TEMA 2: ELECCIÓN BAJO INCERTIDUMBRE[1]

20 de octubre de 2015

Sea $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ un conjunto de sucesos. Una **lotería** sobre C es un vector $L = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $p_i \geq 0$ $i = 1, 2, \dots, n$ y $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Por tanto, $L = (p_1, \dots, p_n) \in \triangle^{n-1} = \{p \in \mathbb{R}^n_+ : p_1 + \cdots + p_n = 1\}$, el símplex de dimensión $n-1$. El espacio de loterías es $\mathcal{L} = \triangle^{n-1}$.

Dadas las loterías $L_1, \dots, L_k \in \mathcal{L}$ y las probabilidades $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$ con $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$, definimos la **lotería compuesta** $(L_1, \dots, L_k; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ como la lotería cuyo suceso $i = 1, 2, \dots, k$ es la lotería L_i con probabilidad α_i, $i = 1, 2, \dots, k$. La lotería reducida asociada a $L = (L_1, \dots, L_k; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ es

$$\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_k L_k \in \triangle^{n-1}$$

Ejemplos

Supongamos que hay una **relación de preferencias** $\succeq$ completa y transitiva, definida sobre $\mathcal{L}$. Vamos a estudiar propiedades razonables que una relación de preferencias $\succeq$ debería satisfacer.

H1: Axioma de continuidad: Se dice que $\succeq$ es continua si para cada $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$, los conjuntos

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L_1 + (1-\alpha) L_2 \succeq L_3\}$$
$$\{\alpha \in [0,1] : L_3 \succeq \alpha L_1 + (1-\alpha) L_2\}$$

son cerrados.

- Implicaciones del axioma de continuidad.

Observación 1. *Una consecuencia del axioma de continuidad es la siguiente. Supongamos que existen dos loterías $L_0, L_1 \in \mathcal{L}$ tales que para toda otra lotería $L \in \mathcal{L}$ se verifica que*

$$L_1 \succeq L \succeq L_0$$

(es decir, L_0, y L_1 son, respectivamente, la peor y la mejor lotería). Entonces, para cada lotería $L \in \mathcal{L}$, existe un número real $\alpha_L \in \mathcal{L}$ tal que

$$L \sim \alpha_L L_1 + (1-\alpha_L) L_0$$

H2: Axioma de independencia: La relación $\succeq$ satisface el axioma de independencia si para cada $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$ y $0 < \alpha < 1$ se verifica que

$$L_1 \succeq L_2 \Leftrightarrow \alpha L_1 + (1-\alpha) L_3 \succeq \alpha L_2 + (1-\alpha) L_3$$

- Justificación intuitiva
- Comparación con preferencias sobre consumo

Proposición 2. Supongamos que la relación de equivalencia sobre loterías $\succeq$ satisface H2. Entonces para cada $L_1, L_2, L_3, L_4 \in \mathcal{L}$ y $0 < \alpha < 1$ se verifica que

1. $L_1 \succ L_2 \Leftrightarrow \alpha L_1 + (1-\alpha) L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha) L_3$.
2. $L_1 \sim L_2 \Leftrightarrow \alpha L_1 + (1-\alpha) L_3 \sim \alpha L_2 + (1-\alpha) L_3$.
3. Si $L_1 \succ L_2$ y $L_3 \succ L_4$, entonces $\alpha L_1 + (1-\alpha) L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha) L_4$.

[1] Estas notas son una adaptación para esta clase del libro de A. Mas-Collell, M.D. Whinston y J.R. Green: Microeconomic Theory. Capítulo 6.

Demostración

1. Supongamos $L_1 \succ L_2$, entonces $L_1 \succeq L_2$ y, por H2, se verifica que $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succeq \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$. Veamos que la preferencia es estricta. En caso contrario, tendríamos que $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \sim \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$, con lo que $\alpha L_2 + (1-\alpha)L_3 \succeq \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3$ y por H2, entonces tendríamos que $L_2 \succeq L_3$ lo que contradice la hipótesis. Por tanto, $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$.

   ($\Leftarrow$) Supongamos $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$. Por H2, tenemos que $L_1 \succeq L_2$. De nuevo si $L_1 \sim L_2$ entonces $L_2 \succeq L_1$ y por H2, $\alpha L_2 + (1-\alpha)L_3 \succeq \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3$ que contradice la hipótesis. Por tanto, $L_1 \succ L_2$.
2. ($\Rightarrow$) Supongamos que $L_1 \sim L_2$. Entonces $L_1 \succeq L_2$ y $L_2 \succeq L_1$. Por H2 tenemos que
$$\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succeq \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$$
$$\alpha L_2 + (1-\alpha)L_3 \succeq \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3$$
   de donde $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \sim \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$.

   ($\Leftarrow$) Si $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \sim \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$, entonces $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succeq \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$ y $\alpha L_2 + (1-\alpha)L_3 \succeq \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3$. Aplicamos H2, obtenemos que
$$L_1 \succeq L_2, L_2 \succeq L_1$$
   por lo que $L_1 \sim L_2$.
3. Supongamos $L_1 \succ L_2$ y $L_3 \succ L_4$. Utilizando H2 y el apartado (1) de la proposición tenemos que
$$\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$$
   y
$$\alpha L_2 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_4$$
   Por transitividad, $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)L_4$.

Definición 3. *Una función $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ sobre loterías es una función de* **utilidad esperada del tipo de von Neumann-Morgenstern** *si existen $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ tales que*
$$U(p_1, \ldots, p_n) = v_1 p_1 + v_2 p_2 + \cdots + v_n p_n$$
En este caso U se llama una función de utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern.

Proposición 4. Una función de utilidad $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ está en forma de utilidad esperada si y sólo si $U(\sum_{j=1}^k \alpha_j L_j) = \sum_{j=1}^k \alpha_j U(L_j)$ para todo conjunto de loterías $L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{L}$ y números reales $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \geq 0$ tales que $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$.

Demostración: Supongamos que $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad esperada del tipo de Von Neumann-Morgenstern de la forma
$$U(p_1, \ldots, p_n) = v_1 p_1 + v_2 p_2 + \cdots + v_n p_n$$
Consideremos las loterías $L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{L}$ y las probabilidades $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \geq 0$ tales que $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$. Supongamos que
$$L_j = (p_1^j, \ldots, p_n^j) \qquad , j = 1, \ldots, k$$
Entonces,
$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j L_j = (p_1, \ldots, p_n)$$

con

$$p_l = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j p_l^j$$

por lo que

$$\begin{aligned} u(L) &= \sum_{l=1}^{n} p_l v_l \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j p_l^j \right) v_l \\ &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left(\sum_{l=1}^{n} p_l^j u_l \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u(L_j) \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $U(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j L_j) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j U(L_j)$ para todo conjunto de loterías $L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{L}$ y números reales $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \geq 0$ tales que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$. Consideramos las loterías

$$\begin{aligned} e_1 &= u(1, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= u(0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= u(0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

y definimos

$$\begin{aligned} v_1 &= u(e_1) \\ v_2 &= u(e_2) \\ &\vdots \\ v_n &= u(e_n) \end{aligned}$$

Dada una lotería $L = (p_1, \ldots, p_n)$ podemos representarla como

$$L = \sum_{j=1}^{k} p_j e_j$$

por lo que

$$U(L) = \sum_{j=1}^{k} p_j U(e_j) = \sum_{j=1}^{k} p_j v_j$$

Teorema 5 (Teorema de la utilidad esperada)**.** Sea $\succeq$ una relación de preferencias en el espacio de loterías $\mathcal{L}$. Entonces, $\succeq$ admite una representación por una función de utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern si y sólo si satisface los axiomas de continuidad e independencia.

<u>Demostración</u> (⇒) Supongamos que $\succeq$ admite una representación por una función de utilidad

$$U(p_1, \ldots, p_n) = v_1 p_1 + v_2 p_2 + \cdots + v_n p_n$$

y vamos a comprobar los axiomas H1, y H2.

