Juegos Dinámicos

1. Información Perfecta

Universidad Carlos III

Juegos Dinámicos

- Juegos en los que un jugador tiene que tomar una decisión después de conocer algo de lo que ha hecho alguno de sus rivales hasta ese momento.
- Modelo matemático del juego: forma extensiva.
- Ejemplos: ajedrez, parchís, mus.

Juegos Dinámicos

El modelo matemático para representar estos juegos será la forma extensiva, que debe definir:

1. el orden en que los jugadores van tomando sus decisiones,
2. la información que tienen en cada momento,
3. las alternativas que tienen a su disposición,
4. el resultado final de cada posible camino que se haya podido seguir.

Juegos Dinámicos

1. Juegos con información perfecta.
   - Los jugadores están perfectamente informados de lo ocurrido hasta el momento en que juegan. Si hay movimientos de azar, todos tienen la misma información sobre ellos.
   - Ejemplos: ajedrez, parchís.

2. Juegos con información imperfecta.
   - Algún jugador no conoce la acción que ha tomado otro que ha jugado antes. Si hay movimientos de azar, algún jugadores tiene distinta información que algún otro.
   - Ejemplos: juegos simultáneos, mus.

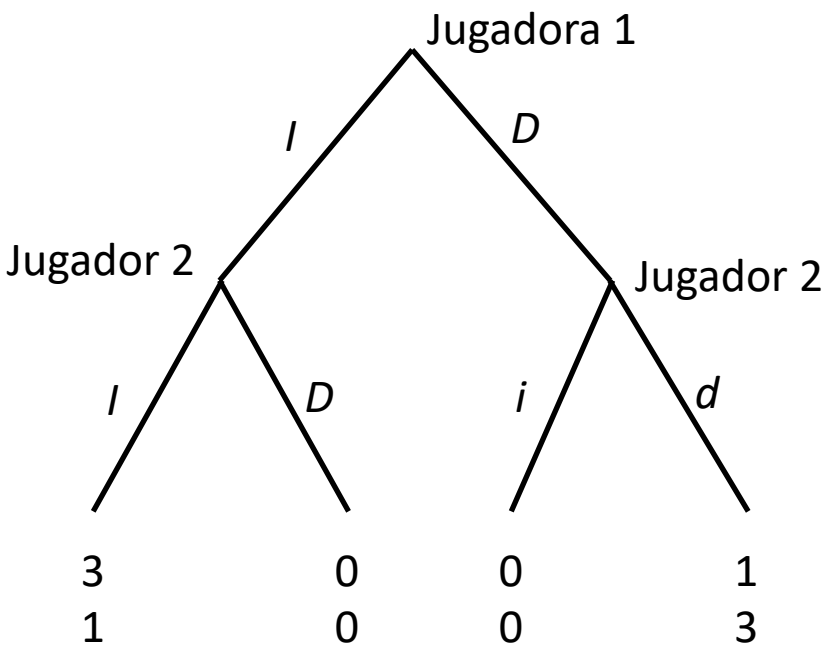
Batalla de sexos dinámica

- Recordemos la batalla de sexos:

		Jugador 2	
		I	*D*
Jugadora 1	*I*	3, 1	0, 0
	D	0, 0	1, 3

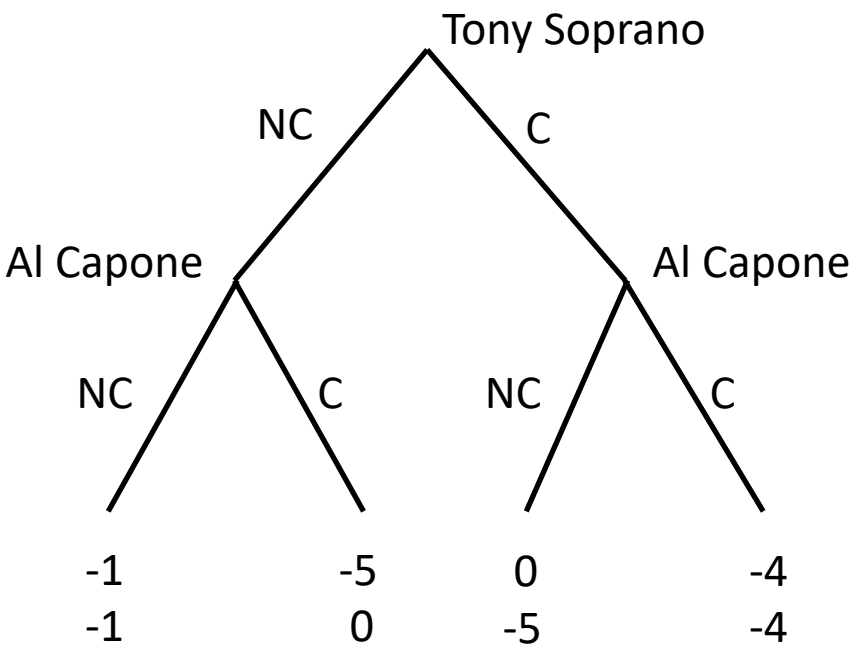
- ¿Cómo puede cambiar la Jugadora 1 el juego a su favor?
  - Enviar un mensaje: "voy a jugar *I*".
  - Jugar "*I*".
- En ambos casos el Jugador 2 debe observar lo que hace la Jugadora 1.
- En el primer caso, además, el Jugador 2 no debe poder responder con otro mensaje.

