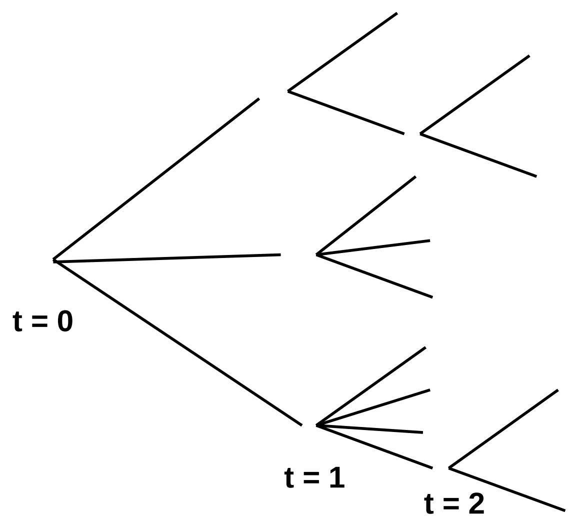
TEMA 3: EQUILIBRIO GENERAL CON INCERTIDUMBRE[1]

10 de noviembre de 2015

En la mayoría de los casos, consideramos una economía con 2 periodos, $t = 0$ (hoy) y $t = 1$ (mañana). Aunque, este modelo puede extenderse a un número cualquiera de periodos y en algunos ejemplos estudiaremos más de dos periodos.

Los agentes conocen los datos de la economía en $t = 0$, pero desconocen cuáles serán los recursos iniciales en el futuro. Sólo saben que ocurrirá una de las posibilidades $s = 0, 1, \ldots, m$. Gráficamente,



Consideramos una economía con $l = 1, \ldots, L$ bienes, $i = 1, \ldots, I$ consumidores y dos periodos: hoy ($t = 0$) y mañana ($t = 1$). En principio, puede haber consumo en los periodos $t = 0$ y $t = 1$.

Vamos a utilizar la siguiente notación:

$$x_s = (x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{Ls}) \in \mathbb{R}^L$$

es una cesta de consumo en el estado s. Con esta notación, x_{ls} es la cantidad de bien l que hay en el estado s (en $t = 1$).

$$x_s^i = (x_{1s}^i, x_{2s}^i, \ldots, x_{Ls}^i)$$

cesta de consumo del agente i en el estado $s = 0, 1, 2, \ldots, m$. En particular, x_{ls}^i es la cantidad de bien l que el agente i consume en el estado s.

$$w_s^i = (w_{1s}^i, w_{2s}^i, \ldots, w_{Ls}^i)$$

son los recursos iniciales disponibles para el agente i, en el estado s.

Al vector

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_s, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{LS}$$

se le llama una mercancía contingente. Especifica una cesta de bienes en cada estado $s = 0, 1, \ldots, m$. Asimismo, el vector

$$x^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_s^i, \ldots, x_m^i) \in \mathbb{R}^{LS}$$

especifica las cestas de consumo $x_s^i \in \mathbb{R}^L$ del agente i en cada uno de los estados $s = 0, 1, 2, \ldots, m$. En particular, el conjunto de consumo de cada agente $i = 1, 2, \ldots, I$ es un subconjunto $X^i \subset \mathbb{R}^{LS}$. Supondremos

[1] Estas notas son una adaptación para esta clase del libro de A. Mas-Collell, M.D. Whinston y J.R. Green: Microeconomic Theory. Capítulo 19.

que las preferencias del agente i vienen representadas por una función de utilidad de la forma

$$u_i(x^i) = \sum_{s=0}^{m} \pi_s^i u_s^i(x_s^i)$$

La cantidad π_s^i puede interpretarse como la probabilidad (subjetiva) que el agente i otorga a que ocurra el suceso $s = 0, 1, \ldots, m$.

1. Equilibrio de Arrow-Debreu

Suponemos que se ha fijado una economía con I agentes y preferencias $u_i(x)$ con $x \in X^i$, el conjunto de consumo, y unos recursos iniciales $w^i \in X^i$, para cada $i = 1, 2, \ldots, I$.

En el modelo de Arrow-Debreu, existen mercados para cada mercancía contingente x_{ls}. Estos mercados se abren en $t = 0$ y se fijan los precios p_{ls} de las mercancías contingentes y se firman los contratos que obligan a los agentes a entregar (y aceptar) determinadas cantidades de cada bien, según el estado s que ocurra en $t = 1$.

Definición 1. Una asignación $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^I)$ con $\bar{x}^i \in \mathbb{R}^{LS}$ y un vector de precios $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ con $p_s \in \mathbb{R}^L$ es un equilibrio de Arrow-Debreu si

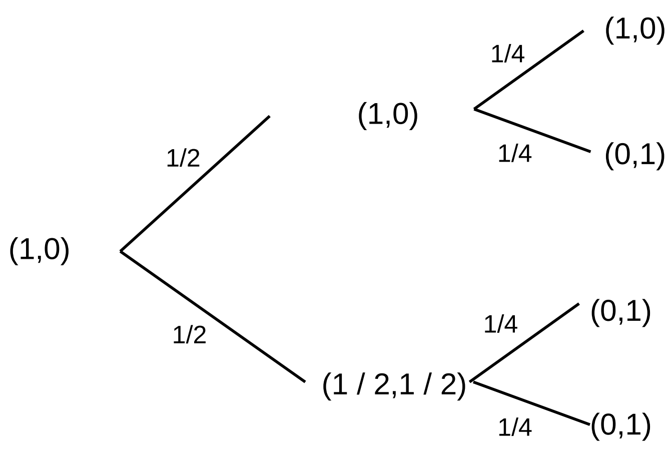
1. Para cada $i = 1, 2, \ldots, I$, $\bar{x}^i$ es una solución del problema

$$\begin{gathered} \max_{x \in X^i} \quad u_i(x) \\ \text{sujeto a } p \cdot x = p \cdot w^i \end{gathered}$$

2. $\sum_{i=1}^{I} \bar{x}_s^i = \sum_{i=1}^{I} w_s^i$ para cada $s = 0, 1, 2, \ldots, m$

Observación 2. Los teoremas de existencia y de bienestar para economía Arrow-Debreu no secuenciales se siguen verificando.

Ejemplo 3. Consideremos la economía con dos bienes, dos agentes y mercados Arrow Debreu siguiente



con preferencias $u_i(x^i) = \sum_{s=0}^{2}(2\ln x_{1s}^i + \ln x_{2s}^i)$.

La demanda del agente $i = 1, 2$, es una solución del problema

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & u_i(x^i) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{s=0}^{2}(p_{1s}x_{1s}^i + p_{2s}x_{2s}^i) = p \cdot w^i \end{aligned}$$

El lagrangiano es

$$L = u_i(x^i) + \lambda(p \cdot w^i - \sum_{s=0}^{2}(p_{1s}x_{1s}^i + p_{2s}x_{2s}^i))$$

que da lugar a las condiciones de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_{1s}^i} &= \frac{2}{x_{1s}^i} - \lambda p_{1s} = 0 & s = 1, 2 \\ \frac{\partial L}{\partial x_{2s}^i} &= \frac{1}{x_{2s}^i} - \lambda p_{2s} = 0 & s = 1, 2 \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que para cada $s = 1, 2$,

$$\begin{aligned} 2 &= \lambda p_{1s}x_{1s}^i \\ 1 &= \lambda p_{2s}x_{2s}^i \end{aligned}$$

y sumando, $3 = \lambda(p_{1s}x_{1s}^i + p_{2s}x_{2s}^i) = \lambda p_s w_s^i$, de donde

$$\lambda p w^i = \lambda(p_1 w_1^i + p_2 w_2^i) = 6$$

de donde, $\lambda = \frac{6}{p \cdot w^i}$. Sustituyendo este valor de λ en las C.P.O obtenemos que

$$\begin{aligned} x_{1s}^i &= \frac{p \cdot w^i}{3p_{1s}} \\ x_{2s}^i &= \frac{1}{6p_{2s}} p \cdot w^i & i = 1, 2; s = 1, 2 \end{aligned}$$

Las condiciones de vaciado de mercado son:

$$\begin{aligned} 1 = x_{1s}^1 + x_{1s}^2 &= \frac{1}{3p_{1s}} p \cdot (w^1 + w^2) \\ 1 = x_{2s}^1 + x_{2s}^2 &= \frac{1}{6p_{2s}} p \cdot (w^1 + w^2) \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} p_{1s} &= \frac{1}{3} p \cdot (w^1 + w^2) \\ p_{2s} &= \frac{1}{6} p \cdot (w^1 + w^2) \end{aligned}$$

y dividiendo, obtenemos que $\frac{p_{1s}}{p_{2s}} = 2$. Podemos tomar los precios de equilibrio

$$\begin{aligned} p_{1s} &= 2, \\ p_{2s} &= 1 & s = 1, 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Consideremos una economía con 2 agentes, 1 bien y 2 estados (en $t = 1$). La función de utilidad del agente $i = 1, 2$ es

$$U_i(x_1^i, x_2^i) = \pi_1^i u_i(x_1^i) + \pi_2^i u_i(x_2^i)$$

con $\pi_1^i + \pi_2^i = 1$ $i = 1, 2$. Las funciones de utilidad u_i, $i = 1, 2$ son cóncavas. Interpretamos π_s^i como la probabilidad que el agente i atribuye al estado s.

Vamos a calcular las asignaciones Pareto eficientes. Utilizamos una función de bienestar social, por lo que los óptimos de Pareto son soluciones del problema

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \alpha_1\pi_1^1 u_1(x_1^1) + \alpha_1\pi_2^1 u_1(x_2^1) + \alpha_2\pi_1^2 u_2(x_1^2) + \alpha_2\pi_2^2 u_2(x_2^2) \\ \text{sujeto a } & x_1^1 + x_1^2 = w_1 \\ & x_2^1 + x_2^2 = w_2 \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son

$$\alpha_1\pi_1^1 u_1'(x_1^1) = \gamma_1 = \alpha_2\pi_1^2 u_2'(x_1^2)$$
$$\alpha_1\pi_2^1 u_1'(x_2^1) = \gamma_2 = \alpha_2\pi_2^2 u_2'(x_2^2)$$

Dividiendo, obtenemos que las asignaciones Pareto eficientes verifican

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\pi_1^1 u_1'(x_1^1)}{\pi_2^1 u_1'(x_2^1)} = \frac{\pi_1^2 u_2'(x_1^2)}{\pi_2^2 u_2'(x_2^2)}$$

Supongamos ahora que las probabilidades subjetivas son las mismas para los dos agentes, es decir, $\pi_s^1 = \pi_s^2$, $s = 1, 2$. En este caso las condiciones de primer orden dan lugar a las ecuaciones

$$\frac{u_1'(x_1^1)}{u_1'(x_2^1)} = \frac{u_2'(x_1^2)}{u_2'(x_2^2)}$$

Si además se verifica que $w_1 = w_2$, (los recursos agregados son los mismos en los dos estados, es decir, no hay incertidumbre agregada), entonces las asignaciones de la forma

$$\begin{aligned} & x_1^1 = x_2^1 = \alpha \\ & x_1^2 = x_2^2 = w - \alpha \qquad\qquad 0 = \alpha = w = w_1 = w_2 \end{aligned}$$

con $x_1^1 + x_1^2 = w = x_2^1 + x_2^2$ son eficientes en el sentido de Pareto. En este caso, los agentes se aseguran completamente; es decir, el consumo de cada agente no depende del estado.