En primer lugar comprobamos el **axioma de continuidad**. Consideramos las loterías

$$L_1 = (p_1, \ldots, p_n), \qquad L_2 = (q_1, \ldots, q_n), \qquad L_3 = (r_1, \ldots, r_n)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} U(\alpha L_1 + (1-\alpha) L_2) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha p_j + (1-\alpha) q_j\right) v_j = \\ & \alpha \sum_{j=1}^{n} \left(p_j - q_j\right) v_j - \sum_{j=1}^{n} q_j v_j \\ U(L_3) &= \sum_{j=1}^{n} r_j v_j \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \{\alpha \in [0,1] : \alpha L_1 + (1-\alpha) L_2 \ \succeq L_3\} &= \{\alpha \in [0,1] : u(\alpha L_1 + (1-\alpha) L_2) \geq u(L_3)\} \\ &= \{\alpha \in [0,1] : \alpha \sum_{j=1}^{n} \left(p_j - q_j\right) v_j \geq \sum_{j=1}^{n} (q_j + r_j) v_j\} \end{aligned}$$

que es un intervalo cerrado.

Ahora comprobamos el **axioma de independencia**. Consideramos las loterías

$$L_1 = (p_1, \ldots, p_n), \qquad L_2 = (q_1, \ldots, q_n), \qquad L_3 = (r_1, \ldots, r_n)$$

y $0 < \alpha < 1$. Si $L_1 \succeq L_2$, entonces $U(L_1) \geq U(L_2)$ es decir

$$\sum_{j=1}^{n} p_j u_j \geq \sum_{j=1}^{n} q_j u_j$$

por lo que

$$\alpha \sum_{j=1}^{n} p_j u_j + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{n} r_j u_j \geq \alpha \sum_{j=1}^{n} q_j u_j + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{n} r_j u_j$$

es decir,

$$\alpha L_1 + (1-\alpha) L_3 \succeq \alpha L_2 + (1-\alpha) L_3$$

y recíprocamente, por lo que se verifica el axioma de continuidad.

(⇐) Ahora suponemos que se verifican los axiomas de continuidad e independencia y tenemos que construir una función de utilidad de la forma

$$U(p_1, \ldots, p_n) = v_1 p_1 + v_2 p_2 + \cdots + v_n p_n$$

que representa a las preferencias.

Para simplificar la demostración, vamos a suponer que existen dos loterías L_0, L_1 tales que

$$L_0 \preceq L \preceq L_1$$

para toda lotería $L \in \mathcal{L}$. Notemos que si $L_0 \sim L_1$ entonces todas las loterías son indiferentes y es suficiente tomar la función $u(L) = cte$, por lo que podemos suponer que $L_1 \succ L_0$. Vamos a dividir la demostración en varios pasos: los lemas 6, 7, 8, 9, y 10, a continuación.

Lema 6. Si $L \succ L'$ y $\alpha \in (0,1)$, entonces $L \succ \alpha L + (1-\alpha)L' \succ L'$.

Demostración: Como $L \succ L'$, aplicando el axioma de independencia, tenemos que

$$L = \alpha L + (1-\alpha)L \succ \alpha L + (1-\alpha)L' \succ \alpha L' + (1-\alpha)L' = L'$$

Lema 7. Sean $\alpha, \beta \in [0,1]$. Entonces, $\beta L_1 + (1-\beta)L_0 \succ \alpha L_1 + (1-\alpha)L_0$ si y sólo si $\beta > \alpha$.

Demostración: Supongamos que $\alpha > \beta$. Como,

$$L_0 \leq \alpha L_1 + (1-\alpha)L_0 \leq \beta L_1 + (1-\beta)L_0 \leq L_1$$

Vemos que $\beta L_1 + (1-\beta)L_0$ está en el segmento que une $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_0$ con L_1, ya que, tomando $\gamma = \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} \in [0,1]$ tenemos que

$$\beta L_1 + (1-\beta)L_0 = \gamma L_1 + (1-\gamma)(\alpha L_1 + (1-\beta)L_0)$$

Como, por el lema 1, tenemos que $L_0 \prec \alpha L_1 + (1-\alpha)L_0 \prec L_1$ se sigue que

$$\begin{aligned}\alpha L_1 + (1-\alpha)L_0 &\prec \gamma L_1 + (1-\gamma)(\alpha L_1 + (1-\beta)L_0) = \\ &= \beta L_1 + (1-\beta)L_0 < L_1\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_0 < \beta L_1 + (1-\beta)L_0$. Queremos probar que $\alpha < \beta$. Supongamos que no es cierto, es decir $\alpha \geq \beta$. Si $\alpha = \beta$, entonces $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_0 \sim \beta L_1 + (1-\alpha)L_0$, que no es posible. Por tanto, $\alpha > \beta$ y, por el argumento anterior, $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_0 \succ \beta L_1 + (1-\alpha)L_0$. Contradicción. Por tanto, $\alpha \leq \beta$.

Lema 8. Para cada $L \in \mathcal{L}$, existe un único $\alpha_L \in [0,1]$ tal que $\alpha_L L_1 + (1-\alpha_L)L_0 \sim L$.

Demostración:

1. Existencia: Los conjuntos
$$A = \{\alpha \in [0,1] : \alpha L_1 + (1-\alpha_L)L_0 \sim L\}$$
y
$$B = \{\alpha \in [0,1] : L \succeq \alpha L_1 + (1-\alpha)L_0\}$$
son cerrados, $A \cup B = [0,1]$. Además $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ ya que $L_1 \in A$, $L_0 \in B$. Como el intervalo $[0,1]$ es convexo, se verifica que $A \cap B \neq \emptyset$. Claramente, si $\alpha \in A \cap B$, entonces $L \sim \alpha L_1 + (1-\alpha)L_0$.
2. Unicidad: Si $\alpha, \beta \in A \cap B$ con $\alpha > \beta$, entonces, por el lema 2 se verificaría que $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_0 \succ \beta L_1 + (1-\beta)L_0$; por lo que no es posible que $L \sim \alpha L_1 + (1-\alpha)L_0$ y $L \sim \beta L_1 + (1-\beta)L_0$.

Lema 9. Definimos $U : \mathcal{L} \to [0,1]$ como $U(L) = \alpha_L$ donde $\alpha_L L_1 + (1-\alpha_L)L_0 \sim L$.Entonces, U es una representación de $\succeq$.

Demostración: Sean $L, L' \in \mathcal{L}$; entonces $L \succeq L'$ si y sólo si $\alpha_L L_1 + (1-\alpha_L)L_0 \succeq \alpha_{L'} L_1 + (1-\alpha_{L'})L_0$ y por el lema 2, esto es equivalente a $\alpha_L \geq \alpha_{L'}$. Por tanto, U representa a $\succeq$.

Lema 10. La función de utilidad U definida en el lema 4 es lineal.

Demostración: Sean $L, L' \in \mathcal{L}$. Entonces $L \sim \alpha_L L_1 + (1-\alpha_L)L_0$ y $L' \sim \alpha_{L'} + (1-\alpha_{L'})L_0$. Aplicando el axioma de independencia tenemos que

$$\begin{aligned} \beta L + (1-\beta)L' \sim & \beta(\alpha_L L_1 + (1-\alpha_L)L_0) + (1-\beta)(\alpha_{L'} L_1 + (1-\alpha_{L'} L_0) = \\ & = (\beta\alpha_L + (1-\beta)\alpha_{L'})L_1 + (\beta - \alpha_L\beta + (1-\beta)(1-\alpha_{L'}))L_0 = \\ & = (\beta\alpha_L + (1-\beta)\alpha_{L'})L_1 + (1 - \beta\alpha_L - (1-\beta)\alpha_{L'})L_0 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} U(\beta L + (1-\beta)L') &= \beta\alpha_L + (1-\beta)\alpha_{L'} \\ &= \beta U(L) + (1-\beta)U(L') \end{aligned}$$

Ejemplo 11. *Supongamos que hay 4 sucesos $\{a, b, c, d\}$ y que $a \succeq b \succeq c \succeq d$. Si las preferencias, $\succeq$ del agente verifican los axiomas de continuidad e independencia, entonces podemos encontrar una función de utilidad de la forma*

$$u(p_1, p_2, p_3, p_4) = p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + p_4 v_4$$

que representa a las preferencias $\succeq$. Una forma de determina una de las funciones u que verifican esto es la siguiente: Definimos $v_1 = 1$, $v_4 = 0$. Para determinar v_2 y v_3, utilizamos el axioma de continuidad y encontramos $0 \leq \alpha_b, \alpha_c \leq 1$ tales que

$$\begin{aligned} b &\sim \alpha_b v_1 + (1-\alpha_b)v_4 = \alpha_b v_1 \\ c &\sim \alpha_c v_1 + (1-\alpha_c)v_4 = \alpha_c v_1 \end{aligned}$$

Elegimos ahora $v_2 = \alpha_b$ y $v_3 = \alpha_c$. la función de utilidad

$$u(p_1, p_2, p_3, p_4) = v_1 + \alpha_b p_2 + \alpha_c p_3$$

representa las preferencias $\succeq$.

