TEMA 1: ECONOMÍAS DE INTERCAMBIO

October 6, 2015

1. Asignaciones Eficientes, equilibrios de Walras

Una economía de intercambio está constituida por un conjunto de agentes $\{1, 2, \ldots, I\}$, con sus relaciones de preferencia $\succ_i$ y recursos iniciales $w^i \in \mathbb{R}^n_+, i = 1, 2, \ldots, I$. Supondremos que cada relación de preferencias $\succ_i, i = 1, 2, \ldots, I$ está representada por una función de utilidad $u_i : X^i \to \mathbb{R}$ (donde $X^i \subset \mathbb{R}^n_+$ es el conjunto de consumo) que verifica las siguientes hipótesis:

(1) Las funciones $u_i, i = 1, 2, \ldots, I$ son crecientes
(2) Las funciones $u_i, i = 1, 2, \ldots, I$ son continuas (en casi todos los ejemplos son diferenciables)
(3) Las funciones $u_i, i = 1, 2, \ldots, I$ son cóncavas. En consecuencia, los conjuntos
$$\{x \in X^i : u_i(x) \geq \bar{u}\}$$
y
$$\{x \in X^i : u_i(x) > \bar{u}\}$$
son convexos.

Una asignación es un vector
$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^I)$$
donde $x^i \in X^i$ es la cesta que recibe el agente $i = 1, 2, \ldots, I$. Una asignación es factible si verifica que
$$\sum_{i=1}^{I} x^i = \sum_{i=1}^{I} w^i$$

Se dice que una asignación $y = (y^1, y^2, \ldots, y^I)$ es Pareto superior a $x = (x^1, x^2, \ldots, x^I)$ si $u_i(y^i) \geq u_i(x^i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, I$ y alguna de las desigualdades es estricta.

Definición 1.1. Una asignación $x = (x^1, \ldots, x^I)$ con $x^i \in X^i$ es Pareto eficiente (o un óptimo de Pareto) si

(1) es factible
(2) No hay otra asignación factible y que sea Pareto superior a x.

En particular, si $x = (x^1, \ldots, x^I)$ es una asignación Pareto eficiente e $y = (y^1, \ldots, y^I)$ es otra asignación factible que verifica que $u_i(y^i) \geq u_i(x^i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, I$, entonces $u_i(y^i) = u_i(x^i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, I$.

Observación 1.2. Si las funciones de utilidad son estrictamente crecientes, entonces una asignación x es Pareto eficiente si y sólo si es factible y no existe otra asignación factible y tal que $u_i(y^i) > u_i(x^i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, I$.

Observación 1.3. Tanto la propiedad de factibilidad como la de optimalidad de Pareto son independientes de la distribución de los recursos iniciales. Es decir, dependen del agregado:
$$w = \sum_{i=1}^{I} w^i$$
pero no de los vectores individuales $w^1, \ldots, w^I$.

Caja de Edgeworth

Observación 1.4. Con dos agentes, las asignaciones Pareto Eficientes pueden obtenerse de la manera siguiente: Fijamos un nivel de utilidad $\bar{u}$ para el agente 2 y determinamos $\bar{x}^1$ como una solución del problema

$$\begin{array}{ll} \max & u_1(x^1) \\ & u_2(x^2) \geq \bar{u} \\ \text{s.a.} & x^1 + x^2 = w^1 + w^2 \end{array}$$

y $\bar{x}^2 = w^1 + w^2 - \bar{x}^1$.

Definición 1.5. Un equilibrio competitivo (o un equilibrio de Walras) es una asignación $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^I)$ y un conjunto de precios $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$ tales que

(1) Los consumidores maximizan su utilidad en el conjunto presupuestario. Es decir, para cada $i = 1, 2, \dots, I$, $\bar{x}_i$ es una solución de:

$$\begin{array}{ll} \max & u_i(x) \\ \text{s.a} & p \cdot (x - w^i) = 0 \end{array}$$

(2) Los mercados se vacían

$$\sum_{i=1}^{I} x^i = \sum_{i=1}^{I} w^i$$

Ejemplo 1.6. Calcular los equilibrios competitivos de la siguiente economía (de intercambio),

$$\begin{array}{ll} u_1(x_1^1, x_2^1) = 4 \ln x_1^1 + 9 \ln x_2^1 & w^1 = (0, 2) \\ u_2(x_1^2, x_2^2) = 4 \ln x_1^2 + 9 \ln x_2^2 & w^2 = (2, 1) \end{array}$$