Batalla de sexos dinámica



- ¿Cuál sería el equilibrio de este juego?
  - ¿ (I, I)?
  - No: mejor $(I, (I, d))$.

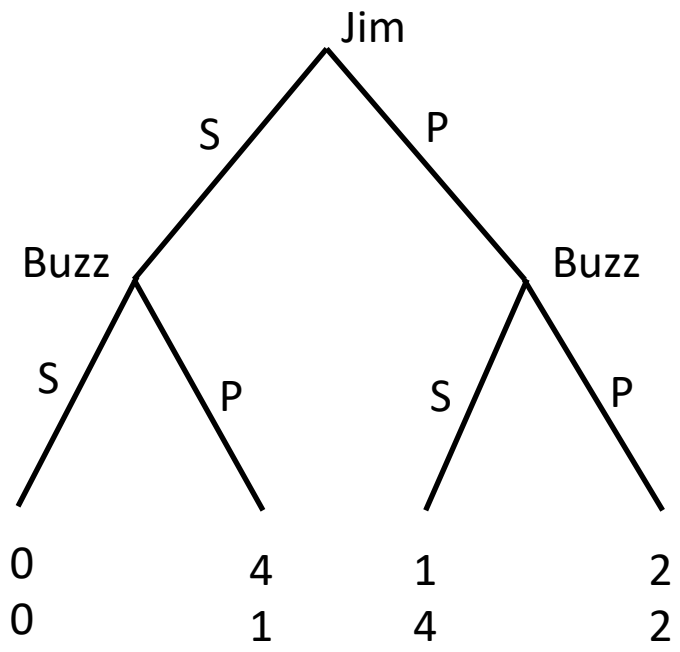
Dilema del prisionero dinámico



- ¿Cuál sería el equilibrio de este juego?
  - ¿ (C, C)?
  - No: mejor $(C, (C, C))$.
  - Es necesario especificar qué hace Al Capone en ambas contingencias para que quede justificado por qué Tony Soprano decide *C*.

Juego del gallina dinámico

Jim juega primero anunciando de manera creíble una estrategia o comprometiéndose a jugarla.

