ANEXO: HETEROSKEDASTICITY AND AUTOCORRELATION - CONSISTENT (HAC) STANDARD ERRORS (≡ Errores estándar consistentes a Heterocedasticidad y autocorrelación)

- Consideramos el Modelo de regresión lineal (MRL):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \quad [1], \text{ donde } E(u_t) = 0 \ (\text{ó } E(u_t | X_t) = 0)$$

- El estimador MCO (≡ Mínimos cuadrados ordinarios) de β_1 viene dado por:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2} = \boxed{\frac{S_{XY}}{S_X^2}} \quad [2]$$

S_{XY} = covarianza muestral entre X e Y / S_X^2 = varianza muestral de X

NOTA: RECORDAD QUE PODEMOS REESCRIBIR EL NUMERADOR Y EL DENOMINADOR DEL SIGUIENTE MODO

$$S_{XY} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{X_tY_t - \bar{Y}X_t - \bar{X}Y_t + \bar{X}\bar{Y}\} =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_tY_t - \bar{Y}\underbrace{\frac{\sum X_t}{T}}_{=\bar{X}} - \bar{X}\underbrace{\frac{\sum Y_t}{T}}_{=\bar{Y}} + \bar{X}\bar{Y} = \boxed{\frac{1}{T}\sum X_tY_t - \bar{X}\bar{Y}}$$

$$S_X^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{X_t^2 + \bar{X}^2 - 2\bar{X}X_t\} = \frac{\sum_{t=1}^{T}X_t^2}{T} + \bar{X}^2 - 2\bar{X}\underbrace{\frac{\sum X_t}{T}}_{=\bar{X}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{T}\cdot\sum_{t=1}^{T}X_t^2 - \bar{X}^2}$$

- Nuestro objetivo es poder hacer "INFERENCIA" sobre el parámetro β_1. Para ello necesito conocer la distribución asintótica de $\hat{\beta}_1$.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2} \underset{(*)}{=} \beta_1 + \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})u_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2} \quad [3]$$

Paso (*):

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \Longrightarrow \bar{Y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}Y_t = \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\beta_0}_{\frac{1}{\cancel{T}}\cdot\cancel{T}\beta_0} + \beta_1\frac{\sum X_t}{T} + \frac{\sum u_t}{T}$$

$$\Rightarrow \bar{Y} = \beta_0 + \beta_1\bar{X} + \bar{u}$$

Para simplificar el análisis supondremos que $\bar{u} = 0$ (este supuesto no es restrictivo, ya que por la LGN (≡ Ley Grandes números) $\bar{u} = \frac{1}{T}\sum u_t \xrightarrow{P} E(u_t) = 0$).

Por lo tanto,

$$(Y_t - \bar{Y}) = \cancel{\beta_0} + \beta_1 X_t + u_t - \cancel{\beta_0} - \beta_1\bar{X} - \bar{u} = \boxed{\beta_1(X_t - \bar{X}) + u_t - \bar{u}}$$

Sustituímos este resultado en la expresión [2] y obtenemos:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})(Y_t-\bar{Y})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})[\beta_1(X_t-\bar{X})+u_t-\bar{u}]}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2} =$$

$$= \beta_1 \cdot \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2} + \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})(u_t-\bar{u})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2} = \boxed{\beta_1 + \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})(u_t-\bar{u})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2}}$$

■ Como hemos supuesto que $\bar{u}=0$, tenemos el resultado buscado [3],

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})u_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2} = \beta_1 + \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})u_t}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2}}$$

■ Queremos conocer la distribución asintótica de $\hat{\beta}_1$. Esto es,

$$\boxed{\sqrt{T}(\hat{\beta}_1-\beta_1) \xrightarrow{d} N\left(\underbrace{E(\cdot)}, \underbrace{var(\cdot)}\right)}$$

VALORES Q. TENEMOS Q. CALCULAR!

A partir de [3],

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_1-\beta_1) = \frac{\sqrt{T}\cdot\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})u_t}{\underbrace{\frac{1}{T}\sum(X_t-\bar{X})^2}_{=S_X^2}} \overset{T^{1/2}\cdot T^{-1}=T^{-1/2}}{=} \boxed{\frac{\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})u_t}{S_X^2}} \quad [4].$$

Tenemos q. calcular la esperanza y la varianza de esta expresión.

Para simplificar la notación, denotamos $\tilde{X}_t = (X_t-\bar{X})$ y $V_t = (X_t-\bar{X})u_t = \tilde{X}_t u_t$

Por lo tanto, podemos escribir [4] como:

$$\boxed{\sqrt{T}(\hat{\beta}_1-\beta_1) = \frac{\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}V_t}{S_X^2} \xrightarrow{d} N\left(E\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum V_t\right), Var\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum V_t\right)\right)} \quad [5]$$

Por el TCL ≡ Teorema Central del Límite para observaciones i.i.d.

¿Cuanto vale $E\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum V_t\right)$?

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}V_t\right) = \frac{1}{\sqrt{T}}\cdot\sum_{t=1}^{T}E(V_t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\cdot\sum_{t=1}^{T}E(\tilde{X}_t u_t) \overset{C1+C2}{=} 0$$

C1. Si suponemos que X_t es un "regresor exógeno" (⇒ X_t sale fuera de la Esperanza como si fuese una cte.)

$$E(\tilde{X}_t u_t) = \tilde{X}_t E(u_t) = \tilde{X}_t \cdot 0 = 0$$

C2 Si suponemos que X_t es una v.a. (= VARIABLE ALEATORIA) ⇒ ESPERANZA CONDICIONAL $E(Y) = E(E(Y|X))$

$$E(\tilde{X}_t u_t) = E\{E(\tilde{X}_t u_t | X_t)\} = E\{\tilde{X}_t \underbrace{E(u_t|X_t)}_{=0}\} = 0$$