Observación 12. *En el ejemplo anterior, llamando*

$$\begin{aligned} u(a) &= v_1 \\ u(b) &= v_2 \\ u(c) &= v_3 \\ u(d) &= v_1 4 \end{aligned}$$

es fácil comprobar que se verifica

$$\frac{u(a)-u(b)}{u(b)-u(d)} = \frac{1-\alpha_b}{\alpha_b} \qquad \frac{u(a)-u(c)}{u(c)-u(d)} = \frac{1-\alpha_c}{\alpha_c}$$

es decir, estos cocientes están determinados por α_b, α_c. Como α_b, α_c dependen sólo de las preferencias del agente y no de la representación de preferencias, estos cocientes coinciden para todas las funciones u, de tipo Von-Neumann-Morgenstern, que representen a las preferencias. (Aunque si la representación no es del tipo Von-Neumann-Morgenstern estos cocientes sí dependen de la representación).

Ejemplo 13. La paradoja de Allais.

LOTERÍA 1A

Premio	*Probabilidad*
1M e	*100 %*

LOTERÍA 1B

Premio	*Probabilidad*
1M e	*89 %*
0 e	*1 %*
5M e	*10 %*

LOTERÍA 2A

Premio	*Probabilidad*
0 e	*89 %*
1M e	*11 %*

LOTERÍA 2B

Premio	*Probabilidad*
0 e	*90 %*
5M e	*10 %*

Ejemplo 14. La paradoja de Ellsberg.

Una urna contiene 300 bolas, 100 de ellas son rojas y el resto (200) son azules o verdes.

- *Lotería A: Se saca una bola al azar y recibes 1.000 euros si (y sólo si) la bola es roja.*
- *Lotería B: Se saca una bola al azar y recibes 1.000 euros si (y sólo si) la bola es azul.*

- *Lotería C: Se saca una bola al azar y recibes 1.000 euros si (y sólo si) la bola NO es roja.*
- *Lotería D: Se saca una bola al azar y recibes 1.000 euros si (y sólo si) la bola NO es azul.*

Ejemplo 15. Efectos "framing".

EXPERIMENTO 1

España se prepara para la aparición de una enfermedad inusual que se espera produzca la muerte de 600 personas. Se han propuesto dos programas alternativos para combatir la enfermedad. Las consecuencias de cada uno de ellos son:

- **Programa A:** *Se salvan 200 personas.*

- **Programa B:** *Con probabilidad 1/3 se salvan 600 personas y con probabilidad 2/3 no se salva nadie.*

EXPERIMENTO 2

España se prepara para la aparición de una enfermedad inusual que se espera produzca la muerte de 600 personas. Se han propuesto dos programas alternativos para combatir la enfermedad. Las consecuencias de cada uno de ellos son:

- **Programa C:** *Mueren exactamente 400 personas.*

- **Programa D:** *con probabilidad 2/3 mueren 600 personas y con probabilidad 1/3 no muere nadie.*

- Aplicaciones del Teorema de la utilidad esperada. Ejemplos.

Observación 16. Justificación del Axioma de independencia.

Supongamos que un agente tiene unas preferencias tales que $L \succ L_1$*,* $L \succ L_2$ *pero, no verifica el axioma de independencia y, para algún* $0 < \alpha < 1$ *tenemos que* $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2 \succ L$*.*

En ese caso, podemos hacer lo siguiente: Le regalamos la lotería L*. A continuación y antes de jugar la lotería* L*, le pedimos una cantidad positiva por la posibilidad de intercambiarla por la lotería* $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2$*. El agente acepta para una cantidad suficientemente pequeña, ya que* $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2 \succ L$*.*

En el primer paso de la lotería $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2$*, el agente obtiene, o bien la lotería* L_1 *o bien la lotería* L_2*. Antes de jugar la lotería obtenida le pedimos una cantidad positiva por la posibilidad de intercambiarla por la lotería* L*. El agente, de nuevo acepta para alguna cantidad, ya que prefiere* L*. En este momento, el agente ha pagado dos veces y vuelve a estar como al principio, con la lotería* L*.*

1. Loterías sobre Dinero y Aversión al Riesgo

1.1. Integral de Riemann-Stieltjes: Ahora vamos a estudiar una forma de escribir las funciones de utilidad

$$u(p_1, \dots, p_n) = u_1 p_1 + u_2 p_2 + \cdots + u_n p_n$$

que es al mismo tiempo válida cuando hay un continuo de posibles estados. Dada una lotería L vamos a escribir la función de utilidad anterior como

$$u(L) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\, dF(x)$$

donde F es la función de distribución de la lotería L. La idea básica es utilizar integración por partes.

Recordemos que si Z es una variable aleatoria y

$$F(x) = \text{prob}\{y : Z(y) \le x\})$$

es la función de distribución de$Z$, entonces se verifica que

- $F(x)$ es no decreciente
- $F(x)$ es continua por la derecha: $\lim_{x \to p+} F(x) = F(p)$.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Utilizando estas propiedades podemos calcular la fórmula de integración por partes para calcular la **integral de Riemann-Stieltjes**

$$\int_a^b v\, dF$$

como

$$\int_a^b v\, dF = vF|_a^b - \int v' F dt$$

en el caso en que v sea un función derivable.

Observación 17. Si la función v es integrable y la función F tiene una derivada continua entonces,

$$\int_a^b v\,dF = \int_a^b v(x)F'(x)\,dx$$

Observación 18. Si la función F es constante en el intervalo $[a,b]$ y la función v tiene una derivada continua en un intervalo abierto que contiene al intervalo $[a,b]$, entonces,

$$\int_a^b v\,dF = 0$$

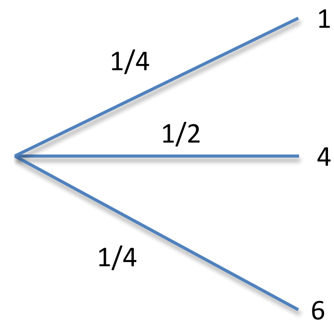
Observación 19. Supongamos que la función v tiene una derivada continua en un intervalo abierto que contiene al intervalo $[a,b]$. Sea $a < c < b$. Definimos

$$F(x) = \begin{cases} m & \text{Si } a \leq x < c \\ n & \text{Si } c < x \leq b \end{cases}$$

Entonces

$$\int_a^b v\,dF = v(c)\,(n-m)$$

Ejemplo 20. Consideremos la lotería L de la figura



La función de distribución se calcula fácilmente y es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/4 & 1 \leq x < 4 \\ 3/4 & 4 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

entonces

$$\int_a^b v(t) dF(t) = v(b)F(b) - v(a)F(a) - \int_a^b v'(t)F(t)dt$$

Supongamos $b > 6$ $a < 1$. Entonces $F(b) = 1, F(a) = 0$ por lo que

$$\begin{aligned}
\int_a^b v(t)\, dF(t) &= v(b) - \int_a^1 v'(t)F(t)dt - \int_1^4 v'(t)F(t)dt - \int_4^6 v'(t)F(t)dt - \int_6^b v'(t)F(t)dt \\
&= v(b) - \frac{1}{4}\int_1^4 v'(t)dt - \frac{3}{4}\int_4^6 v'(t)dt - \int_6^b v'(t)dt \\
&= u(b) - \frac{1}{4}(v(4) - v(1)) - \frac{3}{4}(v(6) - v(4)) - (v(b) - v(6)) \\
&= \frac{1}{4}v(1) + \frac{1}{2}v(4) + \frac{1}{4}v(6) = U(L)
\end{aligned}$$

Proposición 21 (Desigualdad de Jensen)**.** Supongamos que F es una función de distribución y v es cóncava. Entonces,

$$\int_a^b v(t) d\, F(t) \leq v\left(\int_a^b t d\, F(t)\right)$$

Recíprocamente, si se verifica que

$$\int_a^b v(t) d\, F(t) \leq v\left(\int_a^b t d\, F(t)\right)$$

para toda función de distribución F tal que $F(a) = 0$, $F(b) = 1$, entonces, v es cóncava en el intervalo $[a, b]$.

