1$ y $|L_1| = |1.75| > 1 \Rightarrow$ PROCESO INVERTIBLE, pues ambas *raíces caen fuera* del círculo unidad.

(ii) Por ser $\{Z_t\}$ INVERTIBLE, esto significa que $\theta_2(L)^{-1} = \frac{1}{\theta_2(L)}$ ESTÁ BIEN DEFINIDO y podemos calcular $a_t = \frac{-0.2}{\theta_2(L)} + \frac{1}{\theta_2(L)} Z_t$. Por lo tanto $\alpha = \frac{-0.2}{1+0.3L-0.5L^2} = \frac{-0.2}{1+0.3-0.5} = -0.25$ (Recordar que el operador retardo aplicado a una constante es igual a la constante $Lc = c$). Calculamos a continuación el polinomio de orden infinito: $\frac{1}{\theta_2(L)} = \Pi(L) \Rightarrow \theta_2(L)\Pi(L) = 1$. Esto es,

$$(1 + 0.3L - 0.5L^2)(1 + \pi_1 L + \pi_2 L^2 + \pi_3 L^3 + ...) = 1,$$

$$\begin{aligned}
&1 + \pi_1 L + \pi_2 L^2 + \pi_3 L^3 + ... \\
&\quad +0.3L + 0.3\pi_1 L^2 + 0.3\pi_2 L^3 + ...+ \\
&\qquad\qquad -0.5L^2 - 0.5\pi_1 L^3 - ... = 1
\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de ambos polinomios tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\pi_1 + 0.3 = 0 && \Rightarrow \pi_1 = -0.3. \\
&\pi_2 + 0.3\pi_1 - 0.5 = 0 && \Rightarrow \pi_2 = -0.3\pi_1 + 0.5 = 0.09 + 0.5 = 0.59. \\
&\pi_3 + 0.3\pi_2 - 0.5\pi_1 = 0 && \Rightarrow \pi_3 = -0.3\pi_2 + 0.5\pi_1 = \\
& && = -0.3 * 0.59 - 0.5 * 0.3 = -0.177 - 0.15 = -0.327.
\end{aligned}$$

Para $j \geq 2$, tenemos que $\pi_j = -0.3\pi_{j-1} + 0.5\pi_{j-2}$.

d. Suponga que de una muestra de tamaño 100 se obtiene $\overline{Z}_{100} = 10.2$. Construya un intervalo aproximado de confianza al 95% para μ, asumiendo a_t es i.i.d (0, 1). ¿Sugieren los datos que $\mu = 0$? **[10]**

Solución: El TCL dice que si $Z_t = \Psi(L)a_t$; $\Psi(L) = 1+\psi_1 L+\psi_2 L^2+...$; $a_t\tilde{\ }iid(0, \sigma_a^2)$, entonces, $\sqrt{T}(\overline{Z}_T - \mu)\tilde{\ }N(0, \Psi(1)^2\sigma_a^2)$.

En nuestro caso, $Z_t = 0.2 + \theta_2(L)a_t$, se corresponde YA con la representación MA que establece el TCL. Por lo tanto, $\Psi(L) = \theta_2(L) =$

$1+0.3L-0.5L^2 \Rightarrow \Psi(1)=1+0.3-0.5=0.8$. Además, el enunciado nos dice que $\sigma_a^2 = Var(a_t) = 1$. Por lo tanto,

$$\sqrt{100}(\overline{Z}_{100}-\mu)\tilde{}N(0,(0.8)^2) \;\Rightarrow\; \overline{Z}_{100}\tilde{}N(\mu,\frac{(0.8)^2}{100}).$$

A partir del resultado anterior podemos construir el intervalo aproximado de confianza al 95% como:

$$\begin{aligned} IC_{\mu}^{95\%} &= [\overline{Z}_{100} \pm 1.96\sqrt{\frac{(0.8)^2}{100}}] = [10.2 \pm 1.96 * 0.08] \\ &= [10.2 \pm 0.1568] = [10.0432; 10.3568]. \end{aligned}$$

Ya que, $\mu = 0 \notin IC_{\mu}^{95\%} \Rightarrow$ Hay evidencia suficiente para rechazar que $\mu = 0$.

e. Supongamos que un investigador conoce que $a_T = 0.65$ y $a_{T-1} = 1$. (I) Calcule la mejor predicción en media cuadrática de Z_{T+1} realizada en T, esto es, $Z_{T+1|T} = E(Z_{T+1}|Z_T, Z_{T-1}, Z_{T-2}, ...)$. Calcule también $Z_{T+2|T}$ y $Z_{T+3|T}$. (II) Construya un intervalo aproximado de confianza al 95% para Z_{T+2}. [**10**]