Ejemplo 5. Supongamos ahora que en la economía del 4, $w_1 = 2$, $w_2 = 1$ (es decir, hay riesgo agregado) y que $\pi_1^1 = \pi_1^2 = \pi_1$, $\pi_2^1 = \pi_2^2 = \pi_2$. En este caso, las condiciones de primer orden

$$\frac{\pi_1^1 u_1'(x_1^1)}{\pi_2^1 u_1'(x_2^1)} = \frac{\pi_1^2 u_2'(x_1^2)}{\pi_2^2 u_2'(x_2^2)}$$

se reducen a

$$\frac{u_1'(x_1^1)}{u_1'(x_2^1)} = \frac{u_2'(x_1^2)}{u_2'(x_2^2)} = k$$

para una cierta constante k. Vamos a probar que $k < 1$. Para ello veremos que $k \geq 1$ no es posible. En efecto, si $k \geq 1$, entonces

$$u_1'(x_1^1) \geq u_1'(x_2^1)$$
$$u_2'(x_1^2) \geq u_2'(x_2^2)$$

y como u_i es cóncava (y por lo tanto, u_i' es decreciente), concluimos que

$$x_1^1 = x_2^1$$
$$x_1^2 = x_2^2$$

Pero entonces,

$$2 = w_1^1 + w_1^2 = x_1^1 + x_1^2 = x_2^1 + x_2^2 = w_2^1 + w_2^2 = 1$$

que no es posible. Por lo tanto, $k < 1$. Supongamos que $p = (p_1, p_2)$ son los precios de equilibrio. Tenemos que

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\pi_1 u_1'(x_1^1)}{\pi_2 u_1'(x_2^1)} = \frac{\pi_1 u_2'(x_1^2)}{\pi_2 u_2'(x_2^2)} < \frac{\pi_1}{\pi_2}$$

Si por ejemplo $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$, entonces $\frac{p_1}{p_2} < 1$, es decir, el precio del bien es mayor en el estado en que es más escaso.

Observación 6 (Intercambio Secuencial). Consideremos una economía Arrow-Debreu con dos periodos y mercados contingentes en $t = 0$. Supongamos que $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^s)$ es una asignación de equilibrio bajo los precios $p_1, \ldots, p_m$. Supongamos que en $t = 1$ ocurre el estado s y a cada agente se le asigna la cesta

$$\bar{x}^i_s = (\bar{x}^i_{1s}, \bar{x}^i_{2s}, \ldots, \bar{x}^i_{Ls})$$

y que antes de realizar el consumo, se reabren los mercados y los agentes tienen la posibilidad de intercambiar mercancías. ¿Se realizará alguna transacción?

Veamos que no. Para ello supongamos que hay otra asignación factible y^i_s tal que

$$\sum_{i=1}^{I} y^i_s = \sum_{i=1}^{I} w^i_s$$
$$u^i_s(y^i_s) \geq u^i_s(\bar{x}^i_s) \qquad \text{con alguna desigualdad estricta}$$

Entonces construimos la asignación $y^i_l = \bar{x}^i_l$ para $l \neq s$. Tenemos que $u_i(y^i) = \sum_l u^i_l(y^i_l) \geq \sum_l u^i_l(\bar{x}^i_l)$ con alguna desigualdad estricta, por lo que $\bar{x}$ no sería un óptimo de Pareto.

2. Mercado de Activos

La clave de los mercados Arrow-Debreu es que en $t = 0$ hay mercados para todos los bienes en cada uno de los estados. Una idea propuesta por Arrow es que es posible reducir los mercados (en $t = 0$) a un sólo bien contingente a cambio de que en $t = 1$ se reabran los mercados de contado en todas las mercancías.

Un activo es un derecho a recibir una determinada cantidad de un bien (o una cantidad monetaria) en $t = 1$. La cantidad recibida depende estado de la naturaleza ocurra. Los pagos que realiza el activo son los dividendos. Por sencillez vamos a limitarnos a activos que, en cada estado en $t = 1$, pagan en unidades de un determinado bien, que en lo sucesivo fijaremos como el bien 1.

Definición 7. Una unidad de un **activo** es un vector $r = (r_1, r_2, \ldots, r_s) \in \mathbb{R}^m$. El activo r otorga el derecho a recibir r_s unidades del bien 1 si ocurre el estado s en el periodo $t = 1$.

Ejemplo 8. $r_1 = (1, 1, \ldots, 1)$ Este activo proporciona una unidad del bien 1, independientemente del estado de la naturaleza que ocurra.

Ejemplo 9. Los activos de Arrow son de la forma

$$\begin{aligned} r_1 &= (1, 0, 0, 0, \ldots, 0) \\ r_2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots, 0) \\ r_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ r_s &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

es decir el activo r_s paga 1 unidad del bien 1 si y sólo si ocurre el estado s.

Ejemplo 10. Sea r un activo. Una opción de compra $r(c)$ sobre el activo primario r al precio de ejercicio c es el activo

$$r(c) = (\text{máx}\{0, r_1 - c\}, \text{máx}\{0, r_2 - c\}, \ldots, \text{máx}\{0, r_s - c\})$$

Es decir $r(c)$ permite comprar el activo r al precio c, en $t = 1$, cuando se conoce el estado s de la naturaleza que ha ocurrido y antes de que se paguen los dividendos de r.

Una **estructura de activos** es un conjunto $r_1, r_2, \ldots, r_k$ de activos. Estos activos se compran (en $t = 0$) a los precios, respectivamente $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Utilizamos $q = (q_1, q_2, \ldots, q_k) \in \mathbb{R}^k$ para denotar el vector de precios de los activos. Si el agente $i = 1, 2, \ldots, I$ compra una cantidad z^i_k de cada activo r_k, $k = 1, 2, \ldots, k$, entonces el vector $z^i = (z^i_1, \ldots, z^i_k) \in \mathbb{R}^k$ es la cartera del agente i.

Definición 11 (Equilibrio de Radner)**.** Dada una estructura de activos $r_1, \ldots, r_k$, se dice que

1. un vector de precios $q = (q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{R}^k$ para los activos en $t = 0$,
2. unos precios de contado $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^L$ (en $t = 1$),

3. para cada agente $i = 1, 2, \dots, I$
   a) unas carteras $\bar{z}^i = (\bar{z}^i_1, \dots, \bar{z}^i_m) \in \mathbb{R}^m$; y
   b) unos planes de consumo $\bar{x}^i \in \mathbb{R}^{LS}$ en $t = 1$.

forman un **equilibrio de Radner** si

1. *Maximiza la utilidad individual de los agente:* Para cada $i = 1, 2, \dots, I$, la asignación $\bar{x}^i$ y la cartera $\bar{z}^i$ son una solución de

$$\begin{aligned} \max_{x^i, z^i} \quad & u_i(x^i) \\ \text{s.a} \quad & p_0 \cdot x^i_0 + \sum_{j=1}^{k} q_j z^i_j = p_0 w^i_0 \\ & p_s \cdot x^i_s = p_s w^i_s + p_{1s} \sum_{j=1}^{k} z^i_j r_{sj} \end{aligned}$$

2. *Vacía los mercados de bienes y activos:*
   a) $\sum_{i=1}^{I} z^i_k = 0$ para cada activo $k = 1, 2, \dots, k$
   b) $\sum_{i=1}^{I} \bar{x}^i_s = \sum_{i=1}^{I} w^i_s$ para cada estado $s = 0, 1, 2, \dots, m$.

Observación 12. Si los precios de los activos $q = (q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{R}^k$ y los precios de contado $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{R}^L$ forman parte de un equilibrio de Radner, entonces en cada estado $s = 0, 1, 2, \dots, m$, la asignación $\bar{x}^i \in \mathbb{R}^{LS}$ es un equilibrio de Walras, en la economía en la que las utilidades de los agentes son $u_i, \quad i = 1, 2, \dots, I$ y sus recursos iniciales son

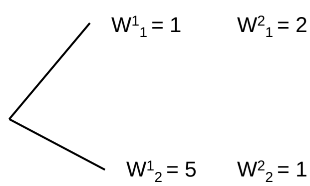
$$w^i_s + \sum_{j=1}^{k} z^i_j r_{sj} \quad i = 1, 2, \dots, I$$

A la matriz

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{s1} & r_{s2} & \cdots & r_{kk} \end{pmatrix}$$

se le llama la **matriz de rendimientos**.

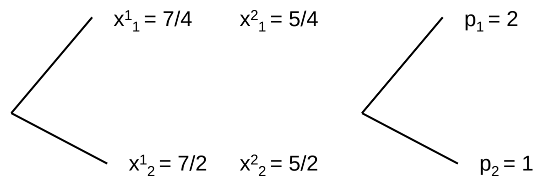
Ejemplo 13. Consideremos el siguiente ejemplo con un bien y dos estados en $t = 1$.



Las funciones de utilidad de los agentes son

$$u_i(x_1^i, x_2^i) = \ln x_1^i + \ln x_2^i \qquad i = 1, 2$$

Se comprueba fácilmente que el equilibrio de Arrow-Debreu es



Supongamos ahora que se restringen los mercados y en $t = 0$ sólo es posible contratar un activo de la forma $r = (1, -a)$. Probar que sólo hay equilibrio de Radner si $a = 2$ y calcular el equilibrio para ese valor de a.

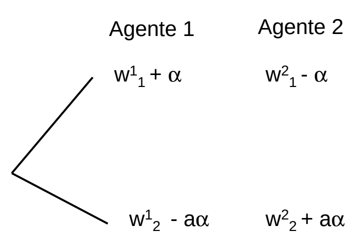
Supongamos que el agente i compra α^i unidades del activo r. La restricción presupuestaria para el agente i en $t = 1$ es

$$\begin{aligned} p_1 x_1^i &= p_1 w_1^i + p_1 \alpha^i \\ p_2 x_2^i &= p_2 w_2^i - p_2 a \alpha^i \end{aligned}$$

simplificando las dos ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} x_1^i &= w_1^i + \alpha^i \\ x_2^i &= w_2^i - a\alpha^i \end{aligned}$$

es decir, llamando $\alpha = \alpha^1$ y exigiendo que $\alpha^2 = -\alpha^1$ (por la condición de que los mercados de activos en $t = 0$ se vacían) obtenemos que esta cartera permite los consumos siguientes para los agentes



Y si el agente i compra α^i unidades del activo r su utilidad es

$$v(\alpha^i) = \ln\left(w_1^i + \alpha^i\right) + \ln\left(w_2^i - \alpha^i a\right)$$

La condición de primer orden es

$$\frac{1}{w_1^i + \alpha^i} = \frac{a}{w_2^i - a\alpha^i}$$

cuya solución es

$$\alpha^i = \frac{w_2^i - a w_1^i}{2a}$$

La condición de vaciado del mercado de activos es

$$\alpha^1 = -\alpha^2$$

es decir

$$\frac{w_2^1 - a w_1^1}{2a} = -\frac{w_2^2 - a w_1^2}{2a}$$

de donde

$$w_2^1 - a w_1^1 = a w_1^2 - w_2^2$$

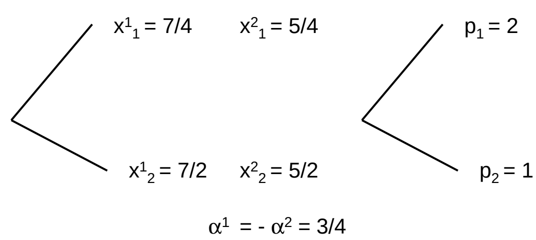
y obtenemos que sólo hay equilibrio si se verifica

$$a = \frac{w_2^1 + w_2^2}{w_1^1 + w_1^2} = 2$$

Para este valor de a obtenemos

$$\alpha^1 = \frac{3}{4} \qquad \alpha^2 = -\frac{3}{4}$$

La asignación que se obtiene con esta cartera es la misma que la que se obtiene en el equilibrio de Arrow-Debreu y, por tanto maximiza la utilidad de los agentes en el conjunto presupuestario. Por lo tanto,



es el equilibrio de Radner cuando $a = 2$.