En la proposición anterior, se permite que $a = -\infty$, $b = \infty$.

1.2. Aversión al riesgo. A partir de ahora, supondremos que los agentes tienen preferencias sobre loterías monetarias determinadas la manera siguiente: El agente tiene una función de utilidad creciente $v(t)$, sobre **cantidades monetarias** t. Suponiendo que se verifican las hipótesis del Teorema de la Utilidad Esperada, la función v induce una preferencia sobre **loterías**,

$$U(F) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)dF(t)$$

donde F es la función de distribución de la lotería. A la función $v(t)$ le llamaremos la **función de utilidad de Bernoulli**. Supondremos que v es creciente y derivable.

Definición 22. Un agente $v(t)$ es **averso al riesgo** si

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)dF(t) \leq v(\int_{-\infty}^{\infty} tdF(t))$$

para todas las loterías F.

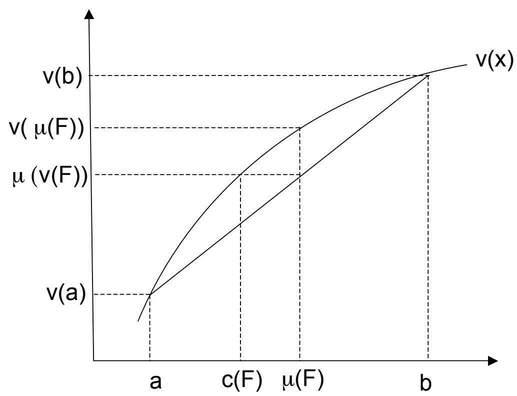
Definición 23. Dada una función de Bernouilli v y una lotería F, **el equivalente cierto**, $c(F, v)$, se define por la ecuación

$$v(c(F, v)) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)dF(t)$$

Proposición 24. Consideremos un agente con función de utilidad de Bernouilli definida por $v(t)$. Entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes :

1. El agente es averso al riesgo
2. $v(t)$ es cóncava
3. $c(F, v) \leq \int_{-\infty}^{\infty} t\, dF(t)$ para toda lotería F.

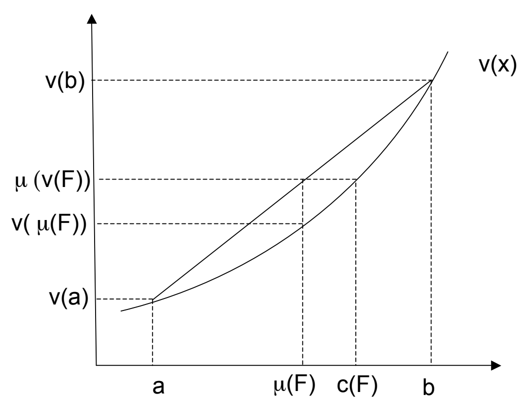
Demostración: La proposición se ilustra en el siguiente gráfico.
©



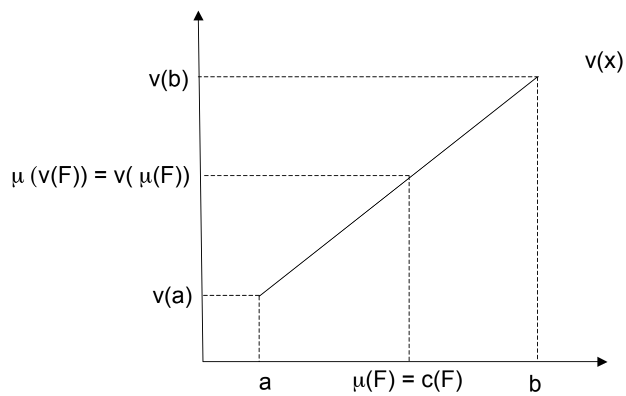
La equivalencia entre (i) y (ii) es la desigualdad de Jensen. Veamos que (i) $\Leftrightarrow$ (iii). Sea F una lotería, entonces v es averso al riesgo $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} v(t)dF(t) \leq v(\int_{-\infty}^{\infty} tdF(t))$ $\Leftrightarrow v(c(F,v)) \leq v(\int_{-\infty}^{\infty} tdF(t)) \Leftrightarrow c(F,v) \leq \int_{-\infty}^{\infty} tdF(t)$, ya que v es creciente.

Definición 25. Un agente es

1. **favorable al riesgo** si $\int_{-\infty}^{\infty} v(t)dF(t) \geq v(\int_{-\infty}^{\infty} tdF(t))$ para toda lotería F.

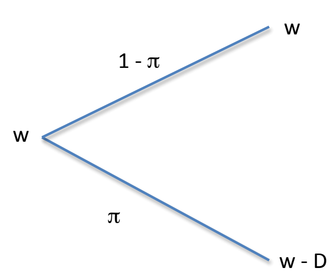


2. **neutral al riesgo** si $\int_{-\infty}^{\infty} v(t)dF(t) = v(\int_{-\infty}^{\infty} tdF(t))$ para toda lotería F.

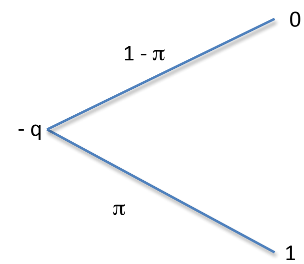


Ejemplo 26. Un agente averso al riesgo tiene una riqueza inicial de w, pero puede perder D u.m. con probabilidad π. Puede comprar un seguro a un precio unitario de q, por unidad monetaria asegurada. Determinar la cantidad de seguro comprada por el agente.

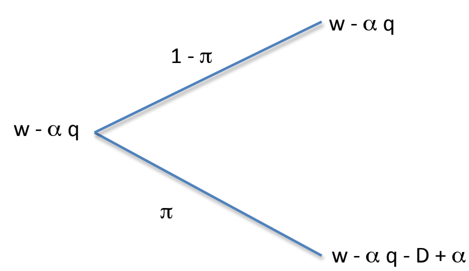
Solución: La situación del agente está representada en la Figura siguiente.



La riqueza esperada es $(1-\pi)w + \pi(w-D) = w - \pi D$. La Figura



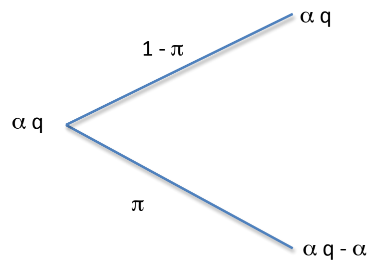
muestra la situación que ofrece el seguro por cada unidad monetaria asegurada, por lo que si el agente comprara α unidades del seguro, se encontraría en la situación siguiente



En este caso, la riqueza esperada es $(1-\pi)(w-\alpha q)+\pi(w-\alpha q-D+\alpha) = w-\pi D+\alpha(\pi-q)$. El seguro es **actuarialmente justo** si esta esperanza coincide con la esperanza sin seguro, es decir, si ocurre que

$$w-\pi D = w-\pi D+\alpha(\pi-q)$$

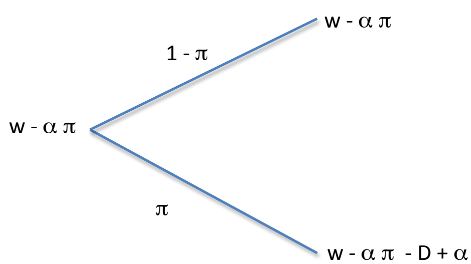
o lo que es lo mismo, si $q=\pi$. Supongamos que se verifica esto. En este caso, la situación para la empresa aseguradora es la siguiente



Por lo que su ganancia esperada es

$$(1-\pi)\alpha q + \pi(\alpha q - \alpha) = \alpha(q-\pi)$$

que es 0 si y sólo si $q = \pi$, es decir si y sólo si el seguro es actuarialmente justo. Tomando ahora $q = \pi$, tenemos que, desde el punto de vista del agente, la situación es



Supongamos que el agente tiene utilidad esperada

$$U(\alpha) = (1-\pi)v(w-\alpha\pi) + \pi v(w-\alpha\pi-D+\alpha)$$

siendo v una función creciente y cóncava (porque el agente es averso al riesgo). La función v es la utilidad del agente en cantidades monetarias. El problema del agente es

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & (1-\pi)v(w-\alpha\pi) + \pi v(w-\alpha\pi-D+\alpha) \\ \text{s.a.} & \alpha \geq 0 \end{array}$$

y la condición de Kuhn-Tucker es

$$-\pi(1-\pi)v'(w-\alpha^*\pi) + (1-\pi)\pi v'(w-\alpha^*\pi-D+\alpha^*) \leq 0$$

con igualdad si $\alpha^* > 0$.