Al condicionar en X_t sale fuera

■ ¿CUÁNTO VALE $Var\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} V_t\right)$?

$$Var\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} V_t\right) = \frac{1}{T} Var\left(\sum_{t=1}^{T} V_t\right) = \frac{1}{T}\left\{\begin{array}{l} Var(V_1) + \overbrace{cov(V_1,V_2)}^{\gamma_1} + \dots + \overbrace{cov(V_1,V_T)}^{\gamma_{T-1}} \\ + cov(V_2,V_T) + Var(V_2) + \dots + cov(V_2,V_T) \\ \dots \\ + \underbrace{cov(V_T,V_1)}_{\gamma_{T-1}} + \underbrace{cov(V_T,V_2)}_{\gamma_{T-2}} + \dots + Var(V_T) \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{T}\left\{\sum_{t=1}^{T} Var(V_t) + 2\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{j=1}^{T-t} cov(V_t, V_{t+j})\right\} \quad [6]$$

NOTA: Comprueba que esta fórmula nos da el resultado deseado para T=2 y T=3, por ejemplo.

■ A continuación estudiaremos cuánto vale [6] para una serie de casos particulares Y CALCULAREMOS UN ESTIMADOR CONSISTENTE PARA LA EXPRESIÓN OBTENIDA.

CASO 1: ① $E(u_t^2) = E(u_t^2 | X_t) = \sigma^2$ (ERRORES "HOMOCEDÁSTICOS")

② $cov(u_t, u_s) = E(u_t u_s) = E(u_t u_s | X_t) = 0 \quad \forall s \neq 0$ (ERRORES "NO-AUTOCORRELACIONADOS")

Este supuesto lo hago para que sean válidos los resultados tanto con X_t regresor exógeno, como con X_t v.a.

Estos son los supuestos del MRLC (≡ Modelo de regresión Lineal clásico) que visteis en Econometría I.

■ Veamos cómo se simplifica [6] bajo ① y ②:

(I) $Var(V_t) = E(V_t^2) - \underbrace{(E(V_t))^2}_{=0 \text{ (ver ①+②)}} = E(\tilde{X}_t^2 u_t^2) \underset{X_t \text{ exogeno}}{=} \tilde{X}_t^2 E(u_t^2) \overset{①}{=} \sigma^2 \tilde{X}_t^2$

X_t v.a.: $E\{E(\tilde{X}_t^2 u_t^2 | X_t)\} = E(\tilde{X}_t^2 \underbrace{E(u_t^2 | X_t)}_{=\sigma^2}) = \sigma^2 \cdot E(\tilde{X}_t^2)$

(II) $cov(V_t, V_s) = E\{\tilde{X}_t u_t \tilde{X}_s u_s\} \overset{X_t \text{ EXOGENO}}{=} \tilde{X}_t \tilde{X}_s E(u_t u_s) = 0$

X_t v.a.: $E\{E(\tilde{X}_t u_t \tilde{X}_s u_s | X_t)\} = E\{\tilde{X}_t \tilde{X}_s \underbrace{E(u_t u_s | X_t)}_{=0}\} = 0$

Sustituimos (I) y (II) en [6]:

A partir de ahora obtenemos los resultados con "X_t exógeno", ya que análogamente se podría resolver para "X_t v.a.".

$$Var\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} V_t\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \underbrace{Var(V_t)}_{\sigma^2 \tilde{X}_t^2} + 2\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{j=1}^{T-t} \underbrace{cov(V_t, V_{t+j})}_{=0} = \sigma^2 \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{T}\sum \tilde{X}_t^2\right)}^{= S_x^2} = \boxed{\sigma^2 \cdot S_x^2} \quad (III)$$

$\tilde{X}_t^2 = (X_t - \bar{X})^2$

Sustituimos (III) en [5]:

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_1 - \beta_1) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} V_t\right)}{S_x^2} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 S_x^2) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\sigma^2 S_x^{\cancel{2}}}{(S_x^2)^{\cancel{2}}}\right) \equiv \boxed{N\left(0, \frac{\sigma^2}{S_x^2}\right)}$$

$\left\{\begin{array}{l} Y \sim N(\mu, \sigma^2) \\ aY + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2) \end{array}\right\}$

Por lo tanto,

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_1-\beta_1)\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{S_x^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$(\hat{\beta}_1-\beta_1)\sim N\left(\frac{0}{\sqrt{T}},\frac{1}{T}\frac{\sigma^2}{S_x^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\hat{\beta}_1\sim N\left(\beta_1,\frac{1}{T}\frac{\sigma^2}{S_x^2}\right)}$$

Esto es,

$$\boxed{\overset{MCO}{Var}(\hat{\beta}_1)=\frac{1}{T}\frac{\sigma^2}{S_x^2}}$$

→ Esta es la varianza que usamos para realizar contrastes sobre el parámetro β_1.

Notar que esta es la expresión estándard que obtemos para el estimador MCO. La fórmula general es $var(\hat{\beta}_{MCO})=\sigma^2(X'X)^{-1}$ ■

CASO 2: ① $E(u_t^2)=E(u_t^2|X_t)=\underbrace{\sigma_t^2}_{\text{La varianza no es cte en el tiempo.}}$ ⇒ HETEROCEDASTICIDAD.

