Estimación e Inferencia

Jesús Gonzalo

29 de octubre de 2008

Índice

1. Resultados asintóticos para la media, μ.

Descomposición de Wold

$$Z_t = \Psi(L)a_t = (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \cdots)a_t$$

Descomposición de Beveridge-Nelson (B-N)

$$\Psi(L) = \Psi(1) + (1 - L)\tilde{\Psi}(L)$$

donde los coeficientes del polinomio $\tilde{\Psi}(L)$ son $\tilde{\Psi}_j = -\sum_{s=j+1}^{\infty} \psi_s$

Ejemplos:

MA(1): $\Psi(L) = (1-\psi_1 L) = (1-\psi_1)+(1-L)\tilde{\Psi}(L) = (1-\psi_1)+(1-L)\psi_1$

MA(2): $\Psi(L) = (1-\psi_1 L-\psi_1 L^2) = (1-\psi_1-\psi_2)+(1-L)\left[(\psi_1 + \psi_2) + \psi_2 L\right]$

Se puede demostrar que:

- Si $p \geq 1$ entonces

$$\sum_{j=0}^{\infty} |j|^p |\psi_j|^p < \infty \Longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \left|\tilde{\psi}_j\right|^p < \infty.$$

Recordad que

- $$\sum_{j=0}^{\infty} \left|\tilde{\psi}_j\right| < \infty \Longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \left|\tilde{\psi}_j\right|^2 < \infty$$

DEFINICIÓN: Diferencia de Martingalas (m.d.s)

X_t es una diferencia de martingalas si $E[X_t|X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = 0$

[¿Que relación hay entre un proceso m.d.s y un ruido blanco?]

TEOREMA (LGN para la media)

Si $Z_t = \Psi(L)a_t$ con $\sum_{j=1}^{\infty} j^2\psi_j^2 < \infty$ y a_t es una diferencia de martingalas con $\sup_t E|a_t^2| < \infty$, entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \xrightarrow{p} 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Prueba:

$$Z_t = \Psi(L)a_t = \Psi(1)a_t + (1-L)\tilde{\Psi}(L)a_t = \Psi(1)a_t + \tilde{a}_t - \tilde{a}_{t-1}$$

donde $\tilde{a}_j = \tilde{\Psi}(L)a_j$

Sumando en ambos lados

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t = \psi(1)\frac{\sum_{t=1}^{n} a_t}{n} + \frac{1}{n}(\tilde{a}_n - \tilde{a}_0)$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{\sum_{t=1}^{n} a_t}{n} \xrightarrow{p} 0$$

(por alguna LGN para diferencia de martingales) y que

$$\frac{1}{n}(\tilde{a}_n - \tilde{a}_0) \xrightarrow{p} 0$$

(porque $\tilde{a}_0$ y $\tilde{a}_n$ están acotadas ya que $E(\tilde{a}_0^2) = E(\tilde{a}_n^2) < \infty$).

Entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \xrightarrow{p} 0 = \mathbb{E}(Z_t).$$

TEOREMA (TCL para la media)

Si $Z_t = \Psi(L)a_t$ donde $\sum_{j=1}^{\infty} |j|\,|\psi_j| < \infty$ y a_t es una diferencia de martingales estrictamente estacionaria y ergodica con $\mathbb{V}(a_t) = \sigma^2 < \infty$. Entonces,

$$\sqrt{n}\frac{\sum_{t=1}^{n} Z_t}{n} \xrightarrow{d} N\left(0, \Psi^2(1)\sigma^2\right)$$

donde $\Psi^2(1)\sigma^2$ es la varianza de largo plazo.

Prueba:

$$\sqrt{n}\bar{Z}_n = \frac{\sum_{t=1}^{n} Z_t}{n} = \Psi(1)\frac{\sum_{t=1}^{n} a_t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}(\tilde{a}_n - \tilde{a}_0)$$

$\frac{1}{\sqrt{n}}(\tilde{a}_n - \tilde{a}_0) \xrightarrow{p} 0$ (por la misma razón que antes)
$\frac{\sum_{t=1}^{n} a_t}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ (por algun TCL para m.d.s)
y, por lo tanto,
$\Psi(1)\frac{\sum_{t=1}^{n} a_t}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N\left(0, \Psi^2(1)\sigma^2\right)$.

Ejemplo: $Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$

$$\Psi(L) = \frac{1}{1-\phi L} \quad ; \ \Psi(1) = \frac{1}{1-\phi}$$

Entonces,

$$\sqrt{n}\bar{Z}_n \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\sigma^2}{(1-\phi)^2}\right)$$

Pensad en como construir intervalos de confianza para la media de un AR(1). Observad el problema que ocurre con $\phi = 1$.

2. Resultados asintóticos para las covarianzas (γ_k) y correlaciones (ρ_k)

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{k}\left(Z_t - \bar{Z}_n\right)\left(Z_{t+k} - \bar{Z}_n\right) \quad 0 \leq k \leq n-1$$

y $\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$

TEOREMA: Si Z_t es un proceso estacionario $Z_t = \Psi(L)a_t$, $\{a_t\} \sim iid(0,\sigma^2)$ donde $\sum|\psi_j| < \infty$ y $\mathbb{E}(a_t^4) < \infty$, entonces para cada $k \in \{1,2,\ldots\}$ tenemos

$$\sqrt{n}\left[\begin{pmatrix}\hat{\rho}_1\\ \hat{\rho}_2\\ \vdots\\ \hat{\rho}_k\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \vdots\\ \rho_k\end{pmatrix}\right] \xrightarrow{d} N\left(0, W\right).$$

La matriz de varianzas y covarianzas W tiene una expresión muy compleja, y por ello hay que ir caso por caso:

1. Ruido Blanco: $w_{ii} = 1$

   Formamos intervalos de confianza:

   $$\pm 1{,}96\frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. $MA(q)$: $w_{ii} = \left[1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \cdots + 2\rho_q^2\right]$, $i > q$.

