UNIVERSIDAD CARLOS III. **MICROECONOMÍA IV.**

Primer Cuatrimestre **Año 2015**

PROBLEMAS TEMA II.

(1) Supongamos que hay tres sucesos.

(a) Un individuo posee una relación de preferencias sobre loterías $\succeq$ que puede ser representada mediante una función de utilidad esperada. Dicha relación satisface

$$(1,0,0) \succ (0,1,0) \succ (0,0,1), \qquad \left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) \sim \left(\frac{5}{12},\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$$

Determinar una función de utilidad que represente las preferencias $\succeq$.

(b) Otro individuo tiene posee una relación de preferencias sobre loterías $\succeq$ que verifica

$$(1,0,0) \sim \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \qquad (0,0,1) \succ (0,1,0), \qquad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) \succ \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

¿Es posible representarlas mediante una función de utilidad esperada?

(2) Hay una probabilidad del 1% de que ocurra una inundación. El gobierno considera cuatro posibilidades

(A) No se evacua a la población, no siendo necesario hacerlo.

(B) Se evacua a la población, no siendo necesario hacerlo.

(C) Se evacua a la población, siendo necesario hacerlo.

(D) No se evacua a la población, siendo necesario hacerlo.

El gobierno es indiferente entre el suceso seguro B y una lotería entre A, con probabilidad p, y D, con probabilidad $1-p$. También es indiferente entre el suceso seguro C y una lotería entre A, con probabilidad q, y D, con probabilidad $1-q$. Supongamos que prefiere el suceso A al suceso D y que se satisfacen las condiciones del Teorema de la Utilidad Esperada.

(a) Encontrar una función de utilidad esperada que represente las preferencias del gobierno.

(b) El gobierno debe decidir dos criterios de evacuación:

(i) Criterio 1: éste conduce a una evacuación en el 90% de los casos en los que hay una inundación y en el 10% de los casos en los que no la hay.

(ii) Criterio 2: éste conduce a una evacuación en el 95% de los casos en los que hay una inundación y en el 15% de los casos en los que no la hay.

¿Cuál es el criterio que elegirá el gobierno?

(3) Un individuo tienen una función de utilidad $u(x) = \ln x$ sobre cantidades monetarias, una riqueza inicial w y una probabilidad subjetiva p de que su equipo favorito gane la liga. Sabiendo que elige apostar una cantidad x_0 a favor de su equipo favorito, determinar la probabilidad subjetiva p.

(4) Un agente averso al riesgo tiene una riqueza inicial de w, pero puede perder D u.m. con probabilidad π. Puede comprar un seguro a un precio unitario de q, por unidad monetaria asegurada.

(a) Probar que si el seguro no es actuarialmente justo y $q > \pi$, entonces el agente elige una cantidad de seguro $\alpha^* < D$ (no se asegura completamente).

(b) (riesgo moral) Supongamos ahora que el agente puede reducir la probabilidad de accidente π incurriendo en un gasto por anticipado de z. Es decir si invierte z u.m. entonces la probabilidad de accidente es $\pi(z)$ con $\pi'(z) < 0$, $\pi''(z) \geq 0$. Suponiendo que el seguro es actuarialmente justo ($q = \pi(z)$), determinar el nivel óptimo z^* elegido por el individuo.

(5) Consideremos un agente **averso al riesgo** con la función de utilidad $v(x)$ sobre cantidades monetarias y preferencias

$$U(F) = \int v(z)\, dF(z)$$

sobre loterías.

Supongamos que en el futuro hay dos estados posibles que ocurren con probabilidades π y $1-\pi$ y que el agente puede elegir entre dos activos, $r_1 = (1,1)$ y $r_2 = (0,3)$ cuyos precios son, respectivamente $q_1 = 1$ y

$q_2 = 1$. (Por ejemplo, el activo r_2 paga 0 unidades monetarias si (con probabilidad π) ocurre el estado 1 y paga 3 unidades monetarias si (con probabilidad $1-\pi$) ocurre el estado 2. La riqueza inicial del agente es w. Llamamos α a la cantidad de unidades del activo r_2 que compraría el agente.