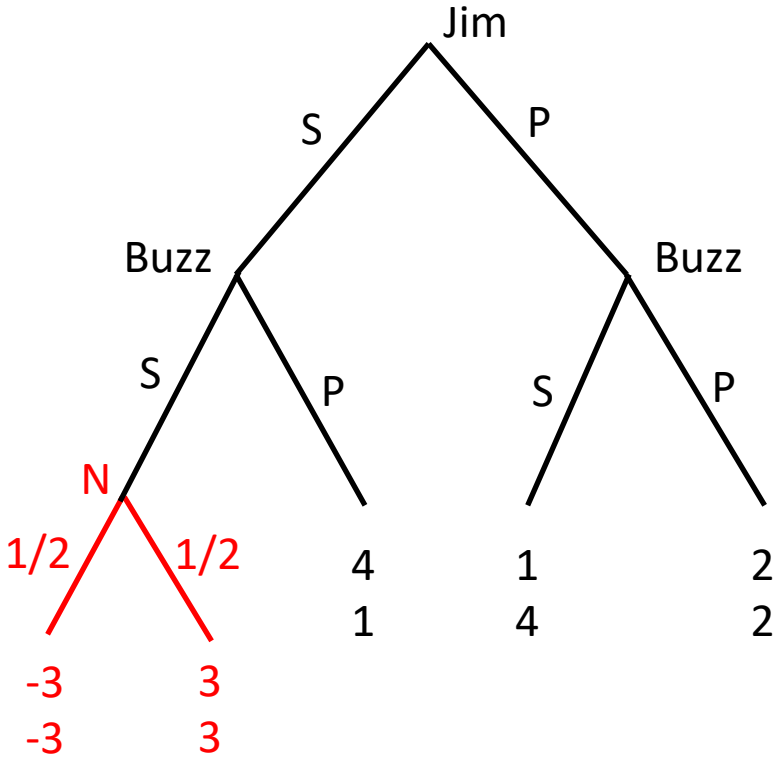


- ¿Cuál sería el equilibrio de este juego?
  - ¿ (S, P)?
  - No: mejor $(S, (P, S))$.

Juego del gallina dinámico

Añadamos un movimiento de la naturaleza.

Si ambos siguen, se mueren con probabilidad ½.
Si no se mueren, pagos entre ser el campeón y ser uno de los dos gallinas.
(Pensemos que de esa media obteníamos los pagos 0 de antes)



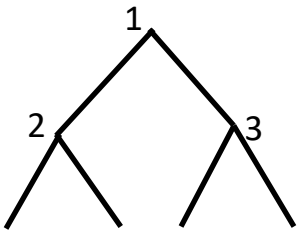
- ¿Cuál sería el equilibrio de este juego?
  - ¿ (S, P)?
  - No: mejor $(S, (P, S))$.

Forma extensiva con información perfecta

- Todos los jugadores conocen lo ocurrido hasta el momento en que juegan
  Elementos de la forma extensiva:
  1) Árbol: vértice inicial del que salen varias ramas que llegan a otros vértices, de los que pueden salir otras ramas, y así sucesivamente. Los vértices de los que no salen ramas se llaman vértices finales.
  2) Asignación de los vértices no finales entre los jugadores: Cada vértice debe ser de algún jugador y ningún vértice puede corresponder a más de uno.
  3) Asignación de acciones a cada jugador en cada uno de los vértices que tiene asignados.
  4) Asignación de pagos (utilidades): En cada vértice final se asignará un pago a cada jugador.
  5) Podemos incorporar los movimientos de azar como un jugador nuevo (naturaleza) y cuyas ramas son eventos. En este caso será necesario especificar las probabilidades de los eventos.

Forma extensiva con información perfecta

- Veamos los elementos en el juego del gallina dinámico:
- Árbol, con 1 como vértice inicial.



- Asignación de vértices no finales: Jim tiene asignado el vértice 1 y Buzz tiene el 2 y el 3.

- Asignación de acciones: Jim puede optar entre las acciones *S* y *P*, y Buzz puede optar entre *S* y *P* en su primer vértice y también entre *S* y *P* en su segundo vértice.

- Asignación de pagos: El primer número en cada vértice final es el pago de Jim, el segundo, el pago de Buzz. Así, si Jim juega *S* y Buzz opta por *S*, entonces los pagos son 0 para Jim y 0 para Buzz.

De la forma extensiva a la forma normal

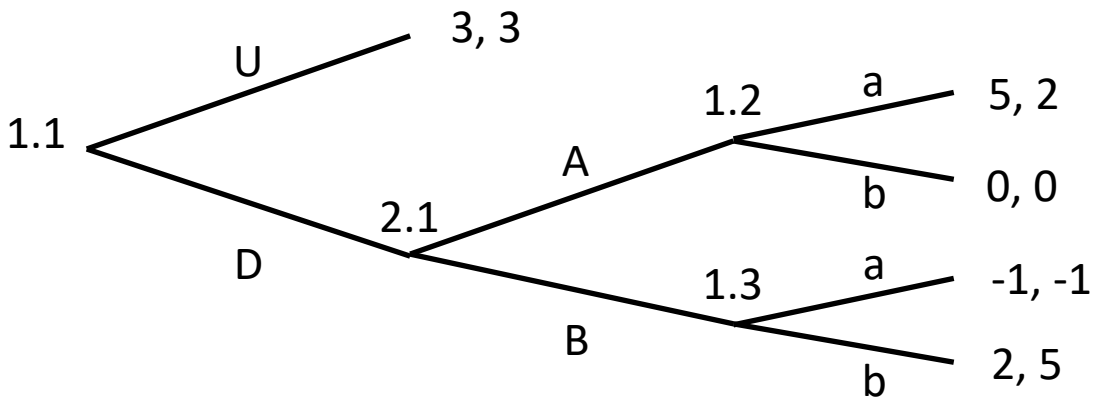
- Retomemos el juego de la batalla de sexos dinámica.
- La Jugadora 1 tiene dos estrategias: *I* y *D*. El Jugador 2 tiene dos vértices, en el primero tiene dos acciones (*I* y *D*) y en el segundo otras dos (*i* y *d*).
- Las estrategias de 2 son cuatro: (I, i), (I, d), (D, i) y (D, d). La forma normal es la siguiente:

J1 \ J2	(I, i)	(I, d)	(D, i)	(D, d)
I	3, 1	3, 1	0, 0	0, 0
D	0, 0	1, 3	0, 0	1, 3

- La estrategia (*I,d*), por ejemplo, debe ser leída de la siguiente manera: El Jugador 2 elige *I* en su primer vértice (es decir, si la Jugadora 1 ha jugado *I*), y *d* en su segundo vértice (si 1 ha jugado *D*).

De la forma extensiva a la forma normal

- Tomemos otro ejemplo.
- La siguiente figura ilustra la forma extensiva de un juego con información perfecta.
- Obsérvese que el Jugador 1 juega en dos momentos distintos (la segunda vez, en uno de dos vértices posibles).



De la forma extensiva a la forma normal

Esta es la forma normal del ejemplo anterior:

1 \ 2	A	B
(U, a, a)	3, 3	3, 3
(U, a, b)	3, 3	3, 3
(U, b, a)	3, 3	3, 3
(U, b, b)	3, 3	3, 3
(D, a, a)	5, 2	-1, -1
(D, a, b)	5, 2	2, 5
(D, b, a)	0, 0	-1, -1
(D, b, b)	0, 0	2, 5

De la forma extensiva a la forma normal

- Una estrategia en un juego dinámico es un plan contingente que prescribe qué acción tomará el jugador en cada una de las posibles ocasiones (vértices) en las que le puede tocar mover, incluso en aquellas situaciones en las que no se sigue el plan inicial.

- Obsérvese que la definición de estrategia no requiere que se lleven a cabo todas las acciones en ella. Se realizarán unas acciones u otras según el desarrollo del juego.

- Saber lo que se haría hipotéticamente en situaciones a las que no se llega en el equilibrio nos permite argumentar por qué se llega a un determinado equilibrio.

- En el ejemplo anterior podemos realizar la siguiente simplificación: podemos identificar las estrategias (U,a,a), (U,a,b), (U,b,a) y (U,b,b) como una sola estrategia, que llamaríamos (U). La razón es que esas cuatro estrategias son totalmente indistinguibles al ofrecer los mismos pagos para ambos jugadores.

De la forma extensiva a la forma normal

- Forma normal: jugadores, estrategias y pagos. Tenemos que definir estos elementos a partir de los elementos de la forma extensiva:

  - Conjunto de jugadores. El mismo.

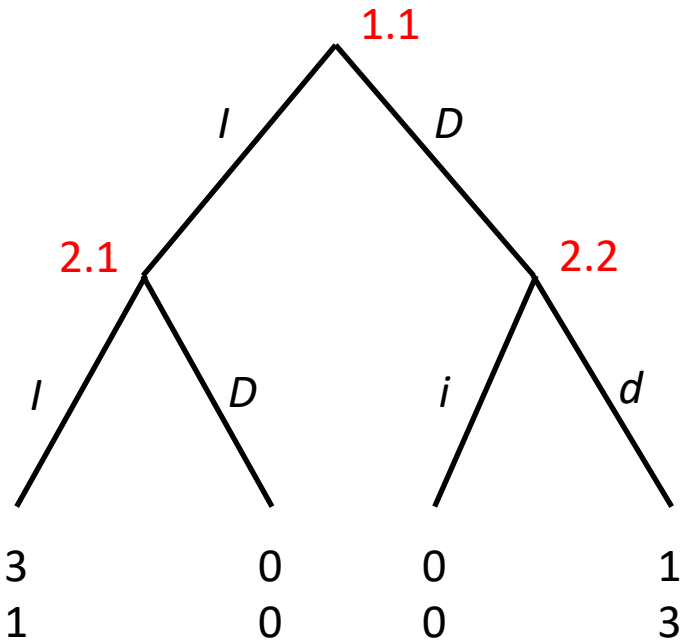
  - Conjunto de estrategias. Para definir el conjunto de estrategias del Jugador i consideremos el conjunto de vértices que pertenecen a ese jugador. Llamémoslos $i.1, i.2, \dots, i.n_i$. Sea $A_{i.k}$ el conjunto de acciones que i tiene a su disposición en el vértice $i.k$. Una estrategia del Jugador i será un elemento del producto cartesiano $A_{i.1} \times A_{i.2} \times \cdots \times A_{i.n_i}$.