¿Puede ocurrir que $\alpha^* = 0$? En este caso, tendríamos que

$$\pi(1-\pi)v'(w-D) \leq \pi(1-\pi)v'(w)$$

y como $v' > 0$, esto es lo mismo que

$$v'(w-D) \leq v'(w)$$

. Como v es cóncava (y por lo tanto v' es decreciente) deducimos que

$$w - D \geq w$$

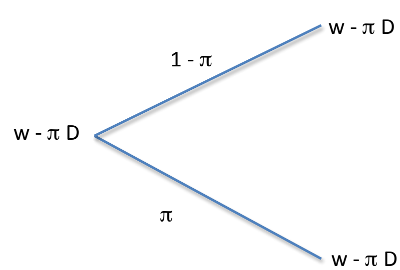
lo cual no es posible (si $D > 0$). Como llegamos a una contradicción, concluimos que $\alpha^* > 0$ y la condición de primer orden se reduce a

$$v'(w - \alpha^*\pi) = v'(w - \alpha^*\pi - D + \alpha)$$

es decir $w - \alpha^*\pi = w - \alpha^*\pi - D + \alpha^*$. De donde, la cantidad de seguro comprada es

$$\alpha^* = D$$

Notemos que el agente se asegura completamente, es decir con $\alpha^* = D$ su situación es la siguiente



El consumo es el mismo en todos los estados posibles. No hay riesgo. Un agente averso al riesgo hará esta elección,cuando sea posible.

Ejemplo 27. Demanda de un activo con riesgo: Se considera que un activo es un derecho a unos pagos estipulados (positivos o negativos) en el futuro. Supongamos que un agente averso al riesgo puede elegir entre dos activos. Un activo sin riesgo, que paga una unidad monetaria en cada estado de la naturaleza y un activo con riesgo, que identificamos con un lotería, cuya función de distribución es $F(z)$. Suponemos que

$$\int z\, dF(z) > 1$$

es decir, el pago esperado con el activo de riesgo es mayor que con el activo seguro. Probar que el agente, compra una cantidad positiva del activo con riesgo.

Solución: Supongamos que la riqueza inicial es w. Sea α la cantidad de activo de riesgo que compra y β la cantidad de activo seguro que compra. Supongamos que el precio de ambos activos es 1. Entonces, la restricción presupuestaria es

$$\alpha + \beta = w$$

y la riqueza esperada es $\int(\alpha z + \beta)dF(z)$. La función de utilidad del agente es

$$V(\alpha, \beta) = \int v(\alpha z + \beta)dF(z)$$

(Suponemos utilidad esperada). El problema de elección de la cartera es

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & V(\alpha, \beta) \\ \text{s.a.} \quad & \alpha + \beta = w \\ & \alpha, \beta \geq 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo $\beta = w - \alpha$, el problema anterior es equivalente a

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \displaystyle\int v(\alpha z - \alpha + w) dF(z) \\ \text{s.a.} & 0 \le \alpha \le w \end{array}$$

Sea la función $\varphi(\alpha) = \int v(\alpha z - \alpha + w)\, dF(z)$. Derivando la función objetivo φ, obtenemos

$$\varphi'(\alpha) = \int (z-1) v'(\alpha z - \alpha + w)\, dF(z)$$
$$\varphi''(\alpha) = \int (z-1)^2 v''(\alpha z - \alpha + w)\, dF(z) < 0$$

porque $(z-1)^2, v'' < 0$ (ya que v es cóncava). Vemos que la función objetivo es cóncava, por lo que las condiciones de primer orden son suficientes para determinar la solución del problema. Estas condiciones son

$$\begin{array}{ll} \varphi'(\alpha^*) = 0 & \text{si } 0 < \alpha^* < w \\ \varphi'(\alpha^*) \ge 0 & \text{si } \alpha^* = w \\ \varphi'(\alpha^*) \le 0 & \text{si } \alpha^* = 0 \end{array}$$

¿Puede ocurrir que $\alpha^* = 0$? Veamos qué pasaría si $\alpha^* = 0$. En este caso, tendríamos que

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \int (z-1) v'(w)\, dF(z) \\ &= v'(w) \int (z-1)\, dF(z) \\ &= v'(w) \left(\int z\, dF(z) - 1 \right) \le 0 \end{aligned}$$

de donde, $\int z\, dF(z) \le 1$, ya que $v'(w) > 0$.

Pero esto contradice que $\int z\, dF(z) > 1$, como habíamos asumido. Por tanto, $\alpha^* > 0$. El agente averso al riesgo aceptaría una cantidad positiva de riesgo, si el pago esperado del activo de riesgo es mayor que el pago del activo seguro.

2. Medidas de Aversión al Riesgo

Sea un agente con preferencias $v(x)$ sobre cantidades monetarias. Definimos los coeficientes de **aversión**

1. **absoluta** al riesgo de Arrow-Pratt : $R_A(x) = -\frac{v''(x)}{v'(x)} = R_A(x, v)$
2. **relativa** al riesgo : $R_r(x) = -x\frac{v''(x)}{v'(x)} = R_r(x, v)$

Observemos que un agente $v(x)$ es:

- averso al riesgo $\Leftrightarrow$ v es cóncava $\Leftrightarrow v'' \le 0 \Leftrightarrow \forall x,\ R_A(x) \ge 0$.
- neutral al riesgo$\Leftrightarrow v'' = 0 \Leftrightarrow \forall x,\ R_A(x) = 0$.
- favorable al riesgo $\Leftrightarrow v'' \ge 0 \Leftrightarrow \forall x,\ R_A(x) \le 0$.

Ejemplo 28. Calcular el coeficiente de aversión absoluta al riesgo de la función de utilidad $v(x) = -e^{-ax}$ con $a > 0$

Solución: $v'(x) = ae^{-ax},\ ; v''(x) = a^2 e^{-ax}$ por lo que

$$R_A(x, v) = R_A(x) = -\frac{v''(x)}{v'(x)} = a > 0$$

En este caso se dice que el agente presenta aversión absoluta al riesgo constante.

Ejemplo 29. Calcular el coeficiente de aversión relativa al riesgo de un agente con función de utilidad $v(x) = (1-\epsilon)x^{1-\epsilon},\ ; \epsilon > 0$.

Solución: $v'(x) = (1-\epsilon)^2 x^{-\epsilon},\ v''(x) = -\epsilon(1-\epsilon)^2 x^{-\epsilon-1}$

Por tanto,

$$R_r(x) = -x\frac{v''(x)}{v'(x)} = \frac{\epsilon(1-\epsilon)^2 x^{-\epsilon-1}}{(1-\epsilon)^2 x^{-\epsilon}} x = \epsilon > 0$$

En este ejemplo, decimos que el agente presenta aversión relativa al riesgo constante.

2.1. Interpretación de la aversión absoluta al riesgo.

Proposición 30. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $R_A(x, v_2) \geq R_A(x, v_1) \forall x \in \mathbb{R}$
2. Existe una función ψ creciente y cóncava tal que $v_2(x) = \psi(v_1(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (Es decir v_2 es "más cóncava" que v_1)
3. Si para alguna lotería F y algún $\bar{x} \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\int v_2\, dF \geq v_2(\bar{x})$$

entonces también se verifica que

$$\int v_1\, dF \geq v_1(\bar{x})$$

4. $c(F, v_2) \leq c(F, v_1)$, para toda lotería F.