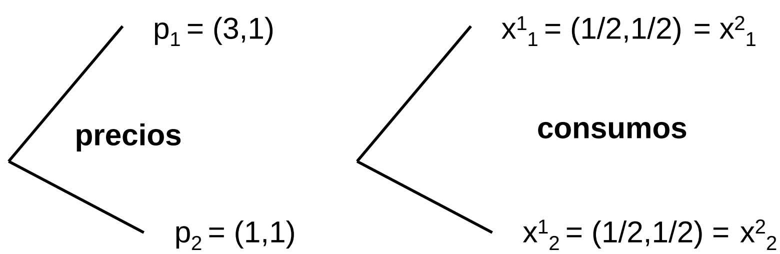
Ejemplo 14. Consideramos ahora el ejemplo 3 pero considerado como una economía de Radner con activos

$$r_1 = (1, 1) \qquad r_2 = (2, 0)$$

Hemos visto que, el equilibrio de Arrow-Debreu los precios eran

$$p_1 = (2, 1), \qquad p_2 = (2, 1)$$

y los consumos de los agentes son $x_s^i = \frac{1}{2}$ en todos los estados. Gráficamente,



Vamos a ver si este equilibrio puede ser parte del equilibrio de Radner. Necesitamos encontrar los precios de los activos y las carteras de los agentes. Elegimos los precios de los activos

$$\begin{aligned} q_1 &= p_{11} + p_{12} = 4 \\ q_2 &= 2p_{11} = 4 \end{aligned}$$

Es decir, el precio del activo r_i es el valor de la cesta r_i con los precios del equilibrio de Arrow-Debreu.

Ahora elegimos las carteras. En el equilibrio de Radner debe verificarse que

1. la cartera $z_s^i (s = 1, 2)$ del agente i y la cesta del agente x^i son una solución del problema

$$q_1 z_1^i + q_2 z_2^i = 0$$
$$p_1(x_1^i - w_1^i) = p_{11} z_1^i + 2p_{11} z_2^i$$
$$p_2(x_2^i - w_2^i) = p_{12} z_1^i$$

2. y los mercados de mercancías y activos se vacían

$$\begin{aligned} &z_s^1 + z_s^2 = 0 \\ &x_s^1 + x_s^2 = w_s^1 + w_s^2 \qquad\qquad s = 1, 2 \end{aligned}$$

En particular, para el agente 1

$$q_1 z_1^1 + q_2 z_2^1 = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{p_{11}} p_1(x_1^1 - w_1^1) = z_1^1 + 2z_2^1 \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{p_{12}} p_2(x_2^1 - w_2^1) = z_1^1 \tag{2.3}$$

Queremos que la solución del problema de Arrow-Debreu

$$\bar{x}_{ks}^i = \frac{1}{2}; i, s, k = 1, 2$$

también lo sea del problema de Radner. Como deber verificarse las ecuaciones 2.2 y 2.3 tenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} &= \bar{z}_1^1 + 2\bar{z}_2^1 \\ \frac{3}{4} &= \bar{z}_1^1 \end{aligned}$$

cuya solución es la cartera del agente 1:

$$\begin{aligned} \bar{z}_1^1 &= \frac{3}{4} \\ \bar{z}_2^1 &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Elegimos la cartera del agente 2 de forma que se vacíen los mercados de activos, es decir,

$$\bar{z}_1^2 = -\frac{3}{4}$$

$$\bar{z}_2^2 = \frac{3}{4}$$

Observamos que también se verifica las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_{11}} p_1(x_1^2 - w_1^2) &= z_1^2 + 2z_2^2 \\ \frac{1}{p_{12}} p_2(x_2^2 - w_2^2) &= z_1^2 \end{aligned}$$

Vemos que

$$\bar{z}^1 + \bar{z}^2 = (0, 0)$$

y

$$\bar{x}_s^1 + \bar{x}_s^2 = \bar{w}_s^1 + \bar{w}_s^2$$

Además

$$\begin{aligned} q_1 \bar{z}_1^i + q_2 \bar{z}_2^i &= (p_{11} + p_{12})\bar{z}_1^i + 2p_{11}\bar{z}_2^i = \\ &= (p_{11}\bar{z}_1^i + 2p_{11}\bar{z}_2^i) + p_{12}\bar{z}_2^i = \\ &= p_1(\bar{x}_1^i - \bar{w}_1^i) + p_2(\bar{x}_2^i - \bar{w}_2^i) = 0 \end{aligned}$$

por lo que también se verifica la ecuación 2.1. Hemos visto que la asignación de Arrow-Debreu también verifica las restricciones presupuestarias del equilibrio de Radner. Supongamos que tenemos otra asignación $\hat{x}^i$ que verifique las restricciones de Radner con la cartera $\hat{z}^1, \hat{z}^2$. Es decir,

$$\begin{aligned} &q_1 \hat{z}_1^i + q_2 \hat{z}_2^i = 0 \\ &p_1(\hat{x}_1^i - w_1^i) = p_{11}\hat{z}_1^i + 2p_{11}\hat{z}_2^i \\ &p_2(\hat{x}_2^i - w_2^i) = p_{12}\hat{z}_1^i \qquad\qquad i = 1, 2 \end{aligned}$$

y supongamos que se vacían los mercados de activos

$$\hat{z}_k^1 + \hat{z}_k^2 = 0$$

y de mercancías

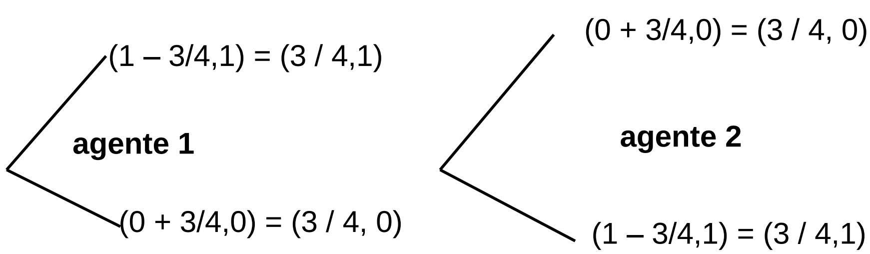
$$\hat{x}_s^1 + \hat{x}_s^2 = w_s^1 + w_s^2$$

Entonces para cada agente $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} p_1(\hat{x}_1^i - w_1^i) + p_2(\hat{x}_2^i - w_2^i) &= p_{11}\hat{z}_1^i + 2p_{11}\hat{z}_2^i + p_{12}\hat{z}_1^i \\ &= (p_{11} + p_{12})\hat{z}_1^i + 2p_{11}\hat{z}_2^i \\ &= q_1\hat{z}_1^i + q_2\hat{z}_2^i = 0 \end{aligned}$$

es decir, $\hat{x}^i$ verifica la restricción del problema de Arrow-Debreu y entonces $u_i(\bar{x}^i) \geq u_i(\hat{x}^i)$. Concluimos que la asignación de Arrow-Debreu $\bar{x}^i$, maximiza la utilidad del agente en el conjunto presupuestario de Radner, por lo que también es un equilibrio de Radner.

¿Cuál es la diferencia con el equilibrio de Arrow-Debreu? En el equilibrio de Radner, los agentes firman (en $t = 0$) los contratos z_s^i, donde $s, i = 1, 2$. Por tanto, cuando $t = 1$ sus recursos iniciales son



mientras que las preferencias sobre consumo de los agentes son

$$u_s^i(x_{1s}^i, x_{2s}^i) = 2\ln x_{1s}^i + \ln x_{2s}^i; i = 1, 2$$

en cada estado $s = 1, 2$. Por ejemplo, supongamos que (en $t = 1$) ocurre el estado $s = 1$. En ese caso, los agentes se encuentran con la economía siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Recursos iniciales:} \quad & w^1 = (1/4, 1);\ w^2 = (3/4, 0) \\ \text{Preferencias:} \quad & u_s^i(x, y) = 2\ln x + \ln y; i = 1, 2 \end{aligned}$$

Vamos a realizar el ejercicio de calcular el equilibrio de Arrow-Debreu de esta economía y comprobaremos que la asignación corresponde a la encontrada para el equilibrio de Radner en este estado $s = 1$.

Las demandas de los agentes se obtienen resolviendo,

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 2\ln x + \ln y \\ \text{s.a} \quad & p_1 x + p_2 y = p \cdot w^i = t^i \end{aligned}$$

Las C.P.O son

$$\frac{2}{x} = \lambda p_1$$
$$\frac{1}{y} = \lambda p_2$$

es decir, $2 = \lambda p_1 x$; $1 = \lambda p_2 y$

Sumando $3 = \lambda(p_1 x + p_2 y) = \lambda t^i$, de donde

$$\lambda = \frac{3}{t^i}$$

Así, la demanda del agente $i = 1, 2$ es

$$x^i = \frac{2}{\lambda p_1} = \frac{2}{3}\frac{t^i}{p_1}$$
$$y^i = \frac{1}{\lambda p_2} = \frac{t^i}{3p_2}$$

Como de costumbre, las condiciones de vaciado de mercado son

$$1 = x^1 + x^2 = \frac{2}{3p_1}(t_1 + t_2)$$
$$1 = y^1 + y^2 = \frac{1}{3p_2}(t_1 + t_2)$$

Dividiendo ambas ecuaciones, obtenemos

$$1 = \frac{2p_2}{p_1}$$

Con lo que podemos tomar $p_1 = 2$ $p_2 = 1$. Estos precios son los precios p_{11}, p_{21} del equilibrio Arrow-Debreu. Con estos precios obtenemos la demanda de cada agente. En primer lugar,

$$t_1 = 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 1 = \frac{3}{2}$$
$$t_2 = 2 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot 0 = \frac{3}{2}$$

luego

$$x^1 = \frac{2}{3}\frac{t_1}{p_1} = \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2} \qquad y^1 = \frac{t_1}{3p_2} = \frac{1}{2}$$
$$x^2 = \frac{2}{3}\frac{t_2}{p_1} = \frac{1}{2} \qquad y^2 = \frac{t_2}{3p_2} = \frac{1}{2}$$

y vemos que coinciden con las asignaciones de Radner para el estado $s = 1$ en $t = 1$.

¿Cuándo funciona este método? Vemos que lo podemos aplicar siempre que sea posible resolver los sistemas

$$\frac{1}{p_{11}} p_1(\bar{x}_1^i - w_1^i) = z_1^i + 2z_2^i$$
$$\frac{1}{p_{12}} p_2(\bar{x}_2^i - w_2^i) = z_1^i \qquad i = 1, 2$$

donde $\bar{x}^i$ es la asignación en el equilibrio de Arrow-Debreu. Las incógnitas son z_k^i $k = 1, 2$. Por tanto, la matriz de los coeficientes del sistema es la matriz de dividendos

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y una condición suficiente que garantiza que siempre haya solución es que $\text{rg}(R) =$ número de estados. Esto motiva lo siguiente

Definición 15. Supongamos que en un mercado de activos hay m estados posibles en $t = 1$. La estructura de activos $r_1, r_2, \ldots, r_k$ es **completa** (o los **mercados son completos**) si $\text{rg}(R) = \text{rg}(r_1 \ \ldots \ r_k) = m$

Un ejemplo de estructura de activos con mercados completos son los activos de Arrow. El siguiente resultado permite reducir los Equilibrios de Radner a los equilibrios de Arrow–Debreu, cuando los mercados son completos.