  - Pagos. Los pagos asociados a un determinado perfil de estrategias se obtendrán a partir de los pagos del juego en forma extensiva correspondientes a seguir las acciones que definen las estrategias.

Equilibrio

- Dos maneras de identificar el equilibrio:
  1. Inducción hacia atrás: comenzar por encontrar los vértices que preceden a los finales y, en cada uno de ellos, determinar la acción que maximiza el pago del jugador en el vértice.
  2. Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS): El ENPS extiende la definición de equilibrio de Nash para juegos dinámicos.
- Inducción hacia atrás: sencillo, pero no siempre se puede aplicar.
- ENPS: más complicado, pero siempre existe.
- ¿Por qué la noción de EN no es adecuada para los juegos dinámicos?

Equilibrio



- Retomemos la batalla de sexos dinámica.
- Inducción hacia atrás:
  - en el vértice 2.1 el Jugador 2 elegirá *I*,
  - en el 2.2 elegirá *d*,
  - anticipando estas acciones, la Jugadora 1 elegirá *I* en su único vértice 1.1.
- Es decir, 1 elige *I* y 2 elige el plan (I, d).
- La solución por inducción hacia atrás es $(I, (I, d))$.

Compárese con los equilibrios de Nash en estrategias puras:

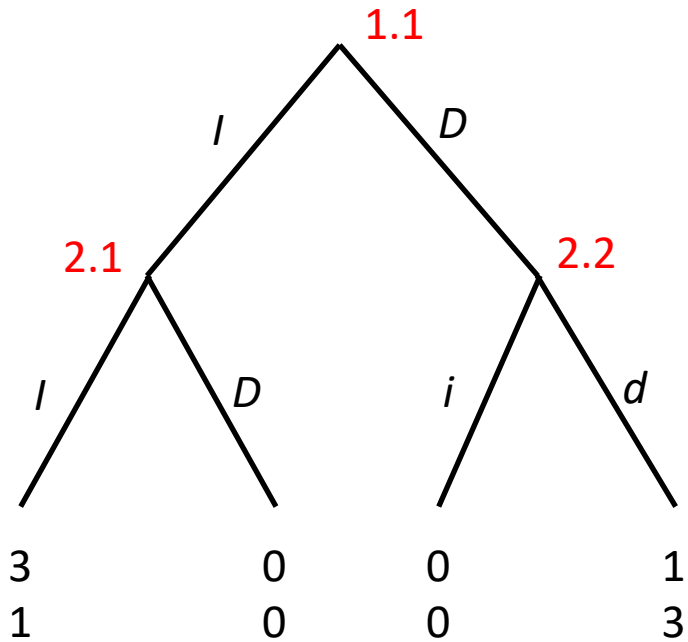
$$EN = \{(I, (I, i)), (I, (I, d)), (D, (D, d))\}.$$

J1 \ J2	(*I*,*i*)	(*I*,*d*)	(*D*,*i*)	(*D*,*d*)
I	<u>3</u>, <u>1</u>	<u>3</u>, <u>1</u>	<u>0</u>, 0	0, 0
D	0, 0	1, <u>3</u>	<u>0</u>, 0	<u>1</u>, <u>3</u>

Equilibrio

- Definición de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS):
  - Subjuego: Un subjuego en un juego dinámico de información perfecta consiste en un vértice no final del juego y todos los vértices siguientes, unidos por las mismas ramas y respetando los pagos finales y la asignación de jugadores.
  - ENPS: Un perfil de estrategias constituye un ENPS si constituye un EN de cada subjuego.