Demandas de los agentes: Las funciones de utilidad de los dos agentes son idénticas. Por lo tanto el problema de maximización de la utilidad individual es el mismo para ambos. Sea

$$z^i = p \cdot w^i$$

la renta del agente $i = 1, 2$ bajo los precios p. Dados los precios $p = (p_1, p_2)$ y la riqueza z^i del agente $i = 1, 2$, su función de demanda viene determinada por el siguiente problema de maximización,

$$\begin{array}{ll} \max & 4 \ln x_1^i + 9 \ln x_2^i \\ \text{s.a} & p_1 x_1^i + p_2 x_2^i = z^i \end{array}$$

El lagrangiano es $L = 4 \ln x_1^i + 9 \ln x_2^i + \lambda(z^i - p_1 x_1^i - p_2 x_2^i)$. Asumiendo que las soluciones son interiores, las ecuaciones de Lagrange son,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1^i} &= \frac{4}{x_1^i} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^i} &= \frac{4}{x_2^i} - \lambda p_2 = 0 \\ p_1 x_1^i &+ p_2 x_2^i = z^i \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}4 =& \lambda p_1 x_1^i \\ 9 =& \lambda p_2 x_1 2\end{aligned}$$

y sumando ambas ecuaciones,

$$13 = \lambda(p_1 x_1^i + p_2 x_2^i) = \lambda z^i$$

por lo que para cada agente $i = 1, 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{13}{z^i} \\ x_1^i &= \frac{4}{\lambda p_1} = \frac{4z^i}{13p_1} \\ x_2^i &= \frac{9}{\lambda p_2} = \frac{9z^i}{13p_2}\end{aligned}$$

Para encontrar ahora los precios de equilibrio, imponemos la condición de que los mercados se vacían:

$$w^1 + w^2 = x_1 + x_2$$

Para la mercancía 1 tenemos

$$2 = \frac{4}{13p_1}(z^1 + z^2) = x_1^1 + x_2^1$$

mientras que para la mercancía 2

$$3 = \frac{9}{13p_2}(z^1 + z^2) = x_2^1 + x_2^2$$

Recordemos que

$$\begin{aligned}z^1 &= pw^1 = 2p_2 \\ z^2 &= pw^2 = 2p_1 + p_2\end{aligned}$$

y por tanto, $z^1 + z^2 = 2p_1 + 3p_2$. Obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}2 &= \frac{8p_1 + 12p_2}{13p_1} \\ 3 &= \frac{18p_1 + 27p_2}{13p_2}\end{aligned}$$

de donde

$$18p_1 = 12p_2$$

es decir,

$$p_1 = \frac{2}{3}p_2$$

y podemos tomar como precios de equilibrio $p = (2, 3)$. La demanda del agente 1 bajo estos precios es

$$x_1 = (x_1^1, x_2^1) = (\frac{4z^1}{13p_1}, \frac{9z^1}{13p_2}) = (\frac{12}{13}, \frac{18}{13})$$

y la del agente 2 es

$$x_2 = (x_1^2, x_2^2) = (\frac{4z^2}{13p_1}, \frac{9z^2}{13p_2}) = (\frac{14}{13}, \frac{21}{13})$$

Ejemplo 1.7. Calcular el equilibrio de la siguiente economía de intercambio

$$\begin{aligned} u_1(x_1^1, x_2^1) &= x_1^1 x_2^1 & \qquad w^1 &= (1,3) \\ u_2(x_1^2, x_2^2) &= x_1^2 x_2^2 & \qquad w^2 &= (4,2) \end{aligned}$$

Funciones de demanda de los agentes: De nuevo, las funciones de utilidad de los dos agentes son idénticas. Por lo tanto, el problema de maximización de la utilidad individual es el mismo para ambos. Sea

$$z^i = p \cdot w^i$$

la renta del agente $i = 1,2$ bajo los precios p. Dados los precios $p = (p_1, p_2)$ y la riqueza z^i del agente $i = 1,2$, su función de demanda viene determinada por el siguiente problema de maximización,

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1^i x_2^i \\ \text{s.a} \quad & p_1 x_1^i + p_2 x_2^i = z^i \end{aligned}$$