(a) Determinar para qué valores de π el agente elige $\alpha = 0$ ó $\alpha = w$.

(b) Suponiendo que la función de utilidad del agente es

$$v(x) = \sqrt{x}$$

calcular la cantidad, α, de unidades del activo r_2 que compraría el agente. ¿Cómo cambia α al variar la renta inicial w del agente? ¿Cómo cambia α/w al variar la renta inicial w del agente? Calcular los coeficientes de aversión absoluta y de aversión relativa al riesgo del agente. Explicar los resultados obtenidos utilizando estos coeficientes.

(6) Supongamos que el conjunto de sucesos es finito $C = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, donde los sucesos están ordenados en orden decreciente $c_0 \succeq c_1 \succeq \ldots \succeq c_n$ según una cierta relación de preferencias $\succeq$ que satisface los axiomas de continuidad y de independencia. Sea u una función de utilidad que representa a la relación de preferencias $\succeq$. Identificamos al conjunto $\mathcal{L}$ de loterías sobre C con el símplice de dimensión n. Probar que las soluciones de los problemas

$$\max_{p \in \mathcal{L}} u(p) \quad \text{y} \quad \min_{p \in \mathcal{L}} u(p)$$

se alcanzan en alguno de los puntos $c_0, c_1, \ldots, c_n$.

(7) Un individuo con coche tiene ω euros y se enfrenta a tres alternativas (excluyentes) sobre su futuro: (i) con probabilidad p_1 sufrirá un accidente pequeño, perdiendo L_1 euros; (ii) con probabilidad p_2 sufrirá un accidente grave perdiendo $L_2 > L_1$ euros; y (iii) con probabilidad $1 - p_1 - p_2$ no sufrirá ningún accidente y se quedará con su renta ω.

El agente, que es averso al riesgo y maximiza su utilidad esperada, puede elegir entre dos tipos de seguros: (i) el primero es una póliza con franquicia en la que el agente tiene que pagar r y la compañía de seguros le pagará $L_i - D$ en caso de accidente. (ii) el segundo ofrece cobertura parcial. Cuesta r y la compañía le pagará $(1-\alpha)L_i$ en caso de accidente ($0 < \alpha < 1$). Supongamos que $r = p_1(L_1 - D) + p_2(L_2 - D) = p_1(1-\alpha)L_1 + p_2(1-\alpha)L_2$. Demostrar que el individuo siempre comprará la póliza con franquicia.

(8) Consideremos un agente con una renta inicial de $m = 10$ y una función de utilidad $u(x) = \ln x$ sobre cantidades monetarias. El agente consume una cantidad c de la renta hoy y ahorra el resto para consumir mañana. La tasa de interés es $r = 5/100$. Además mañana el agente recibe una renta adicional que es incierta (por ejemplo, debido a incertidumbre en el trabajo): con probabilidad $\pi = 1/2$ recibe $y + \alpha$ y con probabilidad $1 - \pi = 1/2$ recibe $y - \alpha$, con $y = 5$ y $0 \le \alpha \le 5$.

(a) Plantear el problema de elección de consumo hoy, c, del agente.
(b) Expresar el consumo hoy $c(\alpha)$ y el ahorro del agente como funciones de α.
(c) Probar que $c'(\alpha) < 0$, es decir, al aumentar el riesgo en el futuro, el agente consume menos hoy y ahorra más para el futuro.

(9) Consideremos un inversor con una función de utilidad sobre dinero $u(x) = x - 5x^2/100$ definida para $x \le 10$, con preferencias sobre dinero del tipo utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern y una riqueza inicial w. Supongamos que hay dos posibles estados en el futuro uno favorable y otro desfavorable. La probabilidad de cada uno es $1/2$. Supongamos también que hay dos activos. Un bono del estado que tiene un precio de 1 y paga 1 en cualquier caso. Y un activo de riesgo que cuesta q por unidad y paga 2 en el caso favorable y 0 en el estado desfavorable.