② $cov(u_t,u_s)=E(u_t u_s)=E(u_t u_s|X_t)=0$ ⇒ NO-AUTOCORRELACIÓN

■ Calculamos $Var(V_t)$ y $cov(V_t,V_s)$ bajo ① y ②:

(I) $Var(V_t)\underset{E(V_t)=0}{=}E(V_t^2)=E(\tilde{X}_t^2u_t^2)$

(II) $cov(V_t,V_s)=E(V_tV_s)=E(\tilde{X}_t u_t\tilde{X}_s u_s)=\tilde{X}_t\tilde{X}_s E(u_tu_s)=0$

■ Sustituimos (I) y (II) en [6].

$$Var\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}V_t\right)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\underbrace{Var(V_t)}_{E(\tilde{X}_t^2u_t^2)}+2\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{T-t}\underbrace{cov(V_t,V_{t+j})}_{0}=\boxed{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}E(\tilde{X}_t^2u_t^2)}$$

$$=\boxed{\frac{1}{T}\left[E(\tilde{X}_1^2u_1^2)+E(\tilde{X}_2^2u_2^2)+\dots+E(\tilde{X}_T^2u_T^2)\right]}$$

¿CÓMO PODEMOS ESTIMAR ESTA EXPRESIÓN CONSISTENTEMENTE?

IDEA:

$$\underbrace{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2u_t^2}\xrightarrow{P}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}E(\tilde{X}_t u_t^2)$$

NO PODEMOS USARLO COMO ESTIMADOR PORQUE u_t, ERROR DEL MODELO, NO ES OBSERVABLE.

WHITE (ECONOMETRICA'80) propone el siguiente estimador que sustituye u_t^2 por el residuo MCO, $\hat{u}_t^2$. Esto es,

$$\boxed{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2\underbrace{\hat{u}_t^2}_{\text{RESIDUOS MCO}}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2u_t^2\xrightarrow{P}0}$$

$\hat{u}_t=y_t-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_t$

Por lo tanto,

$$\boxed{\overset{WHITE}{\widehat{Var}}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}V_t\right)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2\hat{u}_t^2}\quad(III)$$

Este estimador es válido cuando sé que hay heterocedasticidad en mi modelo (tras haber realizado un contraste sobre heterocedasticidad, por ejemplo) pero desconozco su FORMA FUNCIONAL (ésta es la situación más común en Economía)

■ Sustituímos (III) en [5]:

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_1-\beta_1) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} V_t\right)}{S_x^2} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2\hat{u}_t^2\right)$$

$$\xrightarrow{d} \boxed{N\left(0, \frac{1}{(S_x^2)^2}\cdot\frac{1}{T}\cdot\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t\hat{u}_t^2\right)}$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_1-\beta_1) \sim N\left(0, \frac{1}{(S_x^2)^2}\cdot\frac{1}{T}\sum\tilde{X}_t^2\hat{u}_t^2\right) \Rightarrow (\hat{\beta}_1-\beta_1) \sim N\left(0, \frac{1}{(S_x^2)^2}\cdot\frac{1}{T^2}\sum\tilde{X}_t^2\hat{u}_t^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{1}{(S_x^2)^2}\cdot\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2\hat{u}_t^2\right)}$$

Esto es,

$$\hat{Var}^{WHITE}(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{(S_x^2)^2}\cdot\frac{1}{T^2}\cdot\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2\hat{u}_t^2$$

ESTE ES EL ESTIMADOR CONSISTENTE DE $Var(\hat{\beta}_1)$ CUANDO LOS ERRORES SON [7] HETEROCEDÁSTICOS Y NO ESTÁN AUTOCORRELADOS. RECORDAR QUE $Var^{MCO}(\hat{\beta})$ NO ES VÁLIDO BAJO ESTE CONTEXTO.

Por lo tanto, si tuviésemos que realizar un contraste sobre los parámetros de este modelo utilizaríamos [7]. Esto es:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t = \frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\sqrt{\hat{Var}^{WHITE}(\hat{\beta}_1)}} \underset{\substack{\text{Bajo } H_0 \\ \beta_1=0}}{=} \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\hat{Var}^{WHITE}(\hat{\beta}_1)}} \overset{d}{\sim} N(0,1)$$

CASO 3: ① $E(u_t^2) = E(u_t^2|X_t) = \sigma_t^2 \Rightarrow$ HETEROCEDASTICIDAD

② $cov(u_t, u_{t+k}) = E(u_t u_{t+k}) = E(u_t u_{t+k}|X_t) \longrightarrow 0$ para $k \to \infty$

$\Rightarrow$ AUTOCORRELACIÓN

¿QUÉ MODELO PODRÍA SEGUIR EL ERROR PARA PRESENTAR ESTA ESTRUCTURA DE AUTOCORRELACIÓN? Por ejemplo, un AR(1)

$$\left.\begin{array}{l} y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \\ u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \left|\begin{array}{l} \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ cov(u_t \varepsilon_s) = 0 \\ \forall t < s \end{array}\right. \\ |\rho| < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Este parámetro nos mide la autocorrelación de primer orden.

- HOMOCEDÁSTICO: $E(u_t^2) = \gamma_0 \ \forall t$.
- $corr(u_t, u_{t+k}) = \frac{cov(u_t u_{t+k})}{Var(u_t)} = \rho^j$

$\longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$

I) $E(u_t) = 0 \quad \forall t$

II) $Var(u_t) = E(u_t^2) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} = \gamma_0 \ \forall t$

III) $cov(u_t, u_{t+1}) = E(u_t u_{t+1}) = \rho\gamma_0 = \rho\cdot\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \ \forall t$

$cov(u_t, u_{t+2}) = E(u_t u_{t+2}) = \rho\gamma_1 = \rho^2\gamma_0$

$\boxed{cov(u_t, u_{t+j}) = \rho^j \gamma_0}$

↳ Como $|\rho| < 1 \Rightarrow$ La autocorrelación decae a cero a medida que incrementamos j.