Formamos el lagrangiano $L = x_1^i x_2^i + \lambda(z^i - p_1 x_1^i - p_2 x_2^i)$ y como las soluciones son interiores, obtenemos las ecuaciones de Lagrange,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1^i} &= x_2^i - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^i} &= x_1^i - \lambda p_2 = 0 \\ p_1 x_1^i + p_2 x_2^i &= z^i \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos que

$$\begin{aligned} \lambda p_1 x_1^i &= x_1^i x_2^i \\ \lambda p_2 x_2^i &= x_1^i x_2^i \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones tenemos,

$$2x_1^i x_2^i = \lambda(p_1 x_1^i + p_2 x_2^i) = \lambda z^i$$

de donde,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2x_1^i x_2^i}{z^i} \\ x_1^i &= \frac{z^i}{2p_1} \\ x_2^i &= \frac{z^i}{2p_2} \end{aligned}$$

Asignaciones de Equilibro: Imponemos que los mercados se vacían:

$$5 = x_1^1 + x_1^2 = \frac{z^1 + z^2}{2p_1} = \frac{5}{2}\frac{p_1 + p_2}{p_1}$$
$$5 = x_2^1 + x_2^2 = \frac{z^1 + z^2}{2p_2} = \frac{5}{2}\frac{p_1 + p_2}{p_2}$$

y de aquí deducimos que $p_1 = p_2$. Unos precios de equilibrio son $p_1 = p_2 = 1$. Las asignaciones Walrasianas son

$$x_1 = (x_1^1, x_2^1) = (2, 2)$$
$$x_2 = (x_1^2, x_2^2) = (3, 3)$$

Ejemplo 1.8. Encontrar los equilibrios de Walras de la siguiente economía de intercambio,

$$u_1(x_1^1, x_2^1) = 2\sqrt{x_1^1 x_2^1} \qquad w^1 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$$
$$u_2(x_1^2, x_2^2) = 2\sqrt{x_1^2} + 2\sqrt{x_2^2} \qquad w^2 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$$

Demanda del agente 1 Realizando una transformación monótona, vemos que la relación de preferencias del agente 1 también se puede representar por la función de utilidad

$$u_1(x_1^1, x_2^1) = x_1^1 x_2^1$$

y en el ejemplo anterior hemos calculado su función de demanda,

$$x_1^1 = \frac{z^1}{2p_1}$$
$$x_2^1 = \frac{z^1}{2p_2}$$

con

$$z^1 = p \cdot w^1$$

Demanda del agente 2: Dados los precios $p = (p_1, p_2)$ está determinada por

$$\begin{aligned} \max \quad & \sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2} \\ \text{s.a} \quad & p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 = z^2 \end{aligned}$$

con

$$z^2 = \frac{3}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2} + \lambda(z^2 - p_1 x_1^2 - p_2 x_2^2)$$

de donde obtenemos las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^2} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2}} - \lambda p_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\sqrt{x_2^2}} - \lambda p_2 = 0$$

Dividiendo ambas ecuaciones,
$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{x_2^2}{x_1^2}}$$
por lo que
$$x_2^2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1^2$$
Sustituyendo en la restricción presupuestaria llegamos a que
$$x_1^2 \left(\frac{p_1^2 + p_1 p_2}{p_2}\right) = z^2$$
por lo que,
$$x_1^2 = \frac{p_2}{p_1(p_1+p_2)} z^2$$
y
$$x_2^2 = \frac{p_1}{p_2(p_1+p_2)} z^2$$
Para calcular los precios de equilibrio, imponemos que los mercados se vacían
$$3 = x_1^1 + x_1^2$$
$$1 = x_2^1 + x_2^2$$
Por tanto
$$3 = \frac{z^1}{2p_1} + \frac{p_2}{p_1(p_1+p_2)} z^2$$
$$1 = \frac{z^1}{2p_2} + \frac{p_1}{p_2(p_1+p_2)} z^2$$
con
$$z^1 = z^2 = \frac{3p_1 + p_2}{2}$$
Sustituyendo estos valores en la primera ecuación, queda que
$$\frac{3p_1 + p_2}{2p_1} + \frac{p_2(3p_1+p_2)}{p_1(p_1+p_2)} = 6$$
que operando se convierte en
$$-9p_1^2 + 3p_2^2 - 2p_1 p_2 = 0$$
Tomando por ejemplo $p_1 = 1$, queda que
$$3p_2^2 - 2p_2 - 9 = 0$$
es decir,
$$p_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4+108}}{6} = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{7}$$
como $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{7} < 0$ debemos escoger
$$p_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{7}$$
De aquí se obtienen los valores de z^1, z^2, x_{ij}.