Equilibrio



Volvamos a la batalla de sexos dinámica y encontremos ENPS:

- Hay 3 subjuegos, el que comienza en el vértice 1.1, el que comienza en 2.1, y el que comienza en 2.2. (Notemos que el juego completo es a su vez un subjuego).
- Dos formas de buscar los ENPS:
  - Ver qué EN satisfacen la definición de ENPS.
  - Construir directamente los ENPS.
- Recordemos: $EN = \{(I,(I,i)),(I,(I,d)),(D,(D,d))\}$

Solo $(I,(I,d))$ es ENPS.

Forma normal del subjuego tras 2.1

Jugador 2

I	*D*
1	0

$EN = \{I\}$

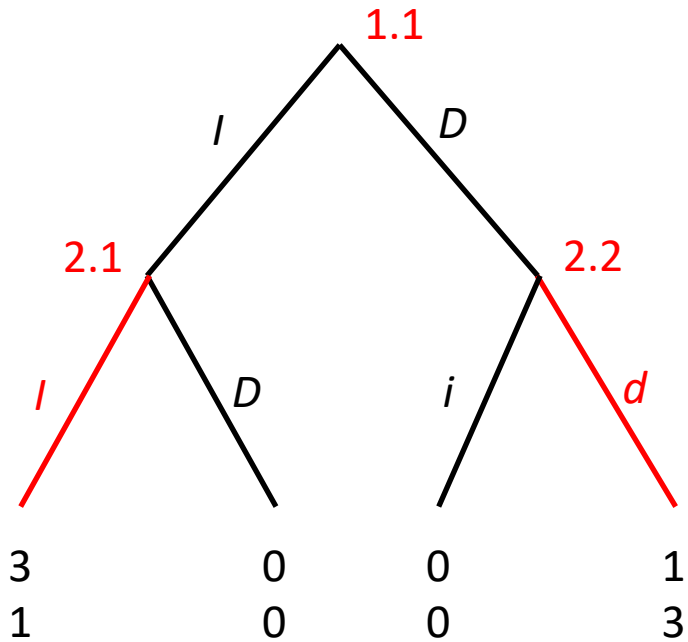
Forma normal del subjuego tras 2.2

Jugador 2

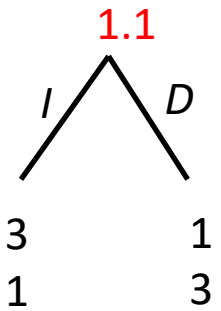
i	*d*
0	3

$EN = \{d\}$

Equilibrio



Construyamos los ENPS sin saber los EN
Sustituyamos los subjuegos por sus pagos en EN.



Forma normal del subjuego tras 1.1

Jugadora 1

I	*D*
3	1

$EN = \{I\}$

Juntamos todas las acciones en los equilibrios de los subjuegos para obtener

$$\text{ENPS} = \{(I, (I, d))\}.$$

La inducción hacia atrás y el ENPS seleccionan los mismos equilibrios.
Esto es siempre cierto en los juegos con información perfecta.

Equilibrio

- De los tres equilibrios de Nash en estrategias puras, solo uno es ENPS. Obsérvese que, si la Jugadora 1 elige *D*, los pagos finales no se alteran por la acción del 2 en su primer vértice: tanto *I* como *D* son mejor respuesta en este caso.

- Sin embargo, si el Jugador 2 tiene que jugar en 2.1, lo que importa son los pagos en este momento: solo *I* es mejor respuesta.

- Esta inconsistencia temporal es lo que se intenta evitar con el equilibrio perfecto en subjuegos.

Equilibrio

- Equilibrio. Un perfil de estrategias (una para cada jugador) que cumple cierta definición (e.g. Inducción hacia atrás, ENPS). Establece una acción para cada vértice de cada jugador.

- Camino o senda de equilibrio. Es el camino (vértices y ramas) que se observa si todos los jugadores eligen su estrategia de equilibrio. (En la batalla de sexos dinámica, en el camino del ENPS la Jugadora 1 elige *I* y 2.1 elige *I*).

- Pagos de equilibrio. Los pagos finales que se obtienen si todos los jugador siguen su estrategia de equilibrio. (En la batalla de sexos dinámica, inducción hacia atrás y ENPS dan como pagos de equilibrio (3,1)).