■ Calculamos [6] bajo ① y ②

$$Var\left[\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} V_t\right] = \frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T} Var(V_t) + 2\underbrace{\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{j=1}^{T-t} cov(V_t, V_{t+j})}_{\text{Desarrollamos este sumatorio}}\right] \overset{\substack{cov(V_t,V_{t+j})\neq 0 \\ cov(V_t,V_{t+j})\to 0,\, j\to\infty}}{=\!=\!=}$$

$$= \frac{1}{T}\Bigg[\sum_{t=1}^{T} Var(V_t) + \underbrace{2\{\overbrace{cov(V_1,V_2)}^{\gamma_1} + \overbrace{cov(V_1,V_3)}^{\gamma_2} + \dots + \overbrace{cov(V_1,V_{T-1})}^{\gamma_{T-2}} + \overbrace{cov(V_1,V_T)}^{\gamma_{T-1}}\}}_{t=1}$$

$$+ \underbrace{2\{\overbrace{cov(V_2,V_3)}^{\gamma_1} + \overbrace{cov(V_2,V_4)}^{\gamma_2} + \dots + \overbrace{cov(V_2,V_T)}^{\gamma_{T-2}}\}}_{t=2}$$

$$+ \dots$$

$$+ 2\underbrace{\overbrace{cov(V_{T-1},V_T)}^{\gamma_1}}_{t=T-1}\Bigg]$$

T-1 OBSERVACIONES

2 OBSERVACIONES

1 OBSERVACIÓN

$$= \frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T} Var(V_t) + 2\sum_{t=1}^{T-1} cov(V_t,V_{t+1}) + 2\sum_{t=1}^{T-2} cov(V_t,V_{t+2}) + \dots + 2\,cov(V_1,V_T)\right]$$

$$\underset{V_t=\tilde{X}_t u_t}{=\!=\!=} \frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T} E(\tilde{X}_t^2 u_t^2) + 2\sum_{t=1}^{T-1} E\{\tilde{X}_t u_t \tilde{X}_{t+1} u_{t+1}\} + 2\sum_{t=1}^{T-2} E\{\tilde{X}_t u_t \tilde{X}_{t+2} u_{t+2}\} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + 2E\{\tilde{X}_1 u_1 \tilde{X}_T u_T\}\right] \quad [8]$$

■ Nuestro objetivo es buscar un estimador consistente para [8]. Sabemos que bajo este contexto, $Var^{MCO}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ NO es Eficiente.

En un principio, se nos podría ocurrir aplicar aquí la misma idea de White y sustituir u_t por el residuo $\hat{u}_t$. Esto es,

$$[9] \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2\hat{u}_t^2 + \frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T-1}\tilde{X}_t\hat{u}_t\tilde{X}_{t+1}\hat{u}_{t+1} + \frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T-2}\tilde{X}_t\hat{u}_t\tilde{X}_{t+2}\hat{u}_{t+2} + \dots + \underbrace{\frac{2}{T}\tilde{X}_1\hat{u}_1\tilde{X}_T\hat{u}_T}_{\text{1 SOLA OBSERVACIÓN}}$$

RESPUESTA: NO ES UN ESTIMADOR VÁLIDO!! Notar que para obtener resultados asintóticos de consistencia, por ejemplo bajo la LGN, tenemos que si $\{X_t\}$ iid $\Rightarrow \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \xrightarrow{P} E(X_t)$. Fijaros que en este caso el número de sumandos que tenemos para estimar cada covarianza va decreciendo, llegando a tener una sóla observación para estimar γ_{T-1}.

Podría llegar a ocurrir incluso que [9] nos diera un valor NEGATIVO (Recordar que estamos estimando una varianza, por lo cual, debe ser siempre positiva)

■ NEWEY - WEST (ECONOMETRICA, 1987) propone el siguiente estimador que es válido bajo HETEROCEDASTICIDAD y AUTOCORRELACIÓN DE FORMAS DESCONOCIDAS. Esto es, no sabemos la forma funcional (o modelo) que siguen ni la heterocedasticidad ni la autocorrelación.

$$\hat{Var}^{N-W}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} V_t\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2\hat{u}_t^2 + 2\sum_{j=1}^{L} \underbrace{w(j,L)}_{\text{pesos de NEWEY - WEST (dependen de } j \text{ y } L)}\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=j+1}^{T}(\tilde{X}_t\hat{u}_t\tilde{X}_{t-j}\hat{u}_{t-j}\right\}$$

[10]

En particular,

$$\boxed{w(j,L) = 1 - \frac{j}{L+1} \quad \forall j \geq 1}$$

$L = N^o$ retardos para los q. suponemos q. la autocorrelación es significativamente $\neq 0$. $\Leftrightarrow$ $\boxed{L \rightarrow \text{RETARDO A PARTIR DEL CUAL LA AUTOCORRELACIÓN SE HA CERO.}}$

Como no conocemos el modelo que sigue la autocorrelación, normalmente se toma $\boxed{L = T^{1/3}}$. Por ejemplo, si supiesemos que $u_t \sim MA(1) \Rightarrow L = 1$ (en general, para un $MA(q) \Rightarrow L = q$). Si $u_t \sim AR(p) \Rightarrow$ Escogemos L tal que a partir de ese retardo la autocorrelación se va a cero. Esto es, $\underbrace{\rho_1, \ldots, \rho_L}_{\neq 0}, \underbrace{\rho_{L+1}, \rho_{L+2}}_{=0}$

Ejemplo 1: $u_t \sim MA(1) \Rightarrow L = 1$.

$$Var^{N-W}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} V_t\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2\hat{u}_t^2 + 2w(1,1)\cdot\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}(\tilde{X}_t\hat{u}_t\tilde{X}_{t-1}\hat{u}_{t-1})$$

$$\underset{w(1,1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2\hat{u}_t^2 + \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}(\tilde{X}_t\hat{u}_t\tilde{X}_{t-1}\hat{u}_{t-1})$$

Ejemplo 2: $u_t \sim MA(2) \Rightarrow L = 2$

$$Var^{N-W}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} V_t\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2\hat{u}_t^2 + 2w(1,2)\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}\tilde{X}_t\hat{u}_t\tilde{X}_{t-1}\hat{u}_{t-1}\right\} +$$

$$+ 2w(2,2)\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=3}^{T}\tilde{X}_t\hat{u}_t\tilde{X}_{t-2}\hat{u}_{t-2}\right\} \underset{w(1,2)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\ ;\ w(2,2)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}}{=}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2\hat{u}_t^2 + \frac{4}{3}\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}\tilde{X}_t\hat{u}_t\tilde{X}_{t-1}\hat{u}_{t-1}\right\} + \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=3}^{T}\tilde{X}_t\hat{u}_t\tilde{X}_{t-2}\hat{u}_{t-2}\right\}$$

■ El siguiente paso es sustituir [10] en [5].