(a) Calcular la función de demanda/oferta del activo de riesgo bajo la hipótesis de que $q < 1$.
(b) Dibuja un diagrama de la función de demanda/oferta del activo de riesgo ¿Es un bien normal?
(c) Supongamos que $q \ge 1$. Calcular la función de demanda/oferta del activo de riesgo. ?'Cambia algo si se permiten ventas al corto (ventas negativas del activo)?

(10) Un agente es averso al riesgo y maximiza la utilidad esperada. Tiene una probabilidad de $1/2$ de sufrir un accidente que le costará $L/2$. Una empresa ofrece un seguro actuarialmente justo. Para aquellas personas que no contratan el seguro y sufren el accidente, el estado les compensa con $L/2$. ¿Cuál será la cantidad de seguro que compra el agente?

(11) Un contribuyente obtiene una renta y. Llamemos x a la cantidad que declara al rellenar su declaración de la renta. Suponemos que $x \leq y$ y que su tipo impositivo es t, es decir el contribuyente declara a hacienda que debe pagar unos impuestos de tx. Con una probabilidad p, Hacienda inspecciona al contribuyente y descubre su verdadera renta. En este caso, el contribuyente debe pagar los impuestos correspondientes a su renta, es decir ty, más una multa $\theta(y-x)$ por la cantidad evadida. Si Hacienda no inspecciona al contribuyente, asume que la declaración presentada por éste es correcta.
   (a) El agente tiene una utilidad sobre dinero $u(x)$ de la que sólo sabemos que es averso al riesgo. Supongamos que la tasa impositiva t y la multa θ están determinadas por el parlamento. Si Hacienda desea que el contribuyente declare su verdadera renta, ¿Cuál es la probabilidad mínima con la que Hacienda debe realizar la inspección?
   (b) Suponiendo que el agente tiene una utilidad sobre dinero $u(x) = \sqrt{x}$ y que $p = 0.1$, $t = 0.3$, $\theta = 2$, $y = 20.000$ euros, calcular la cantidad evadida por el agente.

(12) Un agente con una función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern sobre dinero $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable dos veces es averso al riesgo ($u'' < 0$). El agente organiza una fiesta. La recaudación depende del tiempo que hará ese día. Si no llueve la recaudación será de y euros, mientras que si llueve será de z euros (suponemos $z < y$). La probabilidad de que llueva es p. Una compañía de seguros le ofrece un seguro con cobertura parcial: El agente paga una cantidad qx por el seguro y la compañía le paga la cantidad $(y-z)x$ si (y sólo si) llueve.
   (a) Probar que el agente elige un seguro completo $x = 1$ si el precio del seguro es actuarialmente justo, es decir si $q = p(y-z)$.
   (b) Probar que si el precio del seguro no es actuarialmente justo, es decir si $q > p(y-z)$ entonces el agente elige asegurarse sólo parcialmente $x < 1$.

(13) Consideremos un agente con unas preferencias sobre dinero representadas por la función de utilidad u y unas preferencias sobre loterías que verifican los axiomas del Teorema de la Utilidad Esperada. Su riqueza inicial es w. Tiene la oportunidad de participar en la lotería nacional con un premio total de P. Si gasta x unidades monetarias en la lotería su probabilidad de ganar el premio es $\pi = x/P$. (Suponemos que nunca gastará una cantidad de dinero mayor que el premio, es decir $0 \leq x \leq P$)
   (a) Calcular las condiciones de primer y segundo orden del problema. Determinar si el agente gasta una cantidad positiva en la lotería o no, dependiendo de si es averso al riesgo ($u'' < 0$) or amante del riesgo ($u'' > 0$). (Sugerencia: Interpretar gráficamente las condiciones de primer orden)
   (b) Calcular la cantidad óptima x_0 de lotería comprada para el caso en que $u(z) = -e^{-z}$. (Este apartado es, en principio, independiente y mucho más fácil que el anterior)

