UNIVERSIDAD CARLOS III. **MICROECONOMÍA IV.**

Primer Cuatrimestre **Año 2015**

PROBLEMAS TEMA III.

(1) Consideremos una economía sin incertidumbre con un único bien. Hay dos tipos de agentes con funciones de utilidad

$$u^i(x_0^i, x_1^i) = \ln(x_0^i) + \delta^i \ln(x_1^i)$$

con $0 < \delta^i \leq 1$. Hay sólo un activo que paga una unidad del bien en el futuro ($t = 1$). Si q es el precio de este activo, se define la tasa de interés r de la economía por la ecuación $q = 1/(1 + r)$. Sea $\omega^i = (\omega_0^i, \omega_1^i)$ los recursos iniciales del agente $i = 1, 2$.

(a) Determinar el precio de equilibrio del activo y la tasa de interés como una función de los parámetros $(\omega_0^i, \omega_1^i, \delta^i)$.

(b) Determinar cómo cambian q y r al cambiar ω_1^i y δ^i. Dar una interpretación intuitiva de los resultados.

(c) Encontrar los equilibrios de Arrow–Debreu de la economía anterior y probar que las asignaciones de equilibrio son las mismas que con el activo.

(d) Suponiendo que $\delta^1 = \delta^2 = \delta$, calcular q y r para el caso $\omega^1 = (10, 100)$, $\omega^2 = (100, 10)$. Explicar por qué r toma ese valor. Explicar los signos de z_1, z_2.

(2) Sea una economía con un único bien, dos estado en $t = 1$ y dos agentes con funciones de utilidad de la forma:

$$u^i(x_1^i, x_2^i) = \pi_1^i v^i(x_1^i) + \pi_2^i v^i(x_2^i)$$

Las dotaciones iniciales son $\omega^1 = \omega^2 >> 0$. Supongamos que v^2 es estrictamente cóncava, que el agente 1 es neutral al riesgo

(a) Probar que si $\pi_1^1 = \pi_1^2$, $\pi_2^1 = \pi_2^2$, entonces, en un equilibrio de Arrow–Debreu interior, el agente 2 consume lo mismo en los dos estados (es decir, se asegura completamente).

(b) Probar que si $\pi_1^1 \neq \pi_1^2$ entonces, en un equilibrio de Arrow–Debreu interior, el agente 2 no consume lo mismo en los dos estados (no se asegura completamente). ¿De qué forma depende su consumo de las probabilidades subjetivas? Probar que el agente 1 no gana nada comerciando.

(3) Supongamos una economía con dos periodos e incertidumbre en la que no hay riesgo agregado, es decir, $\sum_i \omega_s^i = \omega$ no depende del estado s y en la que los agentes son (estrictamente) aversos al riesgo y tienen preferencias representable por una función de utilidad von Neumann–Morgernstern en las que las probabilidades asignadas a cada estado son las mismas para todos los agentes: $u^i(x) = \sum_{s \geq 1} \pi_s v^i(x_s)$. Probar que si x es una asignación eficiente de Pareto, entonces dados dos estados s, s' se verifica que $x_s^i = x_{s'}^i$.

Deducir que si, en la economía anterior, los mercados son completos, entonces en equilibrio los agentes consumen la misma cesta en todos los estados. (no hay riesgo individual)

(4) Supongamos que en la economía del ejercicio anterior se verifica, además, que los recursos iniciales de cada agente no dependen del estado: $\omega_s^i = \omega_{s'}^i$ para todo i, s, s'. Probar que, independientemente de la estructura de activos, hay un equilibrio de Radner x en el que $x_s^i = x_{s'}^i$ para todo i, s, s'. ¿Son todos los equilibrios de Radner de esta forma?