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_1-\beta_1)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}V_t\right)}{S_x^2}\xrightarrow{d}N\left(0,\ \hat{Var}^{N-W}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum V_t\right)\right)\xrightarrow{d}N\left(0,\ \frac{1}{(S_x^2)^2}\hat{Var}^{N-W}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}V_t\right)\right)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\hat{Var}^{N-W}(\hat{\beta}_1)=\frac{1}{(S_x^2)^2}\cdot\frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{\tilde{X}_t^2\hat{u}_t^2}{T}+2\sum_{j=1}^{L}w(j,L)\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=j+1}^{T}(\tilde{X}_t\hat{u}_t\tilde{X}_{t-j}\hat{u}_{t-j})\right\}\right]}\quad[11]$$

↳ Estimador consistente de $var(\hat{\beta}_1)$ bajo Heterocedasticidad de forma desconocida y Autocorrelación de forma desconocida. TAMBIÉN LO PODEMOS DENOTAR COMO $\hat{var}^{HAC}(\hat{\beta}_1)$.

■ ¿Cómo se simplificaría el estimador de NEWEY-WEST si suponemos HOMOCEDASTICIDAD en los errores, esto es, $E(u_t^2)=E(u_t^2|X_t)=\sigma^2$?

El punto de partida es la expresión [6]:

$$Var\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}V_t\right)=\frac{1}{T}\left\{\sum_{t=1}^{T}Var(V_t)+2\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{j=1}^{T-t}cov(V_t,V_{t+j})\right\}$$

$$\underset{V_t=\tilde{X}_t u_t}{=\!=}\frac{1}{T}\left\{\sum_{t=1}^{T}E(\tilde{X}_t^2u_t^2)+2\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{j=1}^{T-t}E(\tilde{X}_t u_t\tilde{X}_{t+j}u_{t+j})\right\}$$

$$=\!=\frac{1}{T}\left\{\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2E(u_t^2)+2\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{T-t}\tilde{X}_t\tilde{X}_{t+j}E(u_tu_{t+j})\right\}$$

X_t exogeno
(IDENTICO RAZONAMIENTO PARA X_t v.a.)

$$=\!=\frac{1}{T}\left\{\sum_{t=1}^{T}\tilde{X}_t^2\sigma^2+2\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{T-t}\tilde{X}_t\tilde{X}_{t+j}\rho_j\sigma^2\right\}$$

$\gamma_0=E(u_t^2)=\sigma^2$ HOMOCEDASTICIDAD

$Cov(u_t,u_{t+j})=E(u_t,u_{t+j})=\gamma_j$

$\underbrace{\rho_j}_{\text{correlación de orden } j}=\frac{\gamma_j}{\gamma_0}\Rightarrow\boxed{\gamma_j=\rho_j\gamma_0}=\boxed{\rho_j\sigma^2}$

$$=\!=\boxed{\sigma^2S_x^2+2\sigma^2\cdot\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{T-t}\tilde{X}_t\tilde{X}_{t+j}\rho_j}\quad[12]$$

$S_x^2=\frac{1}{T}\sum(X_t-\bar{X})^2=\frac{1}{T}\tilde{X}_t^2$

¿Cómo detectamos la autocorrelación en los errores u_t?

① Prueba de la Q de Ljung-Box. (visto en Tema 3)

② La Prueba de Durbin-Watson (DW)

La prueba de DW se usa para hacer contrastes sobre la autocorrelación de 1er ORDEN. Esto es, dado $y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$ Queremos contrastar si:

$$\| \; u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2_\varepsilon) \; \| \Rightarrow u_t \sim AR(1)$$

Notar que si $\rho = 0 \Rightarrow u_t = \varepsilon_t \sim RB$.

Esta prueba se basa en el estadístico "d":

$$\boxed{d = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}}, \text{ donde } \hat{u}_t = y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t \quad \text{RESIDUOS MCO.}$$

Notar que:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2} = \underbrace{\frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}}_{\simeq 1} + \underbrace{\frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}}_{\simeq 1} - 2 \underbrace{\frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}}_{\hat{\rho} \text{ = Estimador autocorrelación de 1er orden}} \simeq 2(1-\hat{\rho})$$

Por lo tanto,

$$d \simeq 2(1-\hat{\rho})$$

IDEA INTUITIVA DEL ESTADÍSTICO:

- $\rho = 1 \Rightarrow d \simeq 0$ (AUTOCORRELACIÓN POSITIVA)
- $\rho = 0 \Rightarrow d \simeq 2$ (NO AUTOCORRELACIÓN)
- $\rho = -1 \Rightarrow d \simeq 4$ (autocorrelación negativa)

Los valores críticos para este estadístico están tabulados para:

- k' = nº variables explicativas sin incluir la constante (En nuestro ejemplo $y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \Rightarrow k' = 1$)
- n = nº observaciones del modelo
- α = nivel de significación (1%, 5%, 10%)

La tabla nos da dos valores → d_L = dLOW, → d_U = dUPPER

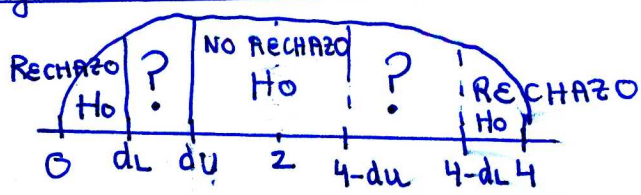
■ La estrategia a la hora de realizar este contraste es la siguiente:

PASO 1: Realizo el siguiente contraste bilateral

$$\left| \begin{array}{l} H_0: \rho = 0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{array} \right|$$

Notar que bajo H_0 no hay Autocorrelación: $u_t = \varepsilon_t \sim RB$

Regla de decisión:



■ Sustituimos este resultado en la ecuación [5]:

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_1-\beta_1) = \frac{\frac{1}{\sqrt{T}}\sum v_t}{S_x^2} \xrightarrow{d} N(0,\Omega) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{(S_x^2)^2}\cdot\left\{\sigma^2 S_x^2 + 2\sigma^2\cdot\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{T-t}\tilde{x}_t\tilde{x}_{t+j}\rho_j\right\}\right)$$

Por lo tanto,

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{T}\cdot\left[\frac{\sigma^2 \cancel{S_x^2}}{(S_x^2)^{\cancel{2}}} + 2\frac{\sigma^2}{(S_x^2)^2}\cdot\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{T-t}\tilde{x}_t\tilde{x}_{t+j}\rho_j\right]$$

$$= Var^{MCO}(\hat{\beta}_1)\left[1 + \underbrace{\frac{2}{S_x^2}\cdot\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{T-t}\tilde{x}_t\tilde{x}_{t+j}\rho_j}_{f_T}\right] \quad [13]$$

$Var^{MCO}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{TS_x^2}$

$$= Var^{MCO}(\hat{\beta}_1)\cdot f_T$$

Este término adicional representa el error que cometemos cuando utilizamos $Var^{MCO}(\hat{\beta}_1)$ bajo la presencia de Autocorrelación. En la mayoría de las aplicaciones económicas

(1) $\rho > 0$ (2) $corr(x_t, x_{t+j}) > 0$

$\Rightarrow$ Este termino es positivo. Por eso se dice que $Var^{MCO}(\hat{\beta}_1)$ subestima $Var(\hat{\beta}_1)$ bajo la presencia de autocorrelación.

■ El estimador de la varianza de $\hat{\beta}_1$ de NEWEY-WEST que es consistente en presencia de AUTOCORRELACIÓN Y HETEROCEDASTICIDAD viene dado por:

ESTIMADOR DE [13]

$$\underbrace{\hat{Var}^{HAC}(\hat{\beta}_1)}_{= Var^{N-W}(\hat{\beta}_1)} \doteq Var^{MCO}(\hat{\beta}_1)\,\hat{f}_T, \quad \text{donde } \hat{f}_T = \left[1 + 2\sum_{j=1}^{L}\left(\frac{L}{L+1}\right)\tilde{\rho}_j\right]$$

y donde $\tilde{\rho}_j = \dfrac{\sum_{t=j+1}^{T}\tilde{x}_t\tilde{x}_{t-j}\hat{u}_t\hat{u}_{t-j}}{\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t^2\tilde{x}_t^2}$ ↳ Esta es la versión de [10] bajo HOMOCEDASTICIDAD + AUTOCORRELACIÓN

donde "L" es un parámetro que representa el número de autocorrelaciones que se utilizan para evaluar la dinámica de los errores "u_t" (esto es, "L" es un parámetro de truncación a partir del cual la autocorrelación suponemos se va a cero). El programa Eviews elige este parámetro automáticamente.

Ej. Para un MA(1), $L = 1$.

- Notar que si $d_L < d_U \Rightarrow 4-d_U < 4-d_L$
- La ? indica que no puedo decidir.

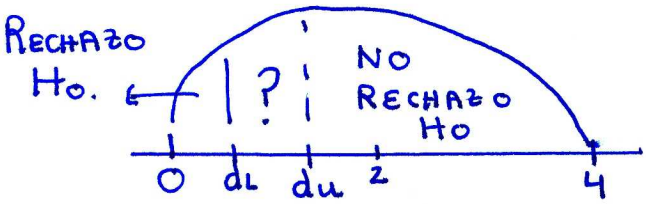
Si <u>NO</u> rechazo Ho, esto es, $d_U < d < 4-d_U \Rightarrow$ PARO AQUÍ PUES LOS ERRORES DE MI MODELO SON RB. SI RECHAZO Ho, esto es, $0 < d < d_L$ ó $4-d_L < d < 4 \Rightarrow$ LOS ERRORES DE MI MODELO SIGUEN UN AR(1). Llegados a este punto puedo estar interesado en conocer si la autocorrelación es <u>positiva</u> o <u>negativa</u>.

PASO 2:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \rho \leq 0 \\ H_1: \rho > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Si rechazo Ho} \Rightarrow \text{Autocorrelación } (+) \\ \rightarrow \text{Si } \underline{\text{NO}} \text{ rechazo Ho} \Rightarrow \text{Autocorrelación } (-) \end{array}$$

Realizar este contraste es importante pues en la mayoría de las aplicaciones económicas la autocorrelación es positiva.

<u>Regla de decisión:</u>



PRACTICA 4: PROBLEMA 3

$$\left.\begin{array}{l} y_t = \mu + \gamma_1 y_{t-1} + \gamma_2 y_{t-2} + \beta X_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim RB(0, \sigma^2) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \varepsilon_t \sim AR(1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E(\varepsilon_t) = 0 \; ; \; Var(\varepsilon_t) = \dfrac{\sigma^2}{1-\rho^2} = \gamma_0 ; \; \boxed{cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+j}) = \rho^j \gamma_0} \\ \Rightarrow \boxed{Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+j}) = \rho^j} \end{array} \right.$

Ver <u>Hoja 5</u>

$\Rightarrow$ la autocorrelación decae a cero a medida que $j \to \infty$ pues $|\rho| < 1$.