Proposición 16. *Supongamos que los* **mercados son completos***. Si los planes de consumo y los precios de contado*

$$\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^I \in \mathbb{R}_+^{LS} \quad p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}_+^L$$

constituyen un equilibrio de Arrow-Debreu, entonces existen unos precios para los activos y unas carteras para los agentes

$$q_1, \ldots, q_k \quad \bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^I \in \mathbb{R}^k$$

tales que

$$\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^I \quad p_1, \ldots, p_m \quad q_1, \ldots, q_k \quad y \quad \bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^I$$

es un equilibrio de Radner.

Demostración

Recordemos que el equilibrio competitivo de Arrow-Debreu $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^I$ con los precios $p_1, \ldots, p_m$ maximiza la utilidad de cada uno de los agentes $i = 1, 2, \ldots, I$

$$\text{máx} \quad u_i(x^i) \tag{2.4}$$

$$\text{s.a} \quad x^i \in B_1^i \tag{2.5}$$

en el conjunto presupuestario

$$B_1^i = \left\{ x^i \in \mathbb{R}_+^{LS} : \sum_{s=0}^{m} p_s \cdot (x_s^i - w_s^i) = 0 \right\} \tag{2.6}$$

y vacía los mercados de mercancías

$$\sum_{i=1}^{I} \left(\bar{x}_s^i - w_s^i \right) = 0, \quad \text{en cada uno de los estados } s = 0, 1, 2, \ldots, m \tag{2.7}$$

Para probar que la asignación $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^I$ junto con los precios $p_1, \ldots, p_m$ forman parte de un equilibrio de Radner tenemos que encontrar unas carteras $\bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^I$ y unos precios $q_1, \ldots, q_k$ para los activos tales que para cada uno de los agentes $i = 1, 2, \ldots, I$ la asignación $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^I$ maximiza la utilidad

$$\text{máx} \quad u_i(x^i)$$

$$\text{s.a} \quad x^i \in B_2^i$$

donde ahora el conjunto presupuestario es

$$B_2^i = \{ x^i \in \mathbb{R}_+^{LS} : \quad \text{existen} \quad z_1^i, \ldots, z_k^i \in \mathbb{R}^m \quad \text{tales que} \tag{2.8}$$

$$p_0 \cdot x_0^i + \sum_{j=1}^{k} q_j z_j^i = p_0 w_0^i \tag{2.9}$$

$$p_s \cdot (x_s^i - w_s^i) = p_{1s} \sum_{j=1}^{k} z_j^i r_{sj} \quad s = 1, 2, \ldots, m\} \tag{2.10}$$

En el equilibrio de Radner además de vaciarse los mercados de mercancías (ecuación 2.7), también es necesario que se vacíen los mercados de activos

$$\sum_{i=1}^{I} z^i = 0 \tag{2.11}$$

Dado el equilibrio de Arrow–Debreu,

$$\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^I \quad p_1, \ldots, p_m$$

elegimos los siguientes precios para los activos

$$q_j = \sum_{s=1}^{m} p_{1s} r_{sj} \quad j = 1, \ldots k \tag{2.12}$$

Es decir el precio del activo r_j es el valor de la cesta r_j bajo los precios del equilibrio de Arrow–Debreu.

Tenemos que elegir las carteras. Para cada uno de los agentes $i = 1, 2, \ldots, I$ y para cada estado $s = 0, 1, 2, \ldots, m$ definimos

$$t_s^i = \frac{1}{p_{1s}} p_1 \cdot (\bar{x}_s^i - w_s^i) \quad s = 1, \ldots, m$$

La cantidad

$$\bar{x}_s^i - w_s^i$$

es el exceso de demanda del agente i en el estado s. Los precios

$$\frac{1}{p_{1s}} p_1$$

son los precios de Arrow Debreu en el estado s normalizados de forma que el bien 1 se convierte en el numerario. Por lo tanto t_s^i es el valor del exceso de demanda del agente i en el estado s expresado en unidades del bien 1.

Observamos que

$$\sum_{i=1}^{I} t_s^i = \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{p_{1s}} p_s \cdot (\bar{x}_s^i - w_s^i) = \frac{1}{p_{1s}} p_s \cdot \sum_{i=1}^{I} \left(\bar{x}_s^i - w_s^i\right) = 0 \tag{2.13}$$

por la ecuación 2.7. Para cada agente $i = 1, 2, \ldots, I-1$ consideramos el **sistema lineal**

$$\begin{aligned} t_1^i &= r_{11} z_1^i + r_{12} z_2^i + \cdots r_{1k} z_k^i \\ t_2^i &= r_{21} z_1^i + r_{22} z_2^i + \cdots r_{2k} z_k^i \\ &\vdots \\ t_n^i &= r_{m1} z_1^i + r_{m2} z_2^i + \cdots r_{mk} z_k^i \end{aligned}$$

donde las incógnitas son las carteras de los agentes. Para escribir el sistema en forma abreviada definimos el vector

$$t^i = (t_1^i, \ldots, t_m^i)$$

Observemos que por la ecuación 2.13 se verifica que

$$t^1 + t^2 + \cdots + t^I = 0 \tag{2.14}$$

El sistema lineal anterior puede escribirse como

$$t^i = R \cdot z^i \quad i = 1, 2, \ldots, I-1$$

donde la matriz de coeficientes R coincide con la matriz de dividendos. Como los mercados son completos se verifica que $\mathrm{rg}(R) = m$ y el sistema tiene al menos una solución.

Para cada agente $i = 1, 2, \ldots, I-1$ elegimos su cartera $\bar{z}^i = (\bar{z}_1^i, \ldots, \bar{z}_k^i)$ como una solución cualquiera del sistema anterior y para el agente I elegimos la cartera

$$\bar{z}^I = -\bar{z}^1 - \cdots - \bar{z}^{I-1}$$

Claramente, estas carteras vacían los mercados de activos. Por la ecuación 2.14, tenemos que

$$\begin{aligned} t^I &= -t^1 - t^2 - \cdots - t^{I-1} \\ &= -R\bar{z}^1 - R\bar{z}^2 - \cdots - R\bar{z}^{I-1} \\ &= R(-\bar{z}^1 - \bar{z}^2 - \cdots - \bar{z}^{I-1}) \\ &= R \cdot \bar{z}^I \end{aligned}$$

Por tanto, también se verifica que $t^I = R\bar{z}^I$ y tenemos que

$$t^i = R\bar{z}^i \qquad i = 1, 2, \ldots, I$$

Y escribiendo el sistema explícitamente, esto significa que

$$p_s \cdot (\bar{x}_s^i - w_s^i) = p_{1s} \sum_{j=1}^{k} r_{sj} \bar{z}_j^i \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, I \quad \text{y para cada } s = 1, 2, \ldots, m \tag{2.15}$$

es decir, la asignación $\bar{x}^i$ verifica la restricción 2.10 para la cartera $\bar{z}^i$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} q_j \bar{z}_j^i &= \sum_{j=1}^{k} \bar{z}_j^i \sum_{s=1}^{m} p_{1s} r_{sk} && \text{(Por la ecuación 2.12)} \\ &= \sum_{s=1}^{m} p_{1s} \sum_{k=1}^{k} r_{rs} \bar{z}_k^i && \text{(reagrupando los términos)} \\ &= \sum_{s=1}^{m} p_s \cdot (\bar{x}_s^i - w_s^i) && \text{(Por la ecuación 2.15)} \\ &= -p_0 \cdot (\bar{x}_0^i - w_0^i) && \text{(Por la ecuación 2.6)} \end{aligned}$$

Por tanto, la asignación $\bar{x}^i$ verifica la restricción 2.9 para la cartera $\bar{z}^i$. Concluimos que $\bar{x}^i \in B_2^i$ para cada agente $i = 1, \dots, I$.

Supongamos ahora que para cada agente $i = 1, \dots, I$ tenemos otra asignación $\hat{x}^i \in B_2^i$. Entonces existen unas carteras $\hat{z}^i$ tales que

$$p_0 \cdot \hat{x}_0^i + \sum_{j=1}^{k} q_j \hat{z}_j^i = p_0 w_0^i \tag{2.16}$$

$$p_s \cdot (\hat{x}_s^i - w_s^i) = p_{1s} \sum_{j=1}^{k} \hat{z}_j^i r_{sj} \quad s = 1, 2, \dots, m \tag{2.17}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{m} p_s \cdot (\hat{x}_s^i - w_s^i) &= \sum_{s=1}^{m} p_{1s} \sum_{j=1}^{k} \hat{z}_j^i r_{sj} \qquad \text{(Por la ecuación 2.17)} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \hat{z}_j^i \sum_{s=1}^{m} p_{1s} rsj \qquad \text{(Reagrupando los términos)} \\
&= \sum_{j=1}^{k} q_j \hat{z}_j^i \qquad \text{(Por la ecuación 2.12)} \\
&= -p_0 \cdot (\bar{x}_0^i - w_0^i) \qquad \text{(Por la ecuación 2.16)}
\end{aligned}$$

por lo que $\hat{x}^i \in B_1^i$. Y como $\bar{x}^i$ es un equilibrio de Arrow-Debreu, tenemos que $u_i(\bar{x}^i) \geq u_i(\hat{x}^i), \quad i = 1, 2, \dots, I$. Concluimos, por tanto, que $\bar{x}^i$ maximiza la utilidad de cada agente $i = 1, 2, \dots, I$ en el conjunto presupuestario B_2^i. Ya hemos visto que vacía los mercados de contado para las mercancías y también se vacían los mercados de los activos. Concluimos que $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^I$ es equilibrio de Radner, con los precios de los activos y las carteras indicadas.

Lemma 1. Consideremos una estructura de activos $r_1, r_2, \dots, r_k$. Supongamos que existe un equilibrio de Radner en el que los precios de los activos son $q = (q_1, \dots, q_k)$. Entonces existen $\mu_1, \dots, \mu_m > 0$ tales que

$$\boxed{q_j = \textstyle\sum_{s=1}^{m} \mu_s r_{sj} \quad j = 1, \dots, k} \tag{2.18}$$

En notación matricial,

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix} = R^t \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_s \end{pmatrix}$$

ó también

$$(q_1, \dots, q_k) = (\mu_1, \dots, \mu_s) \cdot R$$

<u>Demostración:</u> Fijamos un agente $i = 1, \dots, I$. La cartera z^i y los consumos x^i del agente i son una solución del problema

$$\begin{aligned}
\max_{x^i, z^i} \quad & u_i(x^i) \\
\text{s.a} \quad & p_0 \cdot x_0^i + \sum_{j=1}^{k} q_j z_j^i = p_0 w_0^i \\
& p_s \cdot x_s^i = p_s w_s^i + p_{1s} \sum_{j=1}^{k} z_j^i r_{sj} \qquad s = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

El lagrangiano de ese problema es

$$L = u_i(x^i) + \lambda_0^i \left(p_0 \cdot (w_0^i - x_0^i) - \sum_{j=1}^{k} q_j z_j^i \right) + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s^i \left(p_s \cdot (w_s^i - x_s^i) + p_{1s} \sum_{j=1}^{k} z_j^i r_{sj} \right)$$

es decir,

$$L = u_i(x^i) + \sum_{s=0}^{m} \lambda_s^i p_s \cdot (w_s^i - x_s^i) + \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{s=1}^{m} \lambda_s^i p_{1s} r_{sj} - \lambda_0^i q_j \right) z_j^i$$

Las condiciones de primer orden respecto a x_{ls}^i son

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_{ls}^i} = \lambda_s^i p_{ls} \qquad s = 0, \ldots, m; \quad l = 1, \ldots, L$$

Como la función de utilidad es creciente y los precios son positivos, vemos que

$$\lambda_s^i > 0 \qquad s = 0, \ldots, m$$

Las condiciones de primer orden respecto a z_j^i son

$$\lambda_0^i q_j = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s^i p_{1s} r_{sj} \qquad j = 1, \ldots, k$$

Definimos

$$\mu_s = \frac{\lambda_s^i p_{1s}}{\lambda_0^i} \geq 0$$

con lo cual

$$q_j = \sum_{s=1}^{m} \mu_s r_{sj}$$

Observación: Las condiciones de primer orden de cada agente permiten definir unos multiplicadores μ_s que en principio pueden ser distintos para cada agente.