2. Existencia de Equilibrio en Economías de Intercambio

Consideremos un agente $i = 1, \dots, I$, con función de utilidad u_i estrictamente cóncava y recursos iniciales w^i. Cada vector de precios p, determina su función de demanda, como la solución del problema de maximización

$$\begin{array}{ll} \max & u_i(x) \\ \text{s.a} & p \cdot (x - w^i) \leq 0 \end{array}$$

Denotaremos a esta función de demanda por $x^i(p)$. Observamos que si $k > 0$ entonces

$$x^i(kp) = x^i(p)$$

es decir $x^i(p)$ es homogénea de grado 0 en los precios. Es posible demostrar que esta función depende de forma continua en los precios, siempre que $p >> 0$.

Definición 2.1. La función exceso de demanda del agente $i = 1, \dots, I$ es

$$z^i(p) = x^i(p) - w^i$$

La función exceso de demanda agregada de los agentes $i = 1, \dots, I$ es

$$z(p) = \sum_{i=1}^{I} z^i(p) = \sum_{i=1}^{I} \left(x^i(p) - w^i\right)$$

Claramente, las funciones exceso de demanda también son continuas y homogéneas de grado 0 en los precios. Un precio p es un equilibrio Walrasiano si y sólo si $z(p) \leq 0$.

Proposición 2.2 (Ley de Walras)**.** $p \cdot z(p) = 0$.

Demostración:

$$p \cdot z(p) = p \cdot \sum_{i=1}^{I} \left(x^i(p) - w^i\right) = \sum_{i=1}^{I} p \cdot \left(x^i(p) - w^i\right) = 0$$

ya que $x^i(p)$ satisface la restricción presupuestaria. □

Proposición 2.3. *Sea $z(p) = (z_1(p), \dots, z_n(p))$. Supongamos que para $l \neq k$ se verifica que $z_l(p) = 0$ y que $p_k > 0$. Entonces, $z_k(p) = 0$.*

Demostración: Por la ley de Walras,

$$0 = \sum_{l=1}^{n} p_l \cdot z_l(p) = p_k \cdot z_k(p)$$

y como $p_k > 0$, entonces $z_k(p) = 0$.

Proposición 2.4. *Supongamos que $\bar{p}$ es un equilibrio de Walras y que para algún bien l se tiene que $z_l(\bar{p}) < 0$. Entonces, $p_l = 0$.*

Es decir, si equilibrio un bien está en exceso de oferta, entonces su precio es cero.
Demostración: Como $\bar{p}$ es un equilibrio competitivo, tenemos que $z(\bar{p}) \leq 0$. Como los precios son mayores o iguales a 0, tenemos que cada sumando de

$$\bar{p} \cdot z(\bar{p}) = \sum_{l=1}^{n} \bar{p}_l z_l(\bar{p}) \leq 0$$

es cero o negativo. Por lo que si $z_l(\bar{p}) < 0$ y $p_l > 0$, entonces,

$$\bar{p} \cdot z(\bar{p}) < 0$$

Pero esto contradice la ley de Walras. $\square$

Estamos suponiendo que las preferencias son crecientes. Si el precio de algún bien es 0, entonces la demanda de ese bien debe de ser infinita. Por tanto, en un equilibrio de Walras, debe de verificarse que $z(p) = 0$.

Como la función exceso de demanda es homogénea de grado cero, podemos normalizar los precios de forma que

$$\sum_{l=1}^{n} p_l = 1$$

En consecuencia podemos considerar que la función exceso de demanda está definida sobre el conjunto

$$\Delta^{n-1} = \{p \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{l=1}^{n} p_l = 1\}$$

Utilizaremos el siguiente resultado

Theorem 2.5. (Teorema de Brouwer) *Sea $A \neq \emptyset$ un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \to A$ una función continua. Entonces, existe un punto $p \in A$ tal que $f(p) = p$.*