(5) Consideremos una economía con 2 periodos, 2 agentes, 1 bien y 2 estados en el segundo periodo, $t = 1$. La función de utilidad de los agentes es

$$u_i(x_1^i, x_2^i) = \pi^i u(x_1^i) + (1 - \pi^i) u(x_2^i) \quad i = 1, 2$$

con

$$1 > \pi^1 > \frac{1}{2} > \pi^2 > 0$$

No hay incertidumbre agregada y los agentes son aversos al riesgo. Probar que en un equilibrio de Arrow-Debreu se verifica que

$$x_1^1 > x_2^1, \quad x_1^2 < x_2^2$$

(6) Consideremos una economía con dos periodos, un único bien y dos agentes. En $t = 1$ hay dos posibles estados. Las funciones de utilidad de los agentes son

$$u^1(x_0, x_1, x_2) = \ln x_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln x_1 + \frac{1}{2}\ln x_2\right)$$

$$u^2(x_0, x_1, x_2) = \ln x_0 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln x_1 + \frac{1}{2}\ln x_2\right)$$

y los recursos iniciales son $\omega^1 = (19/8, 1, 3)$, $\omega^2 = (21/8, 5, 3)$.

(a) Supongamos que hay dos activos $r_1 = (1, 1)$ y $r_2 = (1, 0)$ (expresados en términos del bien de la economía). Encontrar el equilibrio de Radner de esta economía. ¿Cuál es la tasa de interés de la economía?

(b) Supongamos que sólo hay un activo, $r_1 = (1, 1)$. Encontrar el equilibrio de Radner de esta economía con mercados incompletos y compararlo con el del apartado anterior.

(7) Consideremos una economía con varios periodos en la que cada agente tiene una función de utilidad de la forma

$$u_i(x) = \frac{1}{1-\gamma}\sum_{s=1}^{m} \pi_s x_s^{1-\gamma}$$

con $\gamma > 0$

(a) Determinar el conjunto de las asignaciones eficientes de Pareto. Utilizar este resultado para calcular la asignación y los precios de equilibrio cuando los mercados son completos y cada agente tiene una asignación inicial ω_s^i.

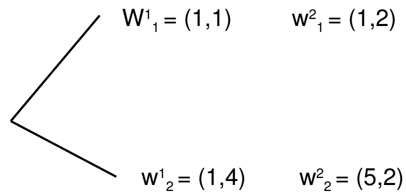
(b) Calcular la función de demanda de cada agente i como una función de los precios de contado p_s. Utilizar este resultado para calcular, de nuevo, la asignación y los precios de equilibrio.

(c) Supongamos ahora que $\gamma = 1/2$ y que hay dos agentes y 2 periodos. Dados los activos y las asignaciones iniciales siguientes:

Nodo	π	ω^1	ω^2	r_1	r_2
e0	1	1	0	0	0
e11	1/2	1	0	0	0
e12	1/2	1	0	0	0
e21	1/4	1	4	1	1
e22	1/4	1	3	1	2
e23	1/4	1	2	1	2
e24	1/4	1	1	1	3

determinar los precios de los activos y las carteras de cada agente.

(8) Sea una economía de intercambio con dos agentes, dos periodos y dos estados en el periodo $t = 1$. Los recursos iniciales del agente 1 son, en el estado 1, $\omega_1^1 = (\omega_{11}^1, \omega_{21}^1) = (1, 1)$ y en el estado 2, $\omega_2^1 = (\omega_{12}^1, \omega_{22}^1) = (1, 4)$. Mientras que los recursos iniciales del agente 2 son, en el estado 1, $\omega_1^2 = (\omega_{11}^2, \omega_{21}^2) = (1, 2)$ y en el estado 2, $\omega_2^2 = (\omega_{12}^1, \omega_{22}^2) = (5, 2)$. Gráficamente,

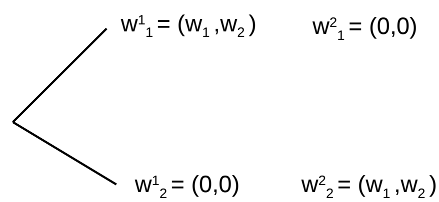


Las funciones de utilidad de los agentes son

$$u^i(x^i) = \sum_{s=1}^{2} \left(2 \ln x^i_{1s} + \ln x^i_{2s}\right) \qquad i = 1, 2$$

(a) Calcular el equilibrio de Arrow–Debreu de la economía.
(b) Calcular el equilibrio de Radner de la economía cuando los activos son $r_1 = (1, 0)$ y $r_2 = (0, 1)$.