Proposición 17. *Supongamos que los* **mercados son completos**. *Entonces, Si los planes de consumo, los precios de contado, los precios de los activos y las carteras*

$$\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^i \in \mathbb{R}_+^{LS} \quad p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}_+^L \quad q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{R} \quad \bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^I \in \mathbb{R}^k$$

forman un equilibrio de Radner, entonces existen unos multiplicadores

$$\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}_{++}$$

tales que la asignación contingente y los precios de contado

$$\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^I \in \mathbb{R}_+^{LS} \quad \mu_1 p_1, \ldots, \mu_m p_m \in \mathbb{R}_+^L$$

constituyen un equilibrio de Arrow-Debreu.

Demostración:

Por el Lema 1 podemos encontrar unos $\mu_1, \ldots, \mu_m > 0$ tales que

$$q_j = \sum_{s=1}^{m} \mu_s r_{sj} \quad j = 1, \ldots, k \tag{2.19}$$

Vamos a probar que la asignación $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^I$ y los precios $\mu_1 p_1, \ldots, \mu_m p_m$ son un equilibrio de Arrow-Debreu.

En primer lugar observamos que como $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^I$ es parte del equilibrio de Radner se verifica que

$$p_0 \cdot (\bar{x}_0^i - w_0^i) = -\sum_{j=1}^{k} q_j \bar{z}_j^i \tag{2.20}$$

$$p_s \cdot (\bar{x}_s^i - w_s^i) = \sum_{j=1}^{k} r_{sj} \quad s = 1, \ldots, m \bar{z}_j^i \tag{2.21}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{m}\mu_s p_s\cdot(\bar{x}_s^i - w_s^i) &= \sum_{s=1}^{m}\mu_s\left(\sum_{j=1}^{k} r_{sj}\bar{z}_j^i\right) \quad \text{(por la ecuación 2.21)}\\
&= \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m}\mu_s r_{sj}\right)\bar{z}_j^i \quad \text{(reagrupando los términos)}\\
&= \sum_{j=1}^{k} q_j\bar{z}_j^i = \quad \text{(por la ecuación 2.19)}\\
&= -p_0\cdot(\bar{x}_0^i - w_0^i) \quad \text{(por la ecuación 2.20)}
\end{aligned}$$

es decir, la asignación $\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^I$ satisface la restricción presupuestaria

$$\sum_{s=0}^{m}\mu_s p_s\cdot(x_s^i - w_s^i) = 0$$

Supongamos que tenemos otra asignación $y^1,\ldots,y^I$ que satisface la restricción presupuestaria

$$\sum_{s=0}^{m}\mu_s p_s\cdot(y_s^i - w_s^i) = 0$$

Como los mercados son completos, podemos encontrar unas carteras $\theta^1,\ldots,\theta^I\in\mathbb{R}^k$ tales que

$$p_s\cdot\left(y_s^i - w_s^i\right) = \sum_{j=1}^{k} r_{sj}\theta_j^i \quad s = 1,\ldots, \quad j = 1,\ldots,m$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} q_j\theta_j^i &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}\mu_s r_{sj}\theta_j^i\\
&= \sum_{s=1}^{m}\mu_s\left(\sum_{j=1}^{k} r_{sj}\theta_j^i\right)\\
&= \sum_{s=1}^{m}\mu_s p_s\cdot\left(y_s^i - w_s^i\right) = -\mu_0 p_0\cdot(y_0^i - w_0^i)
\end{aligned}$$

Entonces, la cesta y^i para $i = 1,\ldots,I$ satisface las restricciones del equilibrio de Radner. Como la asignación $\bar{x}^i$ para cada $i = 1,\ldots,I$ maximiza la utilidad del agente i en el conjunto presupuestario de Radner, tenemos que

$$u_i(\bar{x}^i)\geq u_i(y^i) \quad j = 1,\ldots,I$$

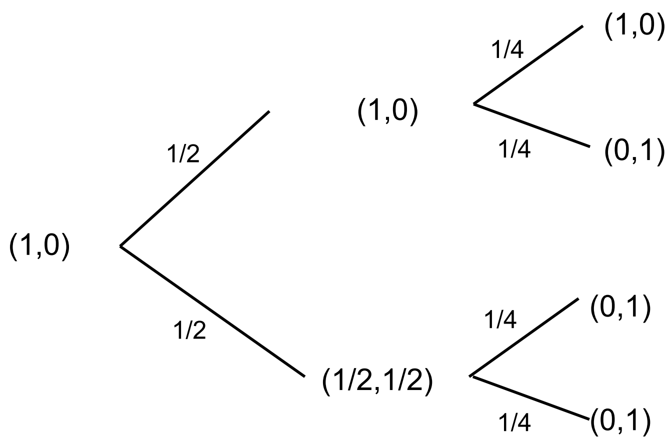
Este razonamiento demuestra que la asignación $\bar{x}^i$ para cada $i = 1,\ldots,I$ también maximiza la utilidad del agente i en el conjunto presupuestario

$$\sum_{s=0}^{m}\mu_s p_s\cdot(x_s^i - w_s^i) = 0$$

Además los mercados de mercancías se vacían, ya que esta es una de las condiciones del equilibrio de Radner. Por lo tanto la asignación $\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^I$ y los precios $\mu_1 p_1,\ldots,\mu_m p_m$ constituyen un equilibrio de Arrow-Debreu.

3. Mercados dinámicamente completos

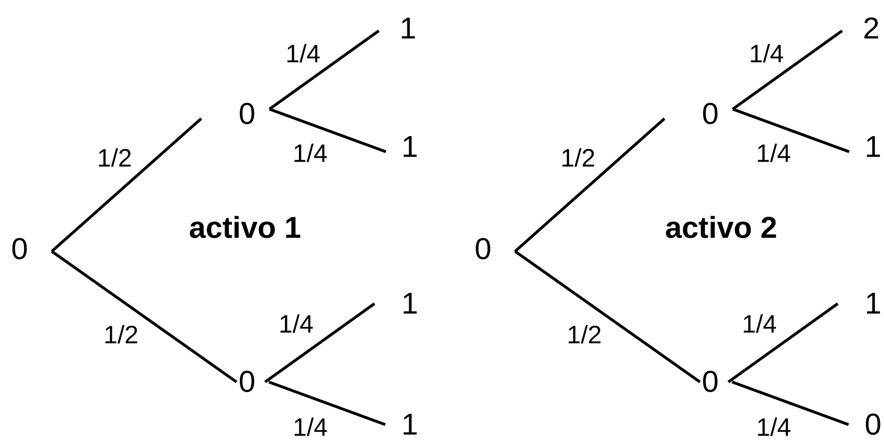
Ejemplo 18. Consideremos una economía de intercambio con los recursos iniciales que se presentan en la figura siguiente



y los activos cuyos dividendos son

r_1		r_2	
e_0	0	e_0	0
e_{11}	0	e_{11}	0
e_{12}	0	e_{12}	0
e_{21}	1	e_{21}	2
e_{22}	1	e_{22}	1
e_{23}	1	e_{23}	1
e_{24}	1	e_{24}	0

En forma de árbol,



Las preferencias de los dos agentes son

$$u_i(x^i) = \sum_s \pi_s \ln x^i_s \ i = 1, 2$$

En primer lugar, vamos a calcular los equilibrios de Arrow-Debreu de esta economía, ignorando los activos. Dados los precios de contado $p_1, p_2, \ldots, p_s$, el agente i, elige una cesta $\bar{x}^i$ que maximiza

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & u_i(x^i) \\ \text{s.a} \quad & \sum_s p_s \cdot x^i_s = \sum_s p_s w^i_s \end{aligned}$$

el lagrangiano del problema es

$$L = \sum_s \pi_s \ln x^i_s + \lambda^i \sum_s p_s \cdot (w^i_s - x^i_s)$$

y obtenemos las condiciones de primer orden,

$$\frac{\pi_s}{x^i_s} = \lambda^i p_s \ s = 0, 1, 2, \ldots$$

de donde $\pi_s = \lambda^i p_s \cdot x^i_s$ y sumando obtenemos

$$3 = \sum_{s=0}^{m} \pi_s = \lambda^i \sum_s p_s \cdot x^i_s = \lambda^i \sum_s p_s w^i_s$$

de donde

$$\lambda^i = \frac{3}{\sum_l p_l w^i_l}$$

y como

$$x^i_s = \frac{\pi_s}{\lambda^i p_s}$$

tenemos que

$$x^i_s = \frac{\pi_s}{3p_s} \sum_l p_l w^i_l \qquad\qquad i = 1, 2; s = 0, 1, 2, \ldots$$

La condición de vaciado de mercado es

$$\begin{aligned} 1 = w^1_s + w^2_s &= x^1_s + x^2_s \\ &= \frac{\pi_s}{3p_s} \sum_l p_l (w^1_l + w^2_l) \\ &= \frac{\pi_s}{3p_s} \sum_l p_l \end{aligned}$$

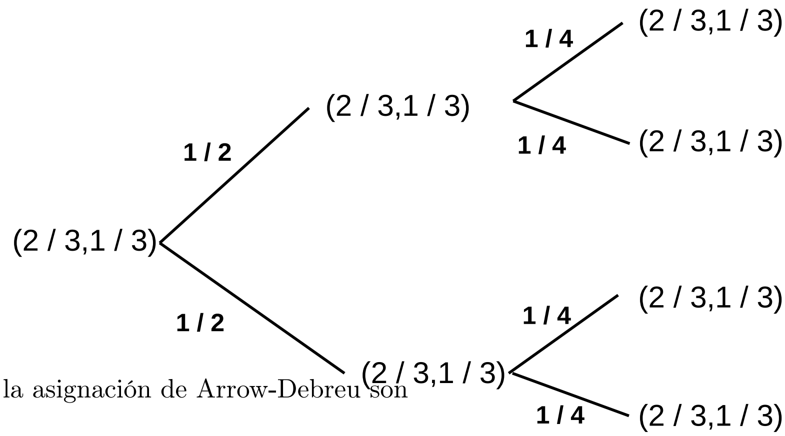
y eligiendo $\sum_l p_l = 3$, tenemos que $p_s = \pi_s \ s = 0, 1, 2, \ldots$ son los precios de equilibrio. Sustituyendo en la función de demanda de cada agente, obtenemos la asignación de equilibrio

$$x^i_s = \frac{1}{3} \sum_l p_l w^i_l$$

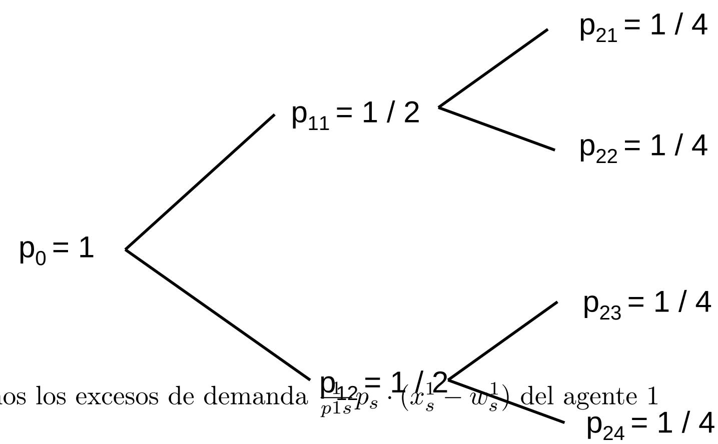
y sustituyendo los datos del problema que

$$\begin{aligned} x^1_s &= \frac{2}{3} \qquad\qquad & s = 0, 1, 2, \ldots, m \\ x^2_s &= \frac{1}{3} \qquad\qquad & s = 0, 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