- ¿Qué consecuencias tiene la existencia de autocorrelación en los errores del modelo sobre la estimación del mismo?

Los regresores (y_{t-1}) e (y_{t-2}) pasan a ser <u>endógenos</u>, esto es,

$$cov(y_{t-1}, \varepsilon_t) = E(y_{t-1}\varepsilon_t) - \cancel{E(y_{t-1})\underbrace{E(\varepsilon_t)}_{0}} = E(y_{t-1}\varepsilon_t) \neq 0$$

$$cov(y_{t-2}, \varepsilon_t) = E(y_{t-2}\varepsilon_t) \neq 0$$

¿Por qué?

$$y_{t-1} = \mu + \gamma_1 y_{t-2} + \gamma_2 y_{t-3} + \beta X_{t-1} + \underline{\underline{\varepsilon_{t-1}}} \Rightarrow E(y_{t-1}\varepsilon_t) \neq 0$$

pues $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) \neq 0$

$$y_{t-2} = \mu + \gamma_1 y_{t-3} + \gamma_2 y_{t-4} + \beta X_{t-2} + \underline{\underline{\varepsilon_{t-2}}} \Rightarrow E(y_{t-2}\varepsilon_t) \neq 0$$

pues $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) \neq 0$

Consecuencia:

$\hat{\beta}_{MCO}$ NO ES CONSISTENTE.

SOLUCIÓN:

- $\hat{\beta}_{VI}$
- $\hat{\beta}_{MC2E}$.

VER NOTAS DE CLASE.

TABLE B-4 CRITICAL VALUES OF THE DURBIN–WATSON TEST STATISTICS d_L AND d_U: 5 PERCENT ONE-SIDED LEVEL OF SIGNIFICANCE (10 PERCENT TWO-SIDED LEVEL OF SIGNIFICANCE)

n	k′ = 1		k′ = 2		k′ = 3		k′ = 4		k′ = 5		k′ = 6		k′ = 7	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.81	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21	0.45	2.47	0.34	2.73
16	1.11	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.73	1.93	0.62	2.15	0.50	2.39	0.40	2.62
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.66	2.10	0.55	2.32	0.45	2.54
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06	0.60	2.26	0.50	2.46
19	1.18	1.40	1.07	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02	0.65	2.21	0.55	2.40
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.89	1.83	0.79	1.99	0.69	2.16	0.60	2.34
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96	0.73	2.12	0.64	2.29
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94	0.77	2.09	0.68	2.25
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92	0.80	2.06	0.72	2.21
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90	0.84	2.04	0.75	2.17
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89	0.87	2.01	0.78	2.14
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88	0.90	1.99	0.82	2.12
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.00	1.86	0.93	1.97	0.85	2.09
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85	0.95	1.96	0.87	2.07
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84	0.98	1.94	0.90	2.05
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83	1.00	1.93	0.93	2.03
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83	1.02	1.92	0.95	2.02
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82	1.04	1.91	0.97	2.00
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81	1.06	1.90	0.99	1.99
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.14	1.81	1.08	1.89	1.02	1.98
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80	1.10	1.88	1.03	1.97
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.30	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80	1.11	1.88	1.05	1.96
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80	1.13	1.87	1.07	1.95
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.20	1.79	1.15	1.86	1.09	1.94
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79	1.16	1.86	1.10	1.93
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79	1.18	1.85	1.12	1.93
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78	1.24	1.84	1.19	1.90
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77	1.29	1.82	1.25	1.88
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.37	1.77	1.33	1.81	1.29	1.86
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77	1.37	1.81	1.34	1.85
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77	1.40	1.81	1.37	1.84
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.53	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77	1.43	1.80	1.40	1.84
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.52	1.74	1.49	1.77	1.46	1.80	1.43	1.83
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77	1.48	1.80	1.45	1.83
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.58	1.72	1.55	1.75	1.53	1.77	1.50	1.80	1.47	1.83
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78	1.52	1.80	1.49	1.83
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78	1.54	1.80	1.51	1.83
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78	1.55	1.80	1.53	1.83

Source: N. E. Savin and Kenneth J. White, "The Durbin–Watson Test for Serial Correlation with Extreme Sample Sizes or Many Regressors," *Econometrica*, November 1977, p. 1994. Reprinted with permission.

Note: n = number of observations, k′ = number of explanatory variables excluding the constant term. We assume the equation contains a constant term and no lagged dependent variables (if so see Table B-7).

TABLE B-5 CRITICAL VALUES OF THE DURBIN–WATSON TEST STATISTICS OF d_L AND d_U: 2.5 PERCENT ONE-SIDED LEVEL OF SIGNIFICANCE (5 PERCENT TWO-SIDED LEVEL OF SIGNIFICANCE)