   Intervalos de confianza

   $$\pm 1{,}96\sqrt{\frac{w_{ii}}{n}}$$

   $MA(1)$: Intervalos de confianza: $\pm 1{,}96\sqrt{\frac{1+2\rho_1^2}{n}}$

3. Estimación e Inferencia de un AR(1)

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t \ ; \quad |\phi| < 1; \quad a_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

Sea $\{Z_t\}$ la solución causal. Esta será estacionaria y ergódica.

$$\hat{\phi}_n = \frac{\sum_{t=2}^n Z_t Z_{t-1}}{\sum_{t=2}^n Z_{t-1}^2} = \phi + \frac{\sum_{t=2}^n Z_{t-1} a_t}{\sum_{t=2}^n Z_{t-1}^2}$$

$$\sqrt{n}\left(\hat{\phi}_n - \phi\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=2}^n Z_{t-1} a_t}{\frac{1}{n} \sum_{t=2}^n Z_{t-1}^2}$$

$\frac{1}{n} \sum_{t=2}^n Z_{t-1}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{E}(Z_t^2) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=2}^n Z_{t-1} a_t \xrightarrow{d} N\left(0, V\right)$

$Z_{t-1} a_t$ es una diferencia de martingales.

$V = Var(Z_{t-1} a_t) = \mathbb{E}(a_t^2 Z_{t-1}^2) = \sigma^2 \mathbb{E}(Z_{t-1}^2) = \frac{\sigma^4}{1-\phi^2}$

Entonces

$$\sqrt{n}\left(\hat{\phi}_n - \phi\right) \xrightarrow{d} N\left(0, 1 - \phi^2\right)$$

Pensad en como construir intervalos de confianza para ϕ. Observad que pasa si $\phi = 1$.

4. Estimación e Inferencia de un MA(1)

$$Z_t = a_t + \theta a_{t-1} \ ; \quad |\theta| < 1; \quad a_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad i > 1$$

Posibles estimadores:

- $$\rho_1 = \frac{\theta}{1+\theta^2}$$

  $$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n}(Z_t - \bar{Z}_n)(Z_{t-1} - \bar{Z}_n)}{\sum_{t=2}^{n}(Z_t - \bar{Z}_n)}$$

  $$\hat{\theta} = \begin{cases} \frac{1-[1-4\hat{\rho}_1]^{1/2}}{2\hat{\rho}_1} & \text{si } 0 < |\hat{\rho}_1| < 0{,}5 \\ -1 & \text{si } \hat{\rho}_1 < -0{,}5 \\ 1 & \text{si } \hat{\rho}_1 > -0{,}5 \\ 0 & \text{si } \hat{\rho}_1 = 0 \end{cases}$$

- Estimador de mínimos cuadrados

  $$a_t = -\theta a_{t-1} + Z_t$$

  $$\min_{\{\theta\}} \sum_{t=2}^{n} a_t^2 = \min_{\{\theta\}} \sum_{t=2}^{n} \left(Z_t - \theta a_{t-1}(\theta)\right)^2$$

  Este es un problema de optimización no lineal. (Escribe las condiciones de primer orden y comparalas con las de un AR(1)).

  Se puede demostrar que

  $$\sqrt{n}\left(\hat{\theta} - \theta^0\right) \xrightarrow{d} N\left(0, (1-\theta^0)^2\right)$$

- Hannan-Rissanem

1. $\hat{a}_t = Z_t - P[Z_t | Z_{t-1}, Z_{t-2}, \ldots]$
2. $Z_t = \theta \hat{a}_{t-1} + u_t$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{t=2}^{n} Z_t \hat{a}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} \hat{a}_{t-1}^2}$$

Mirad la actuación de este estimador en el programa de E-views.

5. Contrastes para Ruido Blanco

La idea básica es usar las correlaciones

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_1^n Z_t Z_{t-i}}{\sum_1^n Z_{t-i}^2}$$

para contrastar que

$$Z_t = a_t \equiv \text{ ruido blanco.}$$

Más formalmente,

$$\begin{aligned} H_0: &\quad Cov(Z_t, Z_{t-j}) = 0 \quad j = 1, \ldots, k \\ H_a: &\quad Cov(Z_t, Z_{t-j}) \neq 0 \quad \text{ para al menos un } j \end{aligned}$$

Bajo H_0,

$$\sqrt{n}\left(\hat{\rho}_{(k\times 1)}\right) \sim N(0, \mathbf{I_{k\times k}})$$

$\hat{\rho}_{(k\times 1)} = (\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots, \hat{\rho}_k)'$

Entonces,

$$n\sum_{j=1}^{k} \hat{\rho}_j^2 \xrightarrow{d} \chi_k^2 \equiv Q$$

Estadístico Box-Pierce.

Si hemos estimado un $ARMA(p,q)$ entonces los grados de libertad deberían ser $k-(p+q)$.

Una modificación de Q:

$$Q^* = (n(n+2))\sum_{j=1}^{k}(n-j)^{-1}\hat{\rho}_j$$

Estadístico Ljung-Box.