Theorem 2.6. (Existencia de Equilibrio de Walras) *Sea $z : \Delta^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ una función continua que satisface la ley de Walras. Entonces, existe un punto $\bar{p} \in \Delta^{n-1}$ tal que $z(\bar{p}) \leq 0$.*

Demostración: Definimos la aplicación

$$g : \Delta^{n-1} \to \Delta^{n-1}$$

de la manera siguiente: $g(p) = (g_1(p), \ldots, g_n(p))$ donde para cada $l = 1, \ldots, n$,

$$g_l(p) = \frac{p_l + \max\{0, z_l(p)\}}{1 + \sum_{j=1}^{n} \max\{0, z_j(p)\}}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n} g_l(p) &= \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n} \max\{0, z_j(p)\}} \left(\sum_{l=1}^{n} p_l + \sum_{l=1}^{n} \max\{0, z_l(p)\} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n} \max\{0, z_j(p)\}} \left(1 + \sum_{l=1}^{n} \max\{0, z_l(p)\} \right) = 1\end{aligned}$$

por lo que $g : \Delta^{n-1} \to \Delta^{n-1}$. Además g es continua. Aplicando el Teorema de Brouwer, obtenemos un punto $\bar{p}$ tal que $g(\bar{p}) = \bar{p}$, es decir, para cada $l = 1, \ldots, n$,

$$\bar{p}_l = \frac{\bar{p}_l + \max\{0, z_l(\bar{p})\}}{1 + \sum_{j=1}^{n} \max\{0, z_j(\bar{p})\}}$$

Operando,

$$\bar{p}_l \sum_{j=1}^{n} \max\{0, z_j(\bar{p})\} = \max\{0, z_l(\bar{p})\}$$

de donde

$$z_l(\bar{p})\bar{p}_l \sum_{j=1}^{n} \max\{0, z_j(\bar{p})\} = z_l(\bar{p}) \max\{0, z_l(\bar{p})\}$$

Sumando estas ecuaciones para $l = 1, \dots, n$,

$$\left(\sum_{l=1}^{n} z_l(\bar{p})\bar{p}_l\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \max\{0, z_j(\bar{p})\}\right) = \sum_{l=1}^{n} z_l(\bar{p}) \max\{0, z_l(\bar{p})\}$$

Por la Ley de Walras, el primer término se anula. Por lo que,

$$0 = \sum_{l=1}^{n} z_l(\bar{p}) \max\{0, z_l(\bar{p})\}$$

Observamos que

$$z_l(\bar{p}) \max\{0, z_l(\bar{p}\} = \begin{cases} 0 & \text{Si } \max\{0, z_l(\bar{p}\} = 0, \\ z_l^2 & \text{Si } \max\{0, z_l(\bar{p}\} = z_l. \end{cases}$$

Es decir, cada sumando es mayor o igual que 0 y todos suman 0. Por tanto, todos deben anularse. Es decir, para cada $l = 1, \dots, n$,

$$z_l(\bar{p}) \max\{0, z_l(\bar{p})\} = 0$$

Pero esto implica que

$$z_l(\bar{p}) \leq 0$$

(ya que si

$$z_l(\bar{p}) > 0$$

entonces $z_l(\bar{p}) \max\{0, z_l(\bar{p})\} = z_l^2 > 0$). □

Observación 2.7. En el Teorema de existencia de equilibrio hemos supuesto que la función exceso de demanda $z(p)$ es continua, incluso cuando los precios se acercan a 0. Esta hipótesis no es razonable con preferencias monótonas, ya que en este caso, es de esperar que si el precio de un bien es 0 su demanda sea infinita. Sin embargo, la demostración anterior se puede modificar para incorporar este caso (ver [3]).

3. Los Teoremas de separación

En esta parte consideramos algunos resultados matemáticos sobre conjuntos convexos, que usaremos posteriormente.

Definición 3.1. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si dados $x, y \in A$ se verifica que $tx + (1-t)y \in A$ para todo $0 \leq t \leq 1$.

Proposición 3.2. *Si $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ son convexos, entonces los conjuntos*

$$A_1 + A_2 = \{a_1 + a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$

y $A_1 \cap A_2$ son convexos también.