n	k′ = 1		k′ = 2		k′ = 3		k′ = 4		k′ = 5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0.95	1.23	0.83	1.40	0.71	1.61	0.59	1.84	0.48	2.09
16	0.98	1.24	0.86	1.40	0.75	1.59	0.64	1.80	0.53	2.03
17	1.01	1.25	0.90	1.40	0.79	1.58	0.68	1.77	0.57	1.98
18	1.03	1.26	0.93	1.40	0.82	1.56	0.72	1.74	0.62	1.93
19	1.06	1.28	0.96	1.41	0.86	1.55	0.76	1.72	0.66	1.90
20	1.08	1.28	0.99	1.41	0.89	1.55	0.79	1.70	0.70	1.87
21	1.10	1.30	1.01	1.41	0.92	1.54	0.83	1.69	0.73	1.84
22	1.12	1.31	1.04	1.42	0.95	1.54	0.86	1.68	0.77	1.82
23	1.14	1.32	1.06	1.42	0.97	1.54	0.89	1.67	0.80	1.80
24	1.16	1.33	1.08	1.43	1.00	1.54	0.91	1.66	0.83	1.79
25	1.18	1.34	1.10	1.43	1.02	1.54	0.94	1.65	0.86	1.77
26	1.19	1.35	1.12	1.44	1.04	1.54	0.96	1.65	0.88	1.76
27	1.21	1.36	1.13	1.44	1.06	1.54	0.99	1.64	0.91	1.75
28	1.22	1.37	1.15	1.45	1.08	1.54	1.01	1.64	0.93	1.74
29	1.24	1.38	1.17	1.45	1.10	1.54	1.03	1.63	0.96	1.73
30	1.25	1.38	1.18	1.46	1.12	1.54	1.05	1.63	0.98	1.73
31	1.26	1.39	1.20	1.47	1.13	1.55	1.07	1.63	1.00	1.72
32	1.27	1.40	1.21	1.47	1.15	1.55	1.08	1.63	1.02	1.71
33	1.28	1.41	1.22	1.48	1.16	1.55	1.10	1.63	1.04	1.71
34	1.29	1.41	1.24	1.48	1.17	1.55	1.12	1.63	1.06	1.70
35	1.30	1.42	1.25	1.48	1.19	1.55	1.13	1.63	1.07	1.70
36	1.31	1.43	1.26	1.49	1.20	1.56	1.15	1.63	1.09	1.70
37	1.32	1.43	1.27	1.49	1.21	1.56	1.16	1.62	1.10	1.70
38	1.33	1.44	1.28	1.50	1.23	1.56	1.17	1.62	1.12	1.70
39	1.34	1.44	1.29	1.50	1.24	1.56	1.19	1.63	1.13	1.69
40	1.35	1.45	1.30	1.51	1.25	1.57	1.20	1.63	1.15	1.69
45	1.39	1.48	1.34	1.53	1.30	1.58	1.25	1.63	1.21	1.69
50	1.42	1.50	1.38	1.54	1.34	1.59	1.30	1.64	1.26	1.69
55	1.45	1.52	1.41	1.56	1.37	1.60	1.33	1.64	1.30	1.69
60	1.47	1.54	1.44	1.57	1.40	1.61	1.37	1.65	1.33	1.69
65	1.49	1.55	1.46	1.59	1.43	1.62	1.40	1.66	1.36	1.69
70	1.51	1.57	1.48	1.60	1.45	1.63	1.42	1.66	1.39	1.70
75	1.53	1.58	1.50	1.61	1.47	1.64	1.45	1.67	1.42	1.70
80	1.54	1.59	1.52	1.62	1.49	1.65	1.47	1.67	1.44	1.70
85	1.56	1.60	1.53	1.63	1.51	1.65	1.49	1.68	1.46	1.71
90	1.57	1.61	1.55	1.64	1.53	1.66	1.50	1.69	1.48	1.71
95	1.58	1.62	1.56	1.65	1.54	1.67	1.52	1.69	1.50	1.71
100	1.59	1.63	1.57	1.65	1.55	1.67	1.53	1.70	1.51	1.72

Source: J. Durbin and G. S. Watson, "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression," *Biometrika*, Vol. 38, 1951, pp. 159–171. Reprinted with permission of the *Biometrika* trustees.

Note: n = number of observations, k′ = number of explanatory variables excluding the constant term. It is assumed that the equation contains a constant term and no lagged dependent variables (if so, see Table B-7).

TABLE B-6 CRITICAL VALUES OF THE DURBIN–WATSON TEST STATISTICS D_L AND D_U: 1 PERCENT ONE-SIDED LEVEL OF SIGNIFICANCE (2 PERCENT TWO-SIDED LEVEL OF SIGNIFICANCE)

n	k′ = 1		k′ = 2		k′ = 3		k′ = 4		k′ = 5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.63	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.37	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.09	1.52	1.03	1.58
40	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.10	1.52	1.05	1.58
45	1.29	1.38	1.24	1.42	1.20	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
55	1.36	1.43	1.32	1.47	1.28	1.51	1.25	1.55	1.21	1.59
60	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.60
65	1.41	1.47	1.38	1.50	1.35	1.53	1.31	1.57	1.28	1.61
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
75	1.45	1.50	1.42	1.53	1.39	1.56	1.37	1.59	1.34	1.62
80	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.60	1.36	1.62
85	1.48	1.53	1.46	1.55	1.43	1.58	1.41	1.60	1.39	1.63
90	1.50	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
95	1.51	1.55	1.49	1.57	1.47	1.60	1.45	1.62	1.42	1.64
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65

Source and Note: See Table B-3.

Autocorrelación y heteroscedasticidad

Autocorrelación en una regresión en diferencias

→ Tomar diferencias (por ejemplo, $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$) muchas veces nos ayuda a transformar un proceso no estacionario en un proceso estacionario (o causal) – vea el tema sobre la no estacionariedad.

→ Aquí vemos otra ventaja: Tomar diferencias puede remover gran parte de la autocorrelación de los errores.

→ Considera el siguiente modelo de regresión:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \qquad (1)$$

$$\varepsilon_t = \rho\, \varepsilon_{t-1} + v_t, \qquad v_t \sim WN(0, \sigma_v^2).$$

→ Si el valor de ρ es positivo y largo, tiene sentido intentar la siguiente especificación:

$$\underbrace{\Delta y_t}_{= y_t^*} = \beta_1 \underbrace{\Delta x_t}_{= x_t^*} + \underbrace{\Delta \varepsilon_t}_{= \varepsilon_t^*}, \quad t = 2, 3, \ldots, T. \qquad (2)$$

→ Por supuesto, la regresión (2) no es la misma que la regresión (1), pero:

- la transformación resulta en un error ε_t^* con poca correlación serial;
- como consecuencia, podemos confiar más en en los errores estándar de la regresión, los estadísticos t etc.