(9) Sea una economía de intercambio con dos agentes, dos periodos y dos estados en el periodo $t = 1$. Los recursos iniciales del agente 1 son, en el estado 1, $\omega^1_1 = (\omega_1, \omega_2)$ y en el estado 2, $\omega^1_2 = (0, 0)$. Mientras que los recursos iniciales del agente 2 son, en el estado 1, $\omega^2_1 = (0, 0)$ y en el estado 2, $\omega^2_2 = (\omega_1, \omega_2)$.



Las funciones de utilidad de los agentes son

$$u^i(x^i) = \sum_{l,s=1}^{2} u(x^i_{ls}), \qquad i = 1, 2$$

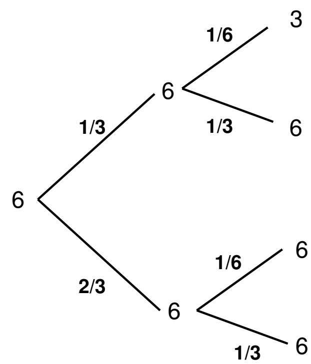
donde $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad cóncava y derivable. Hay dos activos en la economía $r_1 = (1, 0)$ y $r_1 = (0, 1)$. Probar que, en el equilibrio de Radner,

$$z^1_1 = -\frac{\omega_1 u'(\omega_1) + \omega_2 u'(\omega_2)}{2} = -z^2_1, \quad z^1_2 = \frac{\omega_1 u'(\omega_1) + \omega_2 u'(\omega_2)}{2} = -z^2_2$$

(10) Consideremos una economía secuencial con dos agentes, un bien y en la que cada agente $i = 1, 2$ tiene la función de utilidad

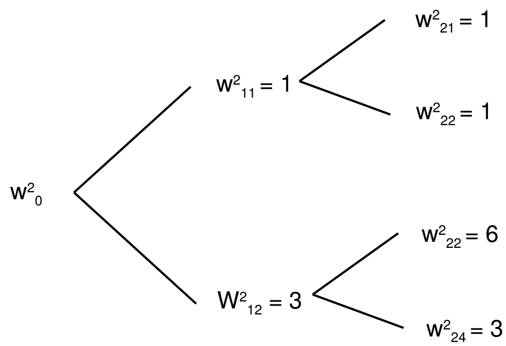
$$u^i(x) = \sum_{s} \pi_s \ln x_s$$

Los π_s y los **recursos agregados** de los agentes están representados en la figura siguiente,



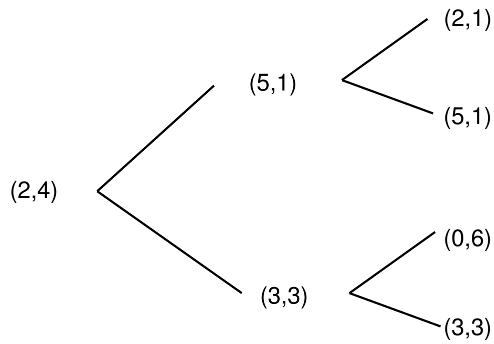
(a) Determinar todas las asignaciones Pareto eficientes. Supongamos que en una determinada asignación Pareto eficiente, x^i_s, se verifica que $x^1_0 = 2$. Determinar los consumos x^2_{21} y x^2_{12} en esa asignación.

(b) Determinar los precios de equilibrio. Sabiendo que las asignaciones iniciales del agente 2 son



y que, en el equilibrio de Arrow–Debreu, el agente 1 consume $x^1_{12} = 3$, determinar los recursos iniciales w^2_0 del agente 2.