Solución: (I) LLamemos $I_T = \{Z_T, Z_{T-1}, Z_{T-2}, ...\}$ al conjunto de información disponible en T y que está formado por las observaciones pasadas y presente de Z. La predicción de Z un período hacia adelante viene dada por:

$$\begin{aligned} Z_{T+1|T} &= E(Z_{T+1}|Z_T, Z_{T-1}, Z_{T-2}, ...) \\ &= E(0.2 + a_{T+1} + 0.3a_T - 0.5a_{T-1}|I_T) \\ &= 0.2 + E(a_{T+1}|I_T) + 0.3E(a_T|I_T) - 0.5E(a_{T-1}|I_T) \\ &\overset{(*)}{=} 0.2 + 0.3a_T - 0.5a_{T-1} \\ &= 0.2 + 0.3 * 0.65 - 0.5 * 1 = -0.105. \end{aligned}$$

$(*)$ Notar que $E(a_{T+1}|I_T) = 0$, pues en T NO observamos los valores futuros del RB. $E(a_T|I_T) = a_T$, pues $Z_T = 0.5 + \theta_2(L)a_T$ INVERTIBLE $\Rightarrow a_T = \frac{Z_T - 0.5}{\theta_2(L)}$. Análogamente obtenemos el resultado para a_{T-1}.

La predicción de Z dos períodos hacia delante viene dada por:

$$\begin{aligned} Z_{T+2|T} &= E(Z_{T+3}|Z_T, Z_{T-1}, Z_{T-2}, ...) \\ &= E(0.2 + a_{T+2} + 0.3a_{T+1} - 0.5a_T|I_T) \\ &= 0.2 + E(a_{T+2}|I_T) + 0.3E(a_{T+1}|I_T) - 0.5E(a_T|I_T) \\ &= 0.2 - 0.5a_T = 0.2 - 0.5 * 0.65 = -0.125. \end{aligned}$$

La predicción de Z tres períodos hacia delante viene dada por:

$$\begin{aligned} Z_{T+3|T} &= E(Z_{T+2}|Z_T, Z_{T-1}, Z_{T-2}, ...) \\ &= E(0.2 + a_{T+3} + 0.3a_{T+2} - 0.5a_{T+1}|I_T) \\ &= 0.2 + E(a_{T+3}|I_T) + 0.3E(a_{T+2}|I_T) - 0.5E(a_{T+1}|I_T) \\ &= 0.2. \end{aligned}$$

(II) Dado $z_t = \Psi(L)a_t$; $\Psi(L) = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + ...$; $a_t\tilde{\ }RB(0, \sigma_a^2)$. Entonces, $IC_{Z_{T+l}}^{95\%} = [Z_{T+l|T} \pm 1.96\sqrt{\sigma_a^2(1 + \psi_1^2 + ... + \psi_{l-1}^2)}]$.

Para nuestro caso particular: $l = 2$, $\sigma_a^2 = 1$ y $\Psi(L) = \theta_2(L) = 1 + 0.3L - 0.5L^2 \Rightarrow \psi_1 = 0.3$ y $\psi_2 = -0.5$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} IC_{Z_{T+2}}^{95\%} &= [Z_{T+2|T} \pm 1.96\sqrt{(1 + (0.3)^2)}] \\ &= [-0.125 \pm 1.96 * 1.044] \\ &= [-0.125 \pm 2.04624] = [-2.17124; 1.92124]. \end{aligned}$$

Pregunta 2 [25 puntos]

En el pais de **Sorialandia** siempre que hay una recesión se hecha la culpa al aumento de los precios del petroleo. Para cuantificar el efecto de estos precios en la actividad real del país, se encarga a varios investigadores de la prestigiosa universidad **CarlosIII-Harvard0** que estimen varios modelos de retardos distribuidos, como los estudiados en el curso de Econometría II, para la variable $Y_t = 100Log(PIB_t/PIB_{t-1})$. Estos investigadores encuentran que los precios del petroleo solo afectan adversamente al crecimiento de la economía cuando aumentan o saltan por encima de los valores pasados recientes. Asi construyen una variable $S_t = \max[0,$ (la diferencia porcentual entre los precios del petroleo en tiempo t y su maximo valor durante el pasado año)]. El modelo final de retardos distribuidos que estiman relacionando Y_t y S_t durante el periodo 1960:I-2005:IV es:

$$\widehat{Y}_t = \underset{(0.1)}{1.0} - \underset{(0.054)}{0.055}S_t - \underset{(0.057)}{0.026}S_{t-1} - \underset{(0.048)}{0.031}S_{t-2} - \underset{(0.042)}{0.109}S_{t-3} - \underset{(0.053)}{0.128}S_{t-4}$$
$$+ \underset{(0.025)}{0.008}\, S_{t-5} + \underset{(0.048)}{0.025}S_{t-6} - \underset{(0.039)}{0.019}S_{t-7} + \underset{(0.042)}{0.067}S_{t-8},$$

donde los errores standard aparecen entre parentesis.