Nota 1: En cualquiera de los casos de la proposición anterior, se dice que v_2 es más averso al riesgo que v_1.

Nota 2: El equivalente cierto $c(F, u)$, de una función de utilidad v respecto una lotería F se define como el único número real $c(F, u) \in \mathbb{R}$, que verifica

$$v(c(F, u)) = \int v(x) dF(x)$$

Observemos que un agente es averso al riesgo, si y sólo si

$$c(F, u) \leq \int x dF(x)$$

para toda lotería F. Ya que, como v es creciente, tenemos que

$$c(F, u) \leq \int x\, dF \Leftrightarrow v(c(F, u)) \leq v(\int x\, dF) \Leftrightarrow \int v(x)\, dF \leq v(\int x\, dF)$$

Ejemplo 31. Supongamos que en el ejemplo 27 hay dos agentes aversos al riesgo $v_1,\ v_2$. Supongamos que v_2 es más averso al riesgo que v_1. Probar que v_1 compra más cantidad del activo de riesgo que v_1.

Solución: Sean

$$\varphi_1(\alpha_1) = \int v_1(\alpha_1 z - \alpha_1 + w)\, dF(z)$$

$$\varphi_2(\alpha_2) = \int v_2(\alpha_2 z - \alpha_2 + w)\, dF(z)$$

Y sean α_1^*, α_2^* las cantidades de activo riesgo, demandadas por los agentes (respectivamente) v_1, v_2. Supongamos que son soluciones interiores.Entonces, igual que en el ejemplo 2, tenemos que

$$0 = \varphi_1'(\alpha_1^*) = \int (z-1) v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)\, dF(z)$$

$$0 = \varphi_2'(\alpha_2^*) = \int (z-1) v_2'(\alpha_2^* z - \alpha_2^* + w)\, dF(z)$$

(Suponemos que ambos tienen la misma riqueza inicial).

Como v_2 es más averso al riesgo que v_1, existe una función ψ creciente y cóncava (es decir, $\psi' > 0$ y ψ' es decreciente) tal que $v_2(x) = \psi(v_1(x))$. Utilizando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\varphi_2'(\alpha_2) &= \frac{d}{d\alpha_1} \int \psi(v_1(\alpha_2 z - \alpha_2 + w)) dF(z) \\ &= \int (z-1) \psi'(v_1(\alpha_2 z - \alpha_2 + w)) v_1'(\alpha_2 z - \alpha_2 + w) dF(z)\end{aligned}$$

Vamos a probar que $\varphi_2'(\alpha_1^*) < 0$. En primer lugar, observamos que, como $\varphi_1'(\alpha_1^*) = 0$, entonces

$$\int (z-1) v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_2^* + w) dF(z) = 0$$

Analizaremos ahora el signo de

$$\begin{aligned}\varphi_2'(\alpha_1^*) &= \int_0^\infty (z-1)\psi'(v_1(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)) v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)\, dF(z) \\ &= \int_0^1 (z-1)\psi'(v_1(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)) v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)\, dF(z) + \\ &+ \int_1^\infty (z-1)\psi'(v_1(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)) v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)\, dF(z)\end{aligned}$$

Llamemos A al primer sumando y B al segundo. Observemos ahora que, como ψ es cóncava y v_1 es creciente, entonces ψ' es decreciente y la función

$$z \longrightarrow \psi'(v_1(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w))$$

es decreciente en Z.

Vemos que si $z < 1$ entonces

$$\psi'(v_1(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)) \geq \psi'(v_1(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w))|_{z=1} = \psi'(v_1(w)) > 0$$

Entonces, si $z \leq 1$ (y por tanto $z - 1 \leq 0$) se verifica que

$$(z-1)\psi'(v_1(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)) v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w) \leq (z-1)\psi'(v_1(w)) v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)$$

y vemos que

$$\begin{aligned}A &\leq \int_0^1 (z-1)\psi'(v_1(w)) v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w))\, dF(z) \\ &= \psi'(v_1(w)) \int_0^1 (z-1) v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)\, dF(z)\end{aligned}$$

Análogamente, si $z \geq 1$, entonces, $\psi'(v_1(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)) \leq \psi'(v_1(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w))|_{z=1} = \psi(v_1(w))$ y como $z - 1 \geq 0$, vemos que

$$\begin{aligned} B &= \int_1^\infty (z-1)\psi'(v_1(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w))v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)\, dF(z) \\ &\leq \psi'(v_1(w)) \int_1^\infty (z-1)v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)\, dF(z) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \varphi_2'(\alpha_1^*) = A + B < \psi'(v_1(w))[&\int_0^1 (z-1)v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)\, dF(z) + \\ &+ \int_1^\infty (z-1)v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)\, dF(z)] = \\ &= \psi'(v_1(w)) \int_0^\infty (z-1)v_1'(\alpha_1^* z - \alpha_1^* + w)\, dF(z) = \\ &= \psi'(v_1(w))\varphi_1'(\alpha_1^*) = 0 \end{aligned}$$

Concluimos que $v_2'(\alpha_1^*) < 0 = \varphi_2'(\alpha_2^*)$ y como φ_2' es decreciente (porque φ_2''), concluimos que $\alpha_1^* > \alpha_2^*$.

Es decir, el agente más averso al riesgo compra menos del activo de riesgo que el otro agente menos averso al riesgo.

Ejemplo 32. Consideremos un agente con función de utilidad $v(x)$ sobre cantidades monetarias y preferencias

$$v(F) = \int v(z)\, dF(z)$$

sobre loterías. Supongamos que puede elegir entre dos activos

(i) un activo de riesgo con precio unitario q y que paga $r(z)$ u.m. por unidad de activo, según el estado que ocurra.

(ii) un activo sin riesgo con precio unitario 1 y que paga R u.m. por cada activo comprado, independientemente del estado que ocurra.

Es decir, si el agente compra α unidades del activo (i) y β unidades del activo (ii), entonces

paga $\alpha q + \beta$

recibe $r(z)\alpha + R\beta$ si ocurre el estado Z.

Por tanto, dado que el agente tiene una riqueza inicial w elige α y $\beta = w - \alpha q$ que maximizan

$$\int v(r(z)\alpha + R\beta) dF(z) = \int v(r(z)\alpha + Rw - \alpha Rq)\, dF$$

Sea $\alpha(w)$ la solución de este problema y supongamos que es interior, por lo que verifica la relación de primer orden

$$\varphi'(\alpha(w)) = \int v'(\alpha(w)r(w) + Rw - \alpha(w)Rq)(r(z) - Rq)\, dF(z) = 0$$

Se comprueba fácilmente que $\varphi''(\alpha(w)) \leq 0$, por lo que la función

$$\varphi(\alpha) = \int v(r(z)\alpha + Rw - \alpha Rq)\, dF(z)$$

es cóncava y las condiciones de primer orden determinan la solución. Recordemos que el coeficiente de aversión absoluta al riesgo es

$$R_a(x) = R_a(x, v) = -\frac{v''(x)}{v'(x)}$$

Vamos a probar la siguiente,

Proposición 33. Supongamos que v es averso al riesgo. Entonces,

1. $\alpha'(w) \geq 0 \Leftrightarrow R_a'(x) \leq 0$
2. $\alpha'(w) = 0 \Leftrightarrow R_a'(x) = 0$
3. $\alpha'(w) \leq 0 \Leftrightarrow R_a'(x) \geq 0$

Esto se interpreta de la siguiente forma: Por ejemplo (1) afirma que $\alpha(w)$ (= lo que un agente con riqueza w gasta en el activo de riesgo) es creciente en w si y sólo si $R_a(x)$ (=el coeficiente de aversión absoluta al riesgo) es decreciente. Etc.

Demostración: Las tres demostraciones son análogas. Vamos a hacer la de (1). Para simplificar la notación, escribiremos α, r y dF en lugar de $\alpha(w), r(w)$ y $dF(z)$.