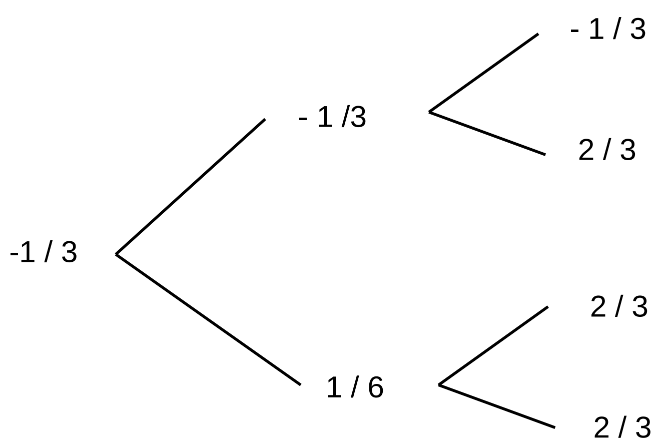
Resumiendo, los consumos en la asignación de Arrow-Debreu son



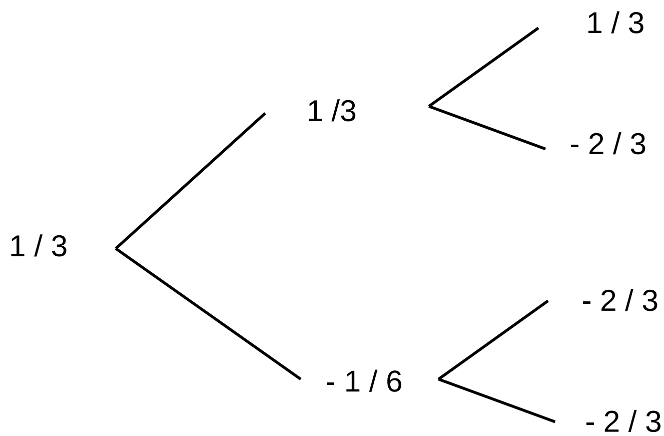
y los precios en la asignación de Arrow-Debreu son



Ahora representamos los excesos de demanda $\frac{1}{p1s} p_s \cdot (x_s^1 - w_s^1)$ del agente 1



y del agente 2,



Supongamos ahora que no disponemos de mercados Arrow-Debreu y que los únicos instrumentos para realizar transacciones son los activos y los mercados de contado. También suponemos que es posible negociar los activos en cada uno de los nodos.

Vamos a calcular la cartera y la estrategia de intercambio del agente 1. En primer lugar, fijémonos en el nodo e_{11}. En este nodo el agente 1 comprará θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2 de forma que se satisfaga el exceso de demanda en los nodos e_{21}, e_{22}, es decir

$$\theta_1 + 2\theta_2 = -\frac{1}{3}$$
$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{2}{3}$$

Obtenemos $\theta_2 = -1, \theta_1 = \frac{5}{3}$.

Análogamente, en el nodo e_{21} comprará θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2 de forma que se satisfaga el exceso de demanda en los nodos e_{23} y e_{24}. Por tanto,

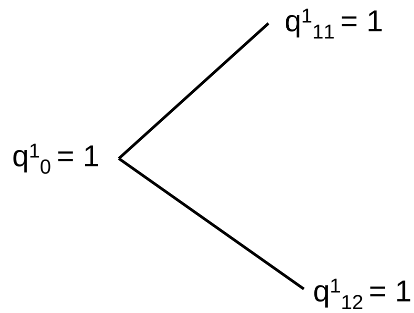
$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{2}{3}$$
$$\theta_1 = \frac{2}{3}$$

de aquí obtenemos $\theta_1 = 2/3$, $\theta_2 = 0$.

Cómo puede financiar estas carteras? Para determinar esto, vamos a calcular primero los precios de los activos en cada nodo. Para el activo 1 obtenemos

$$\begin{aligned} &nodo\ e_{11} : & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ &nodo\ e_{12} : & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ &nodo\ e_{0} : & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \end{aligned}$$

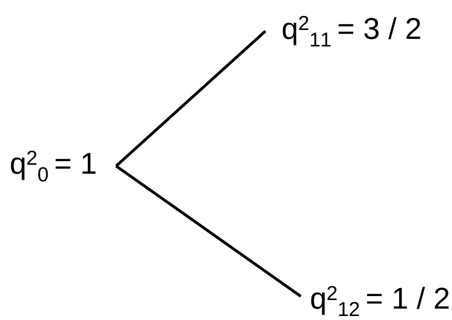
Ahora queremos expresar esto en términos del bien numerario. Por tanto, hay que dividir por p_s y obtenemos los precios normalizados del activo 1,



Análogamente, los precios del activo 2 son:

$$\begin{array}{ll} nodo\ e_{11}: & \frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \\ nodo\ e_{12}: & \frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4} \\ nodo\ e_{0}: & \frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1 \end{array}$$

y normalizando los precios en términos del numerario obtenemos



¿Cómo interpretar esto? Por ejemplo en el nodo e_{11} podemos cambiar una unidad del activo 1 por una unidad del bien y una unidad del activo 2 por $\frac{3}{2}$ unidades del bien.

Volvamos a la cartera del agente 1. En el nodo e_{11} su exceso de consumo es $-\frac{1}{3}$ pero además debe financiar su cartera $\theta_1=\frac{5}{3}, \theta_2=-1$ que, en términos del bien numerario, le cuesta

$$\frac{5}{3}\cdot 1-1\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{6}$$

Por tanto, el exceso de demanda total del agente 1 en el nodo e_{11} es $-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$.

Análogamente, en el nodo e_{12} su exceso de consumo es $\frac{1}{6}$ pero para financiar su cartera $\theta_1=\frac{2}{3}, \theta_2=0$ que le cuesta

$$\frac{2}{3}\cdot 1+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

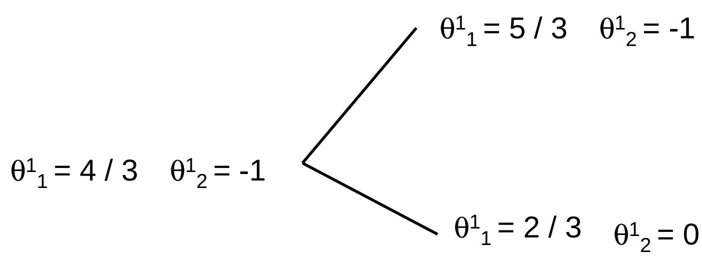
necesita $\frac{2}{3}$ del bien numerario adicionales. Por tanto, su exceso de demanda total en el nodo $l_1 2$ es $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$.

Por tanto, en $t = 0$, necesita comprar una cartera que financia estas necesidades en $t = 1$, es decir, elige θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2, de forma que

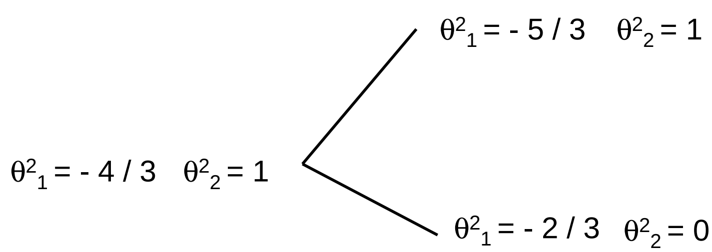
$$\theta_1 + \theta_2 \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}$$
$$\theta_1 + \theta_2 \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

de donde $\theta_1 = \frac{4}{3}, \theta_2 = -1$.

Por tanto, la estrategia del agente 1 es comprar las carteras que se muestran en la figura



La restricción presupuestaria de activos requiere que la cartera del agente 2 sea la que se presenta en el árbol siguiente



Veamos cómo interpretar estos resultados. En el nodo e_0 en $(t = 0)$ el agente 1 tiene una unidad del bien, consume $\frac{2}{3}$ y utiliza el $\frac{1}{3}$ restante para comprar $\frac{4}{3}$ del activo 1 y vende al corto una unidad del activo 2. El precio de esta cartera es

$$\frac{4}{3} \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

En el nodo e_{11}, el agente 1 tiene también una unidad del bien 1 a la que añade el valor de su cartera que es

$$\frac{4}{3} \cdot 1 - 1 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}$$

Dispone por tanto, de $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ unidades del bien 1. Con esto compra la cartera $\theta_1 = \frac{5}{3}, \theta_2 = -1$ al precio

$$1 \cdot \frac{5}{3} - 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

y le queda $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ que dedica al consumo.

Análogamente, en el nodo e_{12} el agente tiene

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

y necesita

$$\frac{2}{3}+(\frac{2}{3}\cdot 1+0\cdot\frac{1}{2})=\frac{4}{3}$$

Finalmente, en cada uno de los nodos de $t=2$, estas carteras financian su exceso de demanda.

4. Arbitraje

Definición 19. Dada una estructura de activos R y un sistema $q\in\mathbb{R}^k_+$, decimos que **hay arbitraje** si existe una cartera $z\in\mathbb{R}^k$ tal que

$$q\cdot z=0$$

$$R\cdot z>0$$

Decimos que, dada la estructura de activos R, el sistema de precios $q\in\mathbb{R}^k_+$ está **libre de arbitraje** si no hay arbitraje en la economía.

Esto significa que no hay una cartera factible en el periodo $t=0$ y que proporcione unos dividendos no negativos a todos los estados de $t=1$ y un dividendo estrictamente positivo en alguno de los estados.