Theorem 3.3 (Teorema de Separación 1)**.** *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Entonces, existe un vector $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ tal que para todo $x \in A$, $y \in B$,*

$$p \cdot x \geq p \cdot y$$

Theorem 3.4 (Teorema de la Separación 2)**.** *Sea $B \subset \mathbb{R}^I$ convexo y cerrado y sea $x \notin B$. Entonces, existe $p \in \mathbb{R}^I, p \neq 0$ y existe $c \in \mathbb{R}$ tales que $p \cdot x > c > p \cdot y$, $\forall y \in B$.*

Theorem 3.5 (Teorema de la Separación 3)**.** *Sea $B \subset \mathbb{R}^I$, convexo y sea $x \notin \overset{\circ}{B}$. Entonces existe $p \in \mathbb{R}^I$, $p \neq 0$, tal que $p \cdot x \geq p \cdot y$, $\forall y \in B$.*

4. Los Teoremas del Bienestar

Theorem 4.1 (Primer Teorema del Bienestar)**.** *Si (x, p) es un equilibrio Walrasiano, entonces x es un óptimo de Pareto.*

Demostración: Supongamos que x no es un óptimo de Pareto y sea y otra asignación factible que es Pareto superior. Como x^i es una solución de

$$\begin{array}{ll} \max & u_i(z) \\ \text{s.a} & p \cdot z \leq p \cdot w^i \end{array}$$

para cada $i = 1, \ldots I$ y se verifica que $u_i(y^i) > u_i(x^i)$ tenemos que

$$p \cdot y^i > p \cdot w^i \qquad \text{para todo } i = 1, \ldots I.$$

Sumando las desigualdades anteriores,

$$p \cdot \sum_{i=1}^{I} y^i > p \cdot \sum_{i=1}^{I} w^i$$

pero esto contradice que

$$\sum_{i=1}^{I} y^i = \sum_{i=1}^{I} w^i$$

(ya que y es factible). □

Comentarios:

(1) Se dice que p es un gradiente de preferencias en x_i^* si $p \cdot x_i^* < p \cdot y$ para todo y tal que $u_i(y) > u_i(x_i^*)$. Si (x_i^*, p^*) es una equilibrio Walrasiano entonces p^* es un gradiente de preferencias común a todos los agentes y por tanto es Pareto eficiente.
(2) El primer teorema del bienestar no garantiza la existencia de equilibrio competitivo. Sólo afirma que, si existen, son eficientes.
(3) La eficiencia de Pareto es un requisito mínimo, pero no siempre es satisfactorio. Cuestiones de equidad, justicia, etc.

4.1. **Segundo Teorema del Bienestar.**

Theorem 4.2 (Segundo Teorema del Bienestar)**.** *Consideremos una economía de intercambio $e = (\{(u_i, w^i\}_{i=1}^I)$ y supongamos que $\bar{x}$ es una asignación Pareto eficiente en la que a cada agente se le asigna una cantidad positiva de cada bien. Entonces $\bar{x}$ es un equilibrio competitivo de la economía $e' = (\{(u_i, \bar{x}^i\}_{i=1}^I)$*

Demostración: Sea

$$P^i = \{x^i \in X^i : u_i(x^i) > u_i(\bar{x}^i)\}$$

el conjunto de todas las asignaciones estrictamente preferidas (por el agente i) a la cesta $\bar{x}^i$. Y definimos

$$P = \sum_{i=1}^{I} P^i = \{\sum_{i=1}^{I} x^i : x^i \in P^i\}$$

El conjunto P es convexo, ya que es la suma de conjuntos convexos.

Por otra parte los recursos agregados

$$w = \sum_{i=1}^{I} \bar{x}^i$$

no pertenece a P, ya que $\bar{x}$ es Pareto eficiente. Aplicando el Teorema de Separación a los conjuntos P y $\{w\}$, existe un vector $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$p \cdot z \geq p \cdot \sum_{i=1}^{I} \bar{x}^i \qquad \text{para todo } z \in P$$

es decir,

$$p \cdot \left(z - \sum_{i=1}^{I} \bar{x}^i \right) \geq 0 \qquad \text{para todo } z \in P \tag{4.1}$$

Vamos a demostrar que p son los precios de equilibrio.