a. Calcular el multiplicador de impacto y el multiplicador total.[**5**]

Solucion: El multiplicador de impacto es $\mathbf{m}_o = \mathbf{-0.055}$. El multiplicador total es:

$$\mathbf{m}_T = \mathbf{-0.055 - 0.026 - 0.031 - 0.109 - 0.128}$$
$$\mathbf{+0.008 + 0.025 - 0.0190 + 0.067 = -0.268}$$

b. ¿En cuantos trimestres se materializa un tercio del multiplicador total? [**10**]

Solución:

Trimestre 0	Trimestre 1	Trimestre 2
$\frac{m_o}{m_T} = \frac{-0.055}{-0.268}$ $=\mathbf{0.20522}$	$\frac{m_o+m_1}{m_T} = \frac{-0.055-0.026}{-0.268}$ $=\mathbf{0.30224}$	$\frac{m_o+m_1+m_2}{m_T} = \frac{-0.055-0.026-0.031}{-0.268}$ $=0.\mathbf{41791}$

.

Por lo tanto en dos trimestre se realiza un tercio de todo (negativo) del multiplicador total.

c. Suponga que el precio del petroleo sube un 25% sobre su último máximo y permanece a ese nivel más alto (es decir $S_t = 25$, $S_{t+1} = S_{t+2} = ... = 0$). ¿Cual es el efecto predicho sobre el crecimiento del PIB durante el mismo trimestre y cada trimestre del siguiente año?[**5**]

Solucion:

Periodo hacia adelante i	Multiplicador trimestral (m_i)	Efecto predicho sobre el crecimiento del PIB $(25m_i)$
0	-0.055	-1.375
1	-0.026	-0.65
2	-0.031	-0.775
3	-0.109	-2.725
4	-0.128	-3.2

d. ¿Cual es el cambio predicho acumulado en el crecimiento del PIB al final del noveno trimestre?[**5**]

Solución: $25 * m_T = 25 * (-\mathbf{0.268}) = -\mathbf{6.7}\%$.

Pregunta 3 [10 puntos]

En el pais de **ESTIMAqueTESTIMA** se considera el siguiente modelo

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t \tag{3}$$

a. Explica brevemente cuales son las consecuencias de la existencia de correlación serial en el termino de error u_t. ¿Que se puede hacer para remediar los problemas?[**5**]

Solución: Cuando los errores u_t están autocorrelacionados el estimador MCO de los coeficientes $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}'$ es consistente (asumiendo que $E[u_t \mid x] = 0$). Sin embargo este estimador no es eficiente (su varianza no es la menor posible). Por lo tanto los contrastes que usan esta varianza no son validos. Hay dos formas de resolver este problema:

Primero: Ya que MCO es un estimador consistente y el problema solo está en la varianza del estimador de MCO, se pueden construir contrastes que usen MCO para estimar los coeficentes junto con un estimador de la varianza que sea robusto ante la existencia de autocorrelación (estimadores HAC de la varianza).

Segundo: Si la forma de la autocorrelación es conocida entonces se puede transformar el modelo de tal forma que el termino de error resultante despues de la transformación sea ruido blanco.

b. Los Económetras de la prestigiosa universidad **CarlosIII-Harvard0** del departamento **ARMAStomar** se dan cuenta que en el anterior modelo $x_t = y_{t-1}$ y que los errores siguen un AR(1), es decir,

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \beta y_{t-1} + u_t \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \ i.i.d. \end{aligned} .$$

Explica brevemente cuales son las consecuencias de la existencia de correlación serial en el termino de error u_t. ¿Qué se puede hacer para remediar los problemas?[**5**]

Solución: Al contener el modelo variables dependientes retardadas y el termino de error mostrar correlación serial, lo estimadores MCO son inconsistentes (se demuestra como se ha hecho en clase).

Hay dos formas de resolver este problema:

Primero: Usando variables instrumentales y estimando el modelo por Minimos Cuadrados Bietápicos.

Segundo: Al saber la forma de la autocorrelación que presenta el termino de error u_t el modelo es fácilmente transformable siguiendo la siguiente cadena:

$$\begin{aligned} u_t &= y_t - \alpha - \beta y_{t-1}, \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \\ y_t - \alpha - \beta y_{t-1} &= \rho(y_{t-1} - \alpha - \beta y_{t-2}) + \varepsilon_t, \\ y_t &= (1-\rho)\alpha + (\rho + \beta) y_{t-1} - \beta\rho y_{t-2} + \varepsilon_t. \end{aligned} \tag{4}$$

Entonces podemos aplicar MCO en el modelo (4), es decir, regresando y_t sobre una constante, y_{t-1}, y_{t-2}, obteniendo estimadores que son consistentes y eficientes.