Observamos que en equilibrio (de Radner o Arrow-Debreu) no puede haber arbitraje. Ya que si lo hubiera, los agentes podrían aumentar su utilidad añadiendo a la cartera de equilibrio una cartera con arbitraje. Formalmente,

Proposición 20. *Supongamos que las preferencias de los agentes son estrictamente crecientes. Si q son los precios de los activos correspondientes a un equilibrio de Radner, entonces estos precios están libres de arbitraje.*

Demostración: Supongamos que $\bar{x}^i\in\mathbb{R}^{LS}$ son las asignaciones $p_s\in\mathbb{R}^L$ los precios de contado, q los precios de los activos y $\bar{z}^i\in\mathbb{R}^k$ las carteras correspondientes a un equilibrio de Radner. Entonces se verifica la restricción presupuestaria

$$q\cdot\bar{z}=-p_0\cdot(y_0^i-w_0^i)$$

$$p_s\cdot(\bar{x}_s^i-w_s^i)=\sum_{j=1}^{k}\bar{z}_j^i r_{sj}\qquad s=1,2,\ldots,m$$

Veamos que no puede haber arbitraje. Para ello probaremos que si arbitraje entonces llegamos a una contradicción. Supongamos entonces que sí hay arbitraje. En este caso podemos encontrar una cartera $\hat{z}\in\mathbb{R}^k$ tal que

$$q\cdot\hat{z}=0$$

$$R\cdot\hat{z}>0$$

Consideremos ahora la cartera $\theta^i=\bar{z}^i+\hat{z}$. Entonces

$$q\theta^i=q\bar{z}^i+q\hat{z}=-p_0\cdot(y_0^i-w_0^i)$$

por lo que el agente $i=1,2,\ldots,I$ puede comprar esta cartera en $t=0$. Además en $t=1$ se verifica que

$$p_s\cdot(\bar{x}^i-w^i)=\sum_{j=1}^{k}\bar{z}_j^i r_{sj}\le\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{z}_j^i+\hat{z}_j^i\right)r_{sj}=\sum_{j=1}^{k}\theta_j^i r_{sj}\quad s=1,2,\ldots,m$$

con desigualdad estricta para algún estado $s=1,2,\ldots,m$. Por tanto, con la cartera θ^i el agente i obtiene al menos la misma renta en todos los estados $s=1,2,\ldots,m$ y en alguno de ellos obtiene una renta estrictamente mayor. Por lo tanto, puede aumentar su consumo en al menos un estado de $t=1$. Como las preferencias son crecientes, concluimos que $\bar{x}^i$ no maximiza la función de utilidad del agente. Por lo que no puede ser una asignación correspondiente a un equilibrio de Radner. Por lo tanto, no puede haber arbitraje.

4.1. Valoración por arbitraje. Supongamos que tenemos una estructura de activos $R = (r_1, r_2, \dots, r_k) \geq 0$ y unos precios $q_1, \dots, q_k$ bajo los que no hay arbitraje. Vamos a demostrar que si

$$r_3 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \qquad \text{con } r_1, r_2 > 0$$

entonces $q_3 = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$. En efecto, supongamos que, por ejemplo $q_3 > \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$. Elegimos $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que se verifique

$$q_3 > (\alpha_1 + \epsilon) q_1 + \alpha_2 q_2$$

Vamos a probar ahora que, con la cartera z definida por

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha_1 + \epsilon \\ z_2 &= \alpha_2 \\ z_3 &= -1 \\ z_4 &= z_5 = \cdots = 0 \end{aligned}$$

hay una oportunidad de arbitraje bajo los precios $q_1, q_2, \dots, q_k$.

El valor de la cartera z es

$$q \cdot z = q_1(\alpha_1 + \epsilon) + q_2 \alpha_2 - q_3 < 0$$

y los dividendos son

$$\begin{aligned} z_1 r_1 + z_2 r_2 + z_3 r_3 &= (\alpha + \epsilon) r_1 + \alpha_2 r_2 - r_3 \\ &= \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 - r_3 + \epsilon r_1 \\ &= \epsilon r_1 > 0 \end{aligned}$$

Por tanto, z realiza una oportunidad de arbitraje. Esto significa que $q_3 > \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$ no era posible. Análogamente podemos descartar $q_3 < \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$ y concluimos que $q_3 = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$.

Ejemplo 21. Supongamos que hay dos activos $r_1 = (1, 1)$ y $r_2 = (3 + \alpha, 1 - \alpha)$ con $\alpha > 0$. Supongamos que con los precios $q_1 = 1$ y q_2 no hay arbitraje. Dado un número $1 < c < 3$, los dividendos de una opción de compra sobre el activo r_2, con precio de ejercicio c son

$$r_2(c) = (3 + \alpha - c, 0)$$

Vamos a valorar la opción de compra $r_2(c)$. En primer lugar buscamos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$r_2(c) = a r_1 + b r_2$$

esta ecuación da lugar al sistema lineal

$$\begin{aligned} 3 + \alpha - c &= a + 3b + b\alpha \\ 0 &= a + b - b\alpha \end{aligned}$$

cuyas incógnitas son a y b. La solución es

$$a = \frac{3 + \alpha - c}{2 + 2\alpha} \qquad\qquad b = (1 - \alpha) \frac{3 + \alpha - c}{2 + 2\alpha}$$

de donde

$$r_2(c) = \frac{3 + \alpha - c}{2 + 2\alpha} r_1 + (1 - \alpha) \frac{3 + \alpha - c}{2 + 2\alpha} r_2$$

por lo que, utilizando no arbitraje, el precio de la opción es

$$q_2(c) = \frac{3 + \alpha - c}{2 + 2\alpha} + (1 - \alpha) \frac{3 + \alpha - c}{2 + 2\alpha} q_2$$

5. Probabilidades de Riesgo Neutro

Proposición 22. Consideremos una estructura de activos $r_1, r_2, \ldots, r_k > 0$. Entonces, un sistema de precios $q_1, q_2, \ldots, q_k$ está libre de arbitraje si y sólo si existen $\mu_1, \ldots, \mu_s > 0$ tales que

$$\boxed{q_j = \sum_{s=0}^{m} \mu_s r_{sj} \quad \text{j=1,...,k}} \tag{5.1}$$

En notación matricial,

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix} = R^t \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_s \end{pmatrix}$$

ó

$$(q_1, \ldots, q_k) = (\mu_1, \ldots, \mu_s) \cdot R$$

Demostración:

Demostración de (⇒): Como todos los pagos de los activos son positivos, si el precio de algún activo $k = 1, 2, \ldots, k$ es cero, $q_k = 0$, entonces podemos elegir la cartera

$$z_i = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k, \qquad z_k = 1$$

Esta cartera cuesta $q_z z_k = 0$ y los dividendos futuros son r_k, los pagos del activo k, por lo que habría arbitraje. Por tanto, si no hay arbitraje se verifica que todos los precios de los activos $q_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, k$.

También, si ocurre que todos los pagos de todos los activos son 0 para algún estado, podemos ignorar ese estado y hacer el razonamiento siguiente para el resto de los estados. De esta forma podemos suponer que en ninguna de las filas de la matriz de dividendos, R es nula (es decir, no todos los elementos de la fila son 0).

Supongamos ahora que los precios $q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$ están libres de arbitraje. Consideramos el conjunto

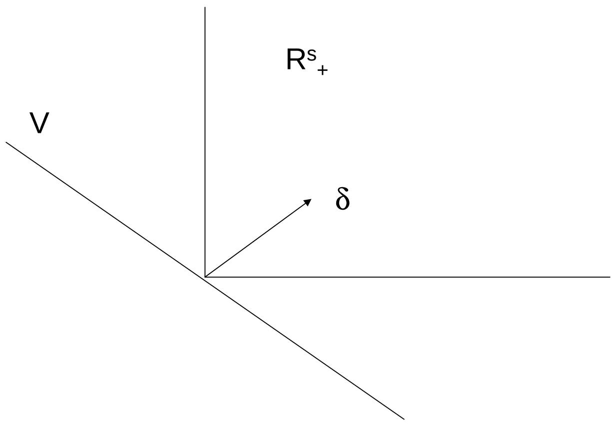
$$V = \{Rz : z \in \mathbb{R}^k, \quad q \cdot z = 0\} \subset \mathbb{R}^m$$

El conjunto V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$ de dimensión $m - 1$.

Observamos, además, que si para algún $z \in \mathbb{R}^k$ con $q \cdot z = 0$ se verifica que $Rz \geq 0$ con $Rz \neq 0$, entonces hay arbitraje. Por tanto,

$$V \cap \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$$

Como V y $\mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$ son conjuntos convexos, utilizando los teoremas de separación, podemos encontrar un hiperplano que los separa.



Es decir, existe un vector $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ tal que

$$\begin{aligned} \delta \cdot v = 0 &\quad \text{para todo } v \in V \\ \delta \cdot v \geq 0 &\quad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\} \end{aligned}$$

En primer lugar, demostraremos que

1. $\delta \geq 0$.
2. $\delta \cdot v = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$.

Si, por ejemplo, $\delta_1 < 0$, elegimos el vector $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$ y no se verifica que $\delta \cdot (1, 0, \ldots, 0) \geq 0$. Por tanto, $\delta \geq 0$.

Por otra parte, como V es un espacio vectorial, si $v \in V$, entonces también $-v \in V$. Y debe verificarse que

$$\begin{aligned} \delta \cdot v = 0 \\ -\delta \cdot v = 0 \end{aligned}$$

por lo que $\delta \cdot v = 0$.

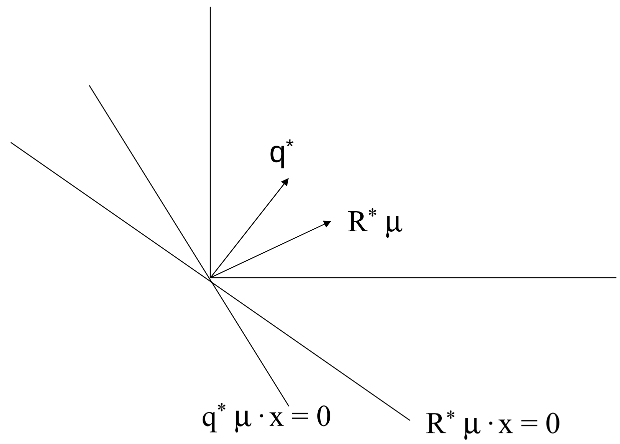
Ahora vamos a probar que

$$q^t = R^t \delta^t$$

para algún $\alpha > 0$. Como todos los coeficientes son positivos, tenemos que

$$R^t \delta^t \geq 0$$

Además $\alpha R^t \delta^t \neq 0$ ya que todas las coordenadas de q son positivas y ninguna fila de R es nula.