Derivando implícitamente la ecuación $\varphi'(\alpha(w)) = 0$, respecto w, obtenemos

$$R \int v''(\alpha r + Rw - \alpha Rq)(r - Rq)\, dF + \int \alpha'(w) v''(\alpha t + Rw - \alpha Rq) r - Rq)^2\, dF = 0$$

Despejando $\alpha'(w)$ obtenemos

$$\alpha'(w) = \frac{-R \int v''(\alpha r + Rw - \alpha Rq)(r - Rq)\, dF}{\int v''(\alpha r + Rw - \alpha Rq)(r - Rq)^2\, dF}$$

El denominador es negativo, porque $v'' < 0$, ya que v es averso al riesgo. Vamos a determinar el signo del numerador.

Como $R_a(x) = \frac{-v''(x)}{v'(x)}$ podemos despejar $-v''(\alpha r + Rw - \alpha Rq) = v'(\alpha r + Rw - \alpha Rq) R_a(\alpha r + Rw - \alpha rq)$ en el numerador y obtenemos

$$-R \int v''(\alpha r + Rw - \alpha Rq)(r - Rq)\, dF =$$
$$= R \int v'(\alpha r + Rw - \alpha Rq) R_a(\alpha r + Rw - \alpha rq)(r - Rq)\, dF = A$$

Como $R < 0$ y $v'(\alpha r + Rw - \alpha Rq) > 0$, el signo de A depende del signo de $R_a(\alpha r + Rw - \alpha rq)(r - Rq)$.

Supongamos, por ejemplo, que $R_a'(x) \leq 0$. Entonces consideremos dos casos:

1. Si $r > Rq$, es decir $r - Rq > 0$ y por tanto $Rw + \alpha(r - Rq) > Rw$, y como R_a es decreciente (ya que $R_a' \leq 0$) tenemos que $R_a(Rw + \alpha(r - R_a)) \leq R_a(Rw)$ es decir, $R_a(\alpha r + Rw - \alpha Rq) \leq R_a(Rw)$. Y como $r - Rq > 0$, entonces

$$(r - Rq) R_a(Rw) \geq (r - Rq) R_a(\alpha r + Rw - \alpha Rq)$$

2. Si ocurre que $r - Rq < 0$, entonces $\alpha r + Rw - \alpha Rq = Rw + \alpha(r - Rq) < Rw$ y como R_a es decreciente, $R_a(\alpha r + Rw - \alpha Rq) \geq R_a(Rw)$. Utilizando que $r - Rq < 0$, vemos que, de nuevo,

$$(r - Rq) R_a(Rw) \geq (r - Rq) R_a(\alpha r + Rw - \alpha Rq)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
A &\leq R \int v'(\alpha r + Rw - \alpha Rq) R_a(Rw)(r - Rq)\, dF \\
&= R \cdot R_a(w) \int v'(\alpha r + Rw - \alpha Rq)(r - Rq)\, dF \\
&= R \cdot R_a(w) \cdot \varphi'(\alpha(w)) = 0
\end{aligned}$$

Recordando que, A es el numerador de $\alpha'(w)$ y que el denominador era negativo, obtenemos que $\alpha'(w) > 0$.

Ejemplo 34. Supongamos que hay $i = 0, 1, \ldots, n$ activos en la economía con dos periodos. En el periodo $t = 0$ el activo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ puede comprarse a un precio unitario q_i y en el periodo $t = 1$ paga una cantidad $r_i(z)$ que es una variable aleatoria con una función de distribución $F(z)$. Es decir, la probabilidad de que el activo i pague una cantidad menor o igual que $r_i(z)$ es $F(z)$. La riqueza inicial del agente es w_0. Supongamos que decide comprar α_i unidades del activo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Supongamos además que el activo $i = 0$ es un activo seguro que paga la cantidad constante R_0 en todos los estados. Por la igualdad presupuestaria,

$$w_0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i q_i$$

y en el periodo $t = 1$ la probabilidad de que su renta sea igual o menor que

$$W(z) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i r_i(z)$$

es $F(z)$. Definimos la fracción de la renta que el agente invierte en el activo i como

$$x_i = \frac{\alpha_i q_i}{w_0}$$

y el rendimiento total del activo i como

$$R_i(z) = \frac{r_i(z)}{q_i}$$

Entonces las ecuaciones anteriores se transforman en

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{n} x_i \\
W(z) &= w_0 \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{r_i(z)}{q_i} = w_0 \sum_{i=0}^{n} x_i R_i(z)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i \\
W(z) &= w_0 \left(x_0 R_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i R_i(z) \right) \\
&= w_0 \left((1 - \sum_{i=1}^{n} x_i) R_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i R_i(z) \right) \\
&= w_0 \left(R_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \left(R_i(z) - R_0 \right) \right) \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Suponiendo que el agente tiene unas preferencias sobre loterías compatibles con el Teorema de la Utilidad Esperada, su objetivo es elegir $x_1, \ldots, x_n$ de forma que maximizan la función

$$\int_{\mathbb{R}} v\left(W(z)\right) \, dF(z) \qquad (2.2)$$

Las condiciones de primer orden de este problema son

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \equiv \int_{\mathbb{R}} v'\left(W(z)\right) \left(R_i(z) - R_0\right) \, dF(z)$$

o lo que es lo mismo,

$$\int_{\mathbb{R}} v'\left(W(z)\right) R_i(z) \, dF(z) = R_0 \int_{\mathbb{R}} v'\left(W(z)\right) \, dF(z) \qquad (2.3)$$

Ahora introducimos la siguiente notación: si $X(z)$ es una variable aleatoria, su esperanza respecto de la función de distribución F es

$$E\left[X\right] = \int_{\mathbb{R}} X(z) \, dF(z)$$

y la covarianza de dos variables aleatorias X e Y es

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E\left[XY\right] - E\left[X\right] E\left[Y\right]$$

Recordemos que si X e Y son independientes entonces, $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. Aunque, $\operatorname{cov}(X, Y)$ no es una verdadera medida de la correlación entre las variables aleatorias X e Y.

Con este convenio, la ecuación 2.3 se convierte en

$$\operatorname{cov}\left(v'(W(z)), R_i(z)\right) + E\left[v'(W(z))\right] E\left[R_i\right] = R_0 E\left[v'(W(z))\right]$$

es decir,

$$E\left[R_i\right] = R_0 - \frac{1}{E\left[v'(W(z))\right]} \operatorname{cov}\left(v'(W(z)), R_i(z)\right)$$

El segundo término del miembro de la derecha es la prima de riesgo. Depende de la covarianza entre la utilidad marginal de la renta y el rendimiento de los activos.

Supongamos ahora que el rendimiento $R_i(z)$ del activo i está positivamente correlacionado con $W(z)$ (paga más cuando mayor es $W(z)$). Como $v'(t)$ es decreciente en t, entonces $R_i(z)$ está negativamente correlacionado con $v'(W(z))$ y su covarianza $\operatorname{cov}\left(v'(W(z)), R_i(z)\right)$ es negativa. Esto significa que $E\left[R_i\right] > R_0$. Este activo debe tener un rendimiento esperado mayor que el del activo sin riesgo.

Por otra parte, si el rendimiento $R_k(z)$ del activo k está negativamente correlacionado con $W(z)$ (paga más cuando menor es la renta del agente $W(z)$), entonces $R_k(z)$ está positivamente correlacionado con $v'(W(z))$ y la covarianza $\operatorname{cov}(v'(W(z)), R_k(z))$ es positiva. Por tanto, $E[R_k] < R_0$. Este activo tiene un rendimiento esperado menor que el del activo sin riesgo.

¿Cómo se interpreta esto? El activo k se puede utilizar para reducir el riesgo cuando la renta $W(z)$ es pequeña. Y, por tanto, un agente averso al riesgo está dispuesto a reducir su rendimiento esperado a cambio de asegurarse mejor en los estados en que su renta es menor.

Ejemplo 35. Supongamos que hay tres estados con probabilidades $p_1 = 3/4$, $p_2 = 1/8$, $p_3 = 1/8$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ y tres activos $R_0 = (1, 1, 1)$, $R_1 = (R(1), R(2), R(3)) = (3/2, 1/4, 0)$, $R_2 = (0, 0, r) = (0, 0, 6)$. El agente tiene una función de utilidad $\log x$ sobre cantidades monetarias x y riqueza inicial $w_0 = 1$.