En primer lugar, probamos que $p_1, \ldots, p_n \geq 0$. Para ello tomamos la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y consideramos las cestas $w + e_k$. Observamos que $w + e_k \in P$ ya que al tener una unidad más de un bien, es posible redistribuir $w + e_k$ de forma que todos los agentes estén mejor que con $\bar{x}$. Utilizando la desigualdad 4.1, obtenemos que

$$p \cdot (w + e_k - w) = p \cdot e_k = p_k \geq 0 \qquad \text{para todo } k = 1, \ldots, n$$

Ahora vamos a probar que si para algún agente $j = 1, \ldots, I$ se verifica que $u_j(y^j) > u_j(\bar{x}^j)$, entonces $p \cdot y^j \geq p \cdot \bar{x}^j$. Supongamos que $u_j(y^j) > u_j(\bar{x}^j)$, para algún agente $j = 1, \ldots, I$. Construimos la asignación z de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} z^j &= (1-\alpha) y^j \\ z^i &= \bar{x}^i + \frac{\alpha y^j}{n-1} \qquad \text{si } i \neq j. \end{aligned}$$

Entonces, para todo $i \neq j$ y para todo $\alpha > 0$,

$$u_i(z^i) > u_i(\bar{x}^i)$$

y por continuidad, $u_j(z^j) > u_j(\bar{x}^j)$ si $\alpha > 0$ es suficientemente pequeño. Por tanto, para $\alpha > 0$ suficientemente pequeño, la asignación

$$\sum_{i=1}^{I} z^i \in P$$

y aplicando la desigualdad 4.1,

$$p \cdot \sum_{i=1}^{I} z^i \geq p \cdot \sum_{i=1}^{I} \bar{x}^i$$

y utilizando la definición de z, esta desigualdad es

$$p \cdot \left((1-\alpha)y^j + \sum_{i \neq j} \bar{x}^i + \alpha y^j \right) \geq p \cdot \sum_{i=1}^{I} \bar{x}^i$$

es decir,

$$p \cdot \left(y^j + \sum_{i \neq j} \bar{x}^i \right) \geq p \cdot \sum_{i=1}^{I} \bar{x}^i = p \cdot \left(\bar{x}^j + \sum_{i \neq j} \bar{x}^i \right)$$

por lo que,

$$p \cdot y^j \geq p \cdot \bar{x}^j$$

Finalmente, probaremos que si para algún agente $j = 1, \ldots, I$ se verifica que $u_j(y^j) > u_j(\bar{x}^j)$, entonces $p \cdot y^j > p \cdot \bar{x}^j$. Supongamos que $u_j(y^j) > u_j(\bar{x}^j)$, para algún agente $j = 1, \ldots, I$. Hemos visto que debe verificarse que $p \cdot y^j \geq p \cdot \bar{x}^j$. Supongamos que $p \cdot y^j = p \cdot \bar{x}^j$ y llegaremos a una contradicción.

Por la continuidad de las preferencias, existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que $u_j(\varepsilon y^j) > u_j(\bar{x}^j)$. Por la parte anterior debe verificarse que

$$\varepsilon p \cdot y^j \geq p \cdot \bar{x}^j = p \cdot y^j \tag{4.2}$$

Por otra parte, $p \cdot \bar{x}^j > 0$, ya que $p \geq 0$, $p \neq 0$ y todas las coordenadas de $\bar{x}^j$ son estrictamente positivas. Pero entonces la ecuación 4.2 es imposible porque $0 < \varepsilon < 1$. Por tanto, $p \cdot y^j > p \cdot \bar{x}^j$. Y esto demuestra que $(\bar{x}, p)$ es un equilibrio Walrasiano de la economía e'.

Theorem 4.3 (Segundo Teorema del Bienestar)**.** *Consideremos una economía de intercambio $e = (\{(u_i, w^i\}_{i=1}^{I})$. Supongamos que $\bar{x}$ es una asignación Pareto eficiente y que la economía $e' = (\{(u_i, \bar{x}^i\}_{i=1}^{I})$ tiene un equilibrio competitivo, $(\hat{x}, p)$. Entonces, $(\bar{x}, p)$ es un equilibrio competitivo de la economía e'.*

Demostración: Por construcción $\bar{x}^i$ está en el conjunto presupuestario de cada agente $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, $u_i(\hat{x}^i) \geq u_i(\bar{x}^i)$, para cada agente $i = 1, \ldots, n$. Como $\bar{x}$ es un óptimo de Pareto, se debe verificar que $u_i(\hat{x}^i) = u_i(\bar{x}^i)$, para cada agente $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, $(\bar{x}, p)$ es un equilibrio competitivo de la economía e'. □

Comentarios:

(1) El STB es una especie de recíproco del PTB.
(2) Las asignaciones PE interiores son alcanzables como equilibrios con transferencias a través de una redistribución de la riqueza de los agentes. Intervención del planificador.
(3) Problemas:
   (a) precios son asumidos por las empresas y los agentes
   (b) ¿cuánta información necesita conocer el planificador para llevar a término una asignación PE?