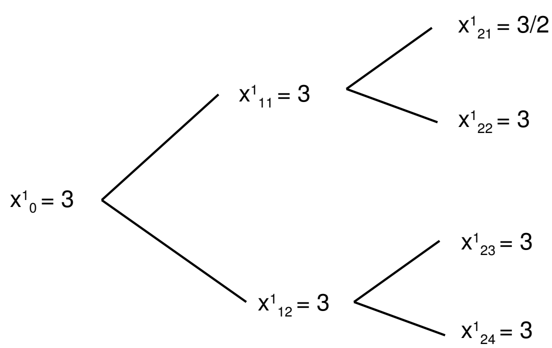
(11) Consideremos una economía de Radner con dos agentes, dos activos y un bien, en la que los recursos iniciales de los agentes son



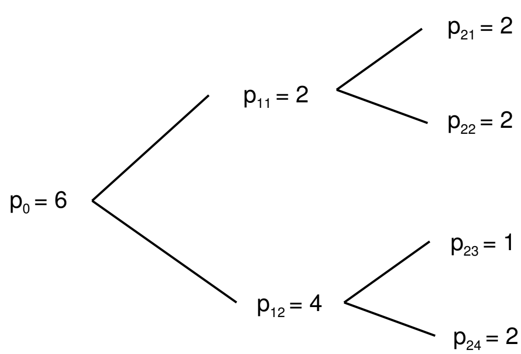
Los dividendos de los activos son,

	r_1	r_2
e_{21}	1	2
e_{22}	2	1
e_{23}	1	0
e_{24}	0	1

Supongamos que los mercados son dinámicamente completos y que, en el equilibrio de Arrow–Debreu, las asignaciones de equilibrio del **agente 1** son



y los precios de equilibrio son



Determinar los precios de los activos y las carteras de los agentes en el equilibrio de Radner de la economía.

(12) En una economía con dos periodos y dos activos primarios $r_1 = (64, 16, 4)$, $r_2 = (0, 0, 1)$ con precios $q_1 = 32$, $q_2 = 1$, respectivamente utilizar la noción de no arbitraje para valorar los siguientes activos derivados.

(a) El activo que permite comprar una unidad de r_1 al 75% de su precio de contado en el periodo 1, cuando se conoce el estado del mundo.

(b) El activo que permite comprar una unidad de r_1 al 75% de su precio de contado en el periodo 1, cuando se conoce el estado del mundo, sólo cuando el precio de contado de r_1 es mayor que 10.
(c) El activo que permite comprar una unidad de r_1 al 75% de su precio de contado en el periodo 1, cuando se conoce el estado del mundo, sólo cuando el precio de contado de r_1 es mayor que 19.
(d) Supongamos que se introduce un tercer activo primario $r_3 = (1, 1, 1)$ con precio $q_3 = 1$. ¿Es posible valorar ahora el activo derivado del apartado anterior?
(e) El activo que permite comprar, en el periodo 1, cuando se conoce el estado del mundo, o bien una unidad monetaria (en ese periodo) o bien una unidad de r_1 al 75% de su precio de contado.
(f) El activo que permite comprar, en el periodo 1, cuando se conoce el estado del mundo, o bien una unidad monetaria (en ese periodo) o bien una unidad de r_1 al 75% de su precio de contado sólo cuando el precio de contado de r_1 es mayor que 10.

(13) Consideremos una economía secuencial con un bien, dos periodos y tres estados posibles en el segundo periodo. Supongamos que hay cuatro activos $r_1 = (1, 1, 1)$, $r_2 = (3, 0, 3)$, $r_3 = (4, 1, 4)$ y $r_4 = (1, 4, 1)$, cuyos precios son $q_1 = q_2 = 1$, $q_3 = 2$, $q_4 = 3$.

(a) Calcular todas las probabilidades de riesgo neutro. Determinar si hay arbitraje en la economía. ¿Son completos los mercados?

(b) Determinar el conjunto de activos cuyo precio está determinado de forma única por los precios $q_1, \dots, q_4$ de los activos $r_1, \dots, r_4$ y la condición de no arbitraje en la economía. Encontrar una ecuación que caracterice ese conjunto.

(c) Se introduce un nuevo activo $r_5 = (1, 4, 2)$. ¿Qué valoraciones de este activo son compatibles con la no existencia de arbitraje en la economía?

(d) Razonar que si el precio del activo $r_5 = (1, 4, 2)$ es $q_5 = 3$ hay arbitraje en la Economía. Encontrar una estrategia de arbitraje.