(14) Consideremos una economía con dos activos. Un bono del estado que paga 1 en cualquier estado y un activo de riesgo que paga a con probabilidad π y b con probabilidad $1-\pi$. Supongamos que las demandas de los activos son, respectivamente, x_1 y x_2. Supongamos que el agente tiene preferencias del tipo von Neumann–Morgenstern y es averso al riesgo. Su riqueza inicial es 1 y éstos son también los precios de ambos activos.
   (a) Dar una condición necesaria en a y b para que la demanda del bono sea positiva.
   (b) Dar una condición necesaria en a y b para que la demanda del activo de riesgo sea positiva.
   Asumiendo que las condiciones obtenidas en (a) y (b) se satisfacen,
   (c) Escribir las condiciones de primer orden del problema de la maximización de la utilidad del agente.
   (d) Suponiendo que $a < 1$, probar que $dx_1/da \leq 0$.
   (e) Calcular el signo de $dx_1/d\pi$.

(15) Supongamos que un individuo tiene preferencias dadas por la función de utilidad $u_1(x_1, x_2) = \pi_1 v(x_1) + \pi_2 v(x_2)$ con $\pi_1, \pi_2 \geq 0$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Supongamos que $v' > 0$ y que $v'' < 0$. Probar que si el individuo está indiferente entre los puntos (x_1, x_2) y (x_1', x_2') entonces preferirá estrictamente el punto

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_1', \lambda x_2 + (1-\lambda)x_2') \qquad 0 < \lambda < 1$$

a cualquiera de los dos anteriores.

(16) Teoría del arrepentimiento: Supongamos dos loterías $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_s)$. Cada uno de los sucesos ocurre con probabilidades $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s$. El arrepentimiento esperado con la lotería x respecto de la lotería y es

$$A(x,y) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s h\left(\max\{0, y_s - x_s\}\right)$$

donde h es una función creciente. Es decir, h mide el arrepentimiento del individuo al elegir x una vez sabe cuál ha sido el estado resultante. Se dice que x es tan bueno como y en presencia de arrepentimiento si $A(x,y) \leq A(y,x)$.

Supongamos que hay tres estados, que $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3$ y que $h(x) = \sqrt{x}$. Considerar las loterías

$$\begin{aligned} x &= (0, -2, 1) \\ y &= (0, 2, -2) \\ z &= (2, -3, -1) \end{aligned}$$

Probar que el orden de preferencias inducido sobres estas tres loterías no es transitivo.

(17) Supongamos que un agente tiene una función de utilidad sobre dinero $u(x) = x^2 + \alpha x$ con $\alpha < 0$, definida para $x \leq \frac{-1}{2\alpha}$, con preferencias sobre dinero del tipo utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern. Probar que para toda función de distribución F,

$$U(F) = (\sigma^2(F) + \mu(F)^2) + \alpha\mu(F)$$

donde

$$\mu(F) = \int x\, dF, \qquad \sigma^2(F) = \int \left(x - \mu(F)\right)^2\, dF$$

es decir, la utilidad sobre una función de distribución está determinada por la media y la varianza de la distribución.

(18) Calcular las siguientes integrales de Riemann–Stieltjes:

(a) $\int_0^3 x\, d([x] - x)$, donde $[x]$ representa la parte entera de x, es decir el mayor entero mas pequeño que x. (Por ejemplo $[3/2] = [1.5] = 1$). (Este ejercicio es muy fácil si se representa correctamente la función $x - [x]$.)

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF(x)$, siendo

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/3 & \text{si } 1 \leq x < 6 \\ 5/6 & \text{si } 6 \leq x < 10 \\ 1 & \text{si } 10 \leq x. \end{cases}$$

(c) $\int_0^{\infty} e^{-x}\, d(x^2)$.