En este caso, la ecuación 2.1 queda como

$$W(z) = \begin{cases} 1 + x_1(R(1) - 1) - x_2 & \text{si } z = 1 \\ 1 + x_1(R(2) - 1) - x_2 & \text{si } z = 2 \\ 1 + x_1(R(3) - 1) + x_2(r - 1) & \text{si } z = 3 \end{cases}$$

y la función de utilidad 2.2 del agente es

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) \quad &= p_1 \log(1 + x_1(R(1) - 1) - x_2) + p_2 \log(1 + x_1(R(2) - 1) - x_2) \\ &\quad + p_3 \log(1 + x_1(R(3) - 1) + x_2(r - 1)) \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} \frac{p_1(R(1) - 1)}{1 + x_1(R(1) - 1) - x_2} + \frac{p_2(R(2) - 1)}{1 + x_1(R(2) - 1) - x_2} + \frac{p_3(R(3) - 1)}{1 + x_1(R(3) - 1) + x_2(r - 1)} \quad &= 0 \\ -\frac{p_1}{1 + x_1(R(1) - 1) - x_2} - \frac{p_2}{1 + x_1(R(2) - 1) - x_2} + \frac{p_3(r - 1)}{1 + x_1(R(3) - 1) + x_2(r - 1)} \quad &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores $p_1 = 3/4$, $p_2 = 1/8$, $p_3 = 1/8$, $(R(1) = 3/2$, $R(2) = 1/4$, $R(3) = 0$ y $r = 6$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{3/8}{1 + x_1/2 - x_2} - \frac{3/32}{1 - 3x_1/4 - x_2} - \frac{1/8}{1 - x_1 + 5x_2} \quad &= 0 \\ -\frac{3/4}{1 + x_1/2 - x_2} - \frac{1/8}{1 - 3x_1/4 - x_2} + \frac{5/8}{1 - x_1 + 5x_2} \quad &= 0 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es

$$x_1 = 65/56, \quad x_2 = 11/56,$$

por lo que $x_0 = 1 - x_1 - x_2 = 39/76$. Observemos que $E[R_0] = 1$, $E[R_1] = 37/32$, $E[R_2] = 3/4$.

3. Dominancia Estocástica

Vamos a responder a la pregunta : ¿cuándo se puede decir que la lotería F "es preferida" a la lotería G?

Utilizaremos dos criterios, la dominancia estocástica de primer orden y segundo orden.

3.1. Dominancia estocástica de primer orden. La idea es que $F \succ G \Leftrightarrow$ Dada una cantidad monetaria x, la probabilidad de obtener, al menos x, es mayor con la lotería F que con la lotería G

$\Leftrightarrow$ Dado $x \in \mathbb{R}$, $1 - F(x) \geq 1 - G(x)$

$\Leftrightarrow$ Dado $x \in \mathbb{R}$, $F(x) \leq G(x)$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 36. La lotería F domina a la lotería G estocásticamente de primer orden si para cada $x \in \mathbb{R}$, se verifica que $F(x) \leq G(x)$.

Ejemplo 37. Consideremos las loterías con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{5}{2} \\ 0,4 & \frac{5}{2} \leq x < \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{7}{2} \leq x \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

Como $F(x) \leq G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, vemos que F domina a G estocásticamente de primer orden.

Ejemplo 38. Consideremos las loterías con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Como $F(x) \leq G(x) \forall x \in \mathbb{R}$, F domina a G estocásticamente de primer orden.

La siguiente proposición nos dice que si F domina a G estocásticamente de primer orden, entonces cualquier agente con preferencias crecientes prefiere F a G.

Proposición 39. La lotería F domina a la lotería G estocásticamente de primer orden si y sólo si para toda función $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente se verifica que

$$\int v(x)\, dF(x) \geq \int v(x)\, dG(x)$$

Demostración ($\Leftarrow$) Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, definimos

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > x_0 \\ 0 & \text{si } x \leq x_0 \end{cases}$$

Claramente, $v(x)$ es creciente y, por hipótesis,

$$\int_0^\infty v(x)\, dF(x) \geq \int_0^\infty v(x)\, dG(x)$$

Vamos a calcular $\int_0^\infty v(x)\, dF(x)$. Para ello, vamos a suponer que $F'(x) = f(x)$ y que para todo $b > 0$

$$\int_0^b v(x)\, dF(x) = \int_0^b v(x) f'(x)\, dx$$

Tomemos ahora $b > x_0$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^b v(x)\, dF(x) &= \int_0^{x_0} v(x)\, dF(x) + \int_{x_0}^b v(x)\, dF(x) \\ &= \int_{x_0}^b dF(x) = F(b) - F(x_0) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_0^\infty v(x)\,dF(x) = \lim_{b\to\infty} (F(b) - F(x_0)) = 1 - F(x_0)$$

Análogamente, $\int_0^\infty v(x)\,dG(x) = 1 - G(x_0)$. Por tanto,

$$1 - F(x_0) \geq 1 - G(x_0)$$

es decir, $G(x_0) \geq F(x_0)$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $v(x)$ es derivable y que $F(a) = G(a) = 1$ para algún $a \in \mathbb{R}$ suficientemente grande. Fijamos ahora $b > 0$,

$$\int_0^b v(x)\,dF(x) - \int_0^b v(x)\,dG(x) = v(b)F(b) - \int_0^b v'(x)F(x)\,dx - v(b)G(b) + \int_0^b v'(x)G(x)\,dx$$

$$v(b)[F(b) - G(b)] + \int_0^b v'(x)(G(x) - F(x))\,dx$$

Como $\lim_{b\to+\infty} F(b) = \lim_{b\to+\infty} G(b) = 1$ tenemos que

$$\int_0^\infty v(x)\,dF(x) - \int_0^\infty v(x)dG(x) = \int_0^\infty v'(x)(G(x) - F(x))\,dx \geq 0$$

3.2. Dominancia estocástica de segundo orden. La dominancia estocástica de segundo orden se utiliza para comparar el "riesgo" de dos loterías. Para concentrarnos sólo en ese aspecto de las loterías supondremos que todas tienen el mismo valor esperado (ya que un agente puede aceptar un riesgo mayor si el pago esperado es suficientemente grande).

Definición 40. Sean F y G dos distribuciones con el mismo valor esperado

$$\int xdF = \int xdG$$

Decimos que F domina a G estocásticamente de segundo orden si para toda función v : creciente y cóncava se verifica que

$$\int v(x)\,dF(x) \geq \int v(x)\,dG(x)$$

Es decir F domina a G estocásticamente de segundo orden, si todo agente averso al riesgo y con preferencias monótonas prefiere la lotería F a la lotería G.

Esta propiedad puede demostrarse que es equivalente a la siguiente.

Proposición 41. La lotería F domina a la lotería G estocásticamente de segundo orden si y sólo si para todo t se verifica que

$$\int_{-\infty}^t G(x)dx \geq \int_{-\infty}^t F(x)dx$$

(suponemos $\int xdF = \int xdG$)

Ejemplo 42. Supongamos que G es una lotería compuesta, en la que primero jugamos la lotería F y después otra lotería H con valor esperado

$$\int z\,dH(z) = 0$$

En este caso, se dice que G es una transformación MPS (mean preserving spread) de F. Sea v un agente averso al riesgo (o sea, v es cóncava). Entonces

$$\varphi(G) = \int v(x)\,dG(x) = \int (\int v(x+z)\,dH(z))\,dF(x) \leq \text{ (porque } v \text{ es cóncava)}$$
$$\leq \int v(\int (x+z)\,dH(z))\,dF(x) = \int v(x)dF(x) = \varphi(F)$$

es decir, todo agente averso al riesgo prefiere F a G.

Por tanto, F domina a G estocásticamente de segundo orden.

Ejemplo 43. Consideremos las loterías

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0 & x < 5 \\ \frac{1}{2} & 5 \leq x < 15 \\ 1 & x \geq 15 \end{cases}$$

vemos que

$$\int_0^t F(x) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t-10 & t \leq 10 \end{cases}$$

y que

$$\int_0^t G(x) = \begin{cases} 0 & t \leq 5 \\ \frac{t-5}{2} & 5 \leq t \leq 15 \\ 5 + (t-15) & t \geq 15 \end{cases}$$

y, dibujando estas funciones, se ve que $\int_0^t G(x)\,dx \geq \int_0^t F(x)\,dx$; por lo que F domina a G estocásticamente de segundo orden.