Si q^t y $R^t\delta^t$ no son proporcionales, entonces los hiperplanos

$$\{x \in\mathbb{R}^m : R^t\mu \cdot x = 0\}$$
$$\{x \in\mathbb{R}^m : qt\mu \cdot x = 0\}$$

son distintos. Tomamos z en el hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^m : q^t\mu \cdot x = 0\}$ pero que no está en el hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^m : R^t\mu \cdot x = 0\}$. Entonces,

$$R^t\mu \cdot z \neq 0$$

Tomando, si es necesario $-z$, podemos suponer que

$$q^t\mu \cdot z = 0$$
$$R^t\mu \cdot z > 0$$

Pero entonces z constituye una cartera de arbitraje. Por tanto, q^t y $\alpha R^t\delta^t$ son colineales y existe un $\alpha > 0$ tal que

$$q^t = \alpha R^t\delta^t$$

Ahora tomamos

$$\mu = \alpha\delta$$

y se verifica que

$$R^t\mu^t = R^t(\alpha\delta) = \alpha R^t\delta^t = \alpha q^t$$

Hemos probado que $q = (\mu_1, \ldots, \mu_s) \cdot R$ con $\mu_1, \ldots, \mu_s \geq 0$. Ahora vamos a probar que hay una solución de la ecuación

$$q = (\mu_1, \ldots, \mu_s) \cdot R$$

con $\mu_1, \ldots, \mu_s > 0$. Para ello, utilizamos la notación siguiente

$$R = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

es decir, $f_1, \ldots, f_m$ son las filas de la matriz de dividendos, R. Sea

$$C = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i : \lambda_i \geq 0\}$$

y supongamos que

$$C = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i : \lambda_i \geq 0\}$$

siendo $f_1, \dots, f_n$ linealmente independientes. Entonces

$$f_{n+k} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k f_j, \qquad k = 1, 2, \dots, m-n$$

Lemma 2. Supongamos que

$$b = \sum_{s=0}^{n} \delta_s f_s \quad \text{con } \delta_s > 0.$$

Entonces, existe una solución de

$$b = \sum_{s=0}^{m} \mu_s f_s \quad \text{con } \mu_s > 0.$$

Demostración del lema 2: Consideramos

$$\begin{aligned} b - \varepsilon_1 f_{n+1} - \varepsilon_2 f_{n+2} - \dots - \varepsilon_{m-n} f_m &= \sum_{j=1}^{n} \delta_j f_j - \sum_{k=1}^{m-n} \varepsilon_k f_{n+k} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \delta_j f_j - \sum_{k=1}^{m-n} \varepsilon_k \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k f_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \delta_j f_j - \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m-n} \varepsilon_k \lambda_j^k \right) f_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\delta_j - \sum_{k=1}^{m-n} \varepsilon_k \lambda_j^k \right) f_j \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon_k > 0$ suficientemente pequeño, tenemos que para cada $j = 1, \dots, n$,

$$\alpha_j = \delta_j - \sum_{k=1}^{m-n} \varepsilon_k \lambda_j^k > 0$$

por lo que

$$b = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j + \sum_{k=1}^{m-n} \varepsilon_k f_{n+k}$$

con

$$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-n}, \alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$$

y el Lema queda demostrado.

Supongamos ahora que todas las soluciones de

$$q = \sum_{s=0}^{m} \mu_s f_s$$

con $\mu_s \geq 0$ verifican que alguno de ellos es cero. Por el Lema, suponer entonces que

$$q = \sum_{s=2}^{m} \mu_s f_s = \sum_{s=2}^{n} \delta_s f_s$$

(es decir, $\mu_1 = 0$). Elegimos ahora $z \neq 0$ que verifica

$$z \cdot f_l = 0, \quad l = 2, \dots, n$$

Esto es posible porque el sistema homogéneo es compatible indeterminado, ya que, por construcción, $z, f_l \in \mathbb{R}^k$, $\quad l = 2, \dots, n$ y $k > n$. Además, como $f_1, \dots, f_n$ son linealmente independientes, podemos elegir z tal que

$z \cdot f_1 \neq 0$. Podemos suponer, además que $z \cdot f_1 > 0$, (ya que si $z \cdot f_1 > 0$ reemplazamos z por $-z$). Por tanto, elegimos $z \in \mathbb{R}^k$ tal que,

$$\begin{aligned} & z \cdot f_1 > 0 \\ & z \cdot f_l = 0, \quad l = 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Como se verifica que

$$f_{n+k} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k f_j, \quad k = 1, 2, \ldots, m-n, \quad \text{con } \lambda_j^k f_j \geq 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} & z \cdot f_1 > 0 \\ & z \cdot f_l = 0, \quad l = 2, \ldots, n \\ & z \cdot f_l \geq 0, \quad l = n+1, \ldots, m \end{aligned}$$

por lo que

$$z \cdot q = \sum_{l=2}^{n} \delta_l z \cdot f_l = 0$$

y tenemos que

$$z \cdot f_j = \begin{cases} > 0 & \text{si } j = 1, \\ = 0 & \text{si } j = 2, \ldots, n \\ = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k z \cdot f_i \geq 0 & \text{si } j = n+k,\ k = 1 \ldots, m-n \end{cases}$$

por lo que la cartera z es una oportunidad de arbitraje. □

Demostración de $\Leftarrow$: Supongamos que $z = (z_1, \ldots, z_k)$ es una cartera tal que $Rz > 0$, entonces

$$qz = (\mu_1, \ldots, \mu_s) Rz > 0$$

porque $\mu_1, \ldots, \mu_s \geq 0$ y alguno de ellos no es nulo. Por lo tanto, no puede haber arbitraje en la economía. □

Ejemplo 23. Consideremos dos activos, $r_1 = (1,2)$ y $r_2 = (2,1)$ con precios, respectivamente, $q_1 = 2$ y $q_2 = 1$. La ecuación 5.1 es

$$\begin{aligned} \mu_1 + 2\mu_2 &= 2 \\ 2\mu_1 + \mu_2 &= 1 \end{aligned}$$

cuya solución es $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$. Vamos a encontrar una cartera, $z = (z_1, z_2)$, de arbitraje. Esta cartera debe verificar las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2z_1 + z_2 &= 0 \\ z_1 + 2z_2 &\geq 0 \\ 2z_1 + z_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

y vemos que $z_1 = -1$, $z_2 = 2$ verifica estas ecuaciones y por tanto es una cartera de arbitraje.

A partir de ahora, supondremos que se verifican las hipótesis de la proposición anterior y vamos a estudiar las consecuencias de la fórmula 5.1.

Ejemplo 24. Consideremos de nuevo la estructura de activos $r_1 = (1,1), r_2 = (3+\alpha, 1-\alpha)$ con $\alpha > 0$ bajo los precios $q_1 = 1$, q_2. Y vamos a valorar de nuevo la opción de compra

$$r_2(c) = (3 + \alpha - c, 0)$$

En primer lugar, con la condición de no arbitraje podemos encontrar $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3+\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\mu_1 + \mu_2 = 1$$
$$(3+\alpha)\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 = q_2$$

Hay una única solución

$$\mu_1 = \frac{q_2 + \alpha - 1}{2 + 2\alpha}$$
$$\mu_2 = 1 - \mu_1$$

La condición de no arbitraje implica que $\mu_1 > 0, >\geq 0$, es decir

$$1 > \frac{q_2 + \alpha - 1}{2 + 2\alpha} > 0$$

de donde $1 - \alpha > q_2 > 3 + \alpha$.

Ahora utilizamos la fórmula 5.1 para valorar $r_2(c)$. Obtenemos

$$\begin{aligned} q_2 &= \mu_1(3 + \alpha - c) + \mu_2 \cdot 0 \\ &= \frac{3 + \alpha - c}{2 + 2\alpha}(q_2 - 1 + \alpha) \end{aligned}$$

que coincide con el precio obtenido por el otro método (claro).

Volvamos ahora a la expresión 5.1

$$q_j = \sum_s \mu_s r_{sj}$$

Sea $\mu_0 = \sum_s \mu_s > 0$ y definimos $Q_s = \frac{\mu_s}{\mu_0}$ $s = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Claramente,

$$\begin{aligned} &Q_s \geq 0 \\ &\sum_s Q_s = 1 \qquad\qquad s = 0, 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

por lo que $Q = (Q_1, \ldots, Q_s)$ pueden interpretarse como unas probabilidades. Se llaman las **probabilidades de riesgo neutro**.

Dividiendo la ecuación 5.1 por μ_0 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{q_j}{\mu_0} &= \sum_s \frac{\mu_s}{\mu_0} r_{sj} \\ &= \sum_s Q_s r_{sj} \\ &= E_Q[r_k] \end{aligned}$$

donde $E_Q[r_k]$ es el valor esperado del activo r_k bajo la distribución de probabilidades $Q = (Q_1, \ldots, Q_s)$. Obtenemos

$$q_k = \mu_0 E_Q[r_k]$$

definiendo la tasa de interés r como $\mu_0 = \frac{1}{1+r}$ obtenemos la importante fórmula

$$q_j = \frac{1}{1+r} E_Q[r_j]$$

Un caso particular, especialmente importante es cuando existe un activo de la forma

$$r_j = (\beta, \beta, \ldots, \beta) = \beta(1, 1, \ldots, 1)$$

en este caso

$$q_j = \frac{1}{1+r} E_Q[r_j] = \frac{\beta}{1+r}$$

es decir $1 + r = \frac{\beta}{q_j}$ dónde β es el dividendo que paga el activo (seguro) r_j independientemente del estado.

Una observación importante es que la solución de la ecuación 5.1 es única si y sólo si los mercados son completos. Pero si un activo es de la forma $d = \alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_k r_k$ podemos utilizar la fórmula

$$\begin{aligned} \varphi(d) &= \text{precio del activo } d \\ &= \frac{1}{1+r} E_Q[d] \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde $Q = (Q_1, \ldots, Q_s)$ ha sido obtenido de la forma anterior. Puede haber varias soluciones pero todas dan lugar al mismo valor $\varphi(d)$.

Ejemplo 25. Supongamos

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

con precios $q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 7$. Vemos que $r_1 = (1,1,1)$ y por tanto, $1 + r = \frac{1}{q_1}$, es decir $r = 0$. Vamos a resolver el sistema

$$R^* \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = (1+r) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Obtenemos $Q_1 = \frac{1}{2} - 2Q_3, Q_2 = \frac{1}{2} + Q_3,\ 0 < Q_3 < \frac{1}{4}$ como $Q_1, Q_2, Q_3 > 0$, no hay arbitraje en la economía. Además, como la solución no es única, los mercados no son completos.

Consideremos el activo

$$d = (10, 4, 16)$$

su precio es

$$\begin{aligned} \varphi(d) &= \frac{1}{1+r} E_Q[d] \\ &= E_Q[d] \\ &= Q_1 d_1 + Q_2 d_2 + Q_3 d_3 \\ &= 10Q_1 + 4Q_2 + 16Q_3 \\ &= 10(\frac{1}{2} - 2Q_3) + 4(\frac{1}{2} + Q_3) + 16Q_3 \\ &= 5 - 20Q_3 + 2 + 4Q_3 + 16Q_3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

no depende de Q_3, esto significa que $d \in < r_1, r_2, r_3 >$ y por tanto, su valoración no depende de la elección de Q_1, Q_2, Q_3.

Las probabilidades de riesgo neutro se obtienen como solución del sistema

$$q = R^* \mu$$

donde las incógnitas son $\mu_1, \ldots, \mu_s$. Si no hay arbitraje, entonces el sistema tiene solución, y por el Teorema de Rouchée-Frobenius $\operatorname{rg} R = \operatorname{rg}(R|q)$. Si además los mercados son completos (es decir, si $\operatorname{rg} R = s$) la solución es única. Y si no hay arbitraje y los mercados son incompletos (es decir, $\operatorname{rg} R = \operatorname{rg}(R|q) < s$) entonces la solución no es única.

En el ejemplo anterior la valoración del activo d no depende de cómo se eligen las probabilidades de riesgo neutro. La proposición siguiente proporciona una relación entre no existencia de arbitrage y los precios de los activos.

Proposición 26. Supongamos que hay s estados y sea $R = (r_1, \ldots, r_k)$ la matriz de dividendos. Supongamos que no hay arbitraje y que se introduce un nuevo activo d.

1. Si d es una combinación lineal de los activos $r_1, \ldots, r_k$ entonces el resultado la fórmula 5.2 es independiente de la elección de las probabilidades de riesgo neutro y determina de forma única el único precio de ese activo que es compatible con que no haya arbitraje.
2. Si d no es una combinación lineal de los activos $r_1, \ldots, r_k$ entonces el resultado la fórmula 5.2 es depende de la elección de las probabilidades de riesgo neutro y para cada elección de estas probabilidades se obtiene un precio de ese activo que es compatible con que no haya arbitraje.

Corolario 27. Si los mercados son completos y que que no hay arbitraje entonces para cada activo d la fórmula 5.2 determina de forma única el único precio de ese activo que es compatible con que no haya arbitraje.