(19) Supongamos que $u(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y que $F(x)$ tiene una derivada continua $F'(x) = f(x)$ en ese mismo intervalo. Probar que

$$\int_a^b u(x)\, dF(x) = \int_a^b u(x) f(x)\, dx.$$

Aplicar este resultado para calcular otra vez $\int_0^{\infty} e^{-x}\, d(x^2)$.

(20) Supongamos un agente averso al riesgo con una función de utilizada $u(x)$ sobre cantidades monetarias. Dada una lotería F se define la prima de riesgo, para el agente u, como el número $\pi_u(F,w)$ definido por la ecuación

$$u(w - \pi_u(F,w)) = \int_{\mathbb{R}} u(w+z)\, dF(z)$$

Probar que si otro agente con una función de utilidad v(x) sobre cantidades monetarias es más averso al riesgo que u entonces $\pi_v(F,w) > \pi_u(F,w)$ para toda lotería F y para toda cantidad monetaria w. (Sugerencia:

utilizar la desigualdad de Jensen: si g es una función cóncava, entonces $\int g(z)\,dF(z) < g\left(\int z\,dF(z)\right)$.)

(21) Consideremos un agente con una función de utilidad sobre cantidades monetarias

$$u(x) = -e^{-rx}$$

donde r es el coeficiente de aversión absoluta al riesgo del agente. Las preferencias sobre loterías F de este agente verifican las hipótesis del Teorema de la Utilidad Esperada:

$$V(F) = \int_{\mathbb{R}} u(z)\,dF(z)$$

Calcular $V(F)$ cuando la función de distribución de una lotería F es una normal de media μ y varianza σ^2. Es decir, la función de densidad de F es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(22) Consideremos un agente que maximiza la utilidad esperada y con una función de utilidad $u(x)$ sobre cantidades monetarias que es derivable, estrictamente creciente y estrictamente cóncava. El agente evalúa un activo cuyo pago en el futuro ser realiza según una función de distribución normal con media μ y varianza σ^2. Por tanto, la función de densidad de pagos del activo es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Entonces su valoración del activo se puede representar por la función

$$\varphi(\mu, \sigma^2) = \int_{\mathbb{R}} u(x) f(x)\,dx$$

(a) Probar que $\varphi(\mu, \sigma^2)$ es creciente en μ.
(b) Probar que $\varphi(\mu, \sigma^2)$ es decreciente en σ^2.

(Suponer que

$$\lim_{x\to-\infty} u'(x)e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} u'(x)e^{-x^2} = 0)$$

(23) Consideremos el conjunto de loterías con tres premios: 100, 200 y 300. Fijemos una lotería $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. En el símplice de probabilidades, dibuja las loterías que dominan a la lotería π estocásticamente de primer orden.

(24) Supongamos que hay dos agentes cuya función de utilidad sobre cantidades monetarias es $v(x) = \sqrt{x}$. Cada uno de ellos tiene una casa cuyo valor es m. Cada agente se enfrenta (independientemente de lo que le ocurra al otro) a una probabilidad de $1/5$ de que haya incendio y la casa quede destruida totalmente.

En el país A la regulación estipula que, en caso de incendio, cada agente tiene que asumir sus propias pérdidas. En el país B la ley obliga a que los gastos de los incendios se repartan equitativamente entre los vecinos.

(a) ¿Cuál es el valor monetario esperado en cada uno de los países?
(b) ¿En qué país elegirían construir su casa los agentes?
(c) Razonar si la respuesta a los apartados anteriores sigue siendo válida para cualquier función de utilidad **cóncava** sobre cantidades monetarias $v(x)$ y cualquier probabilidad de incendio π.
(d) Supongamos que un inmigrante se instala en el país A y otro en el país B. ¿En cuál de los dos países mejoran (estrictamente) los nativos originales?