5. Función de bienestar social

Consideramos la economía

$$e = (\{(u_i, w^i)\}_{i=1}^I)$$

Definición 5.1. El conjunto de utilidades posibles es

$$\begin{aligned} U = &\{(u_1, \dots, u_I) \in \mathbb{R}^I : u_i \leq u_i(x^i) \quad \text{para todo } i = 1, \dots, I \\ &\text{y para alguna asignación factible } (x^1, \dots, x^I)\} \end{aligned}$$

Definición 5.2. La frontera de Pareto es

$$\begin{aligned} \partial U = &\{(u_1, \dots, u_I) \in U : \text{no existe } (v^1, \dots, v^I) \in U \\ &\text{que verifica } v^i \geq u_i \text{ para todo } i = 1, \dots, I \text{ y } v^k > u_k \text{ para algún } k\} \end{aligned}$$

La frontera de Pareto son los elementos maximales del conjunto de utilidades posibles, respecto al orden de Pareto, que se estudió en Matemáticas I.

Proposición 5.3. *Una asignación $x = (x^1, \dots, x^I)$ es P.E si y sólo si $(u_1(x^1), \dots, u_I(x^I)) \in \partial U$*

Demostración: ($\Rightarrow$) Supongamos que $(u_1(x^1), \dots, u_I(x^I)) \in U \backslash \partial U$. Entonces, existe $(v^1, \dots, v^I) \in U$ tal que

$$\begin{aligned} v^i &\geq u_i & i &= 1, \dots, I \\ v^k &> u_k & &\text{para algún k} \end{aligned}$$

Sea $\hat{x}$ una asignación factible tal que $v^i \leq u_i(\hat{x}^i)$ para todo $i = 1, \dots, I$. Entonces,

$$\begin{aligned} u_i(\hat{x}^i) &\geq v^i \geq u_i(x^i) & &\text{para todo } i = 1, \dots, I \\ u_k(\hat{x}^k) &\geq v^k > u_k(x^k) & &\text{para algún k} \end{aligned}$$

por lo que x no es P.E.

($\Leftarrow$) Supongamos x no es P.E. Sea $\hat{x}$ factible y que verifica

$$\begin{aligned} u_i(\hat{x}^i) &\geq u_i(x^i) & &\text{para todo } i = 1, \dots, I \\ u_k(\hat{x}^k) &> u_k(x^k) & &\text{para algún k} \end{aligned}$$

Tomando $v^i = u_i(\hat{x}^i)$ $i = 1, \dots, I$ tenemos que $(v^1, \dots, v^I) \in U$ y

$$\begin{aligned} v^i &\geq u_i(x^i) & i &= 1, \dots, I \\ v^k &> u_k(x^k) & &\text{para algún k} \end{aligned}$$

Por lo que

$$(u_1(x^1), \dots, u_i(x^I)) \in U \backslash \partial U$$

Definición 5.4. Una función de Bienestar Social es una función monótona $W(u_1, \dots, u_I) : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$.

Nos centraremos en el caso lineal,

$$W(u_1, \dots, u_I) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_I u_I$$

con $\alpha_i \geq 0$. Consideramos el problema

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_I u_I \\ \text{s.a.} \quad & u \in U \end{aligned} \qquad (P)$$

Proposición 5.5.

(1) *Sea $\bar{u} = (\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^I)$ una solución de (P) con $\alpha_i \geq 0$. Entonces $\bar{u} \in \partial U$ (y por tanto $\bar{u}$ es un vector de utilidades que corresponde a una asignación PE.*

(2) *Supongamos que U es convexo y sea $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_I) \in \partial U$. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_I$, no todos nulos, tales que u es una solución de (P).*

<u>Demostración:</u>

(1) Si $\bar{u} \notin \partial U$ existe $u \in U$ tal que $u \geq \bar{u}$ y $u \neq \bar{u}$. Es decir,

$$\begin{aligned} u_i &\geq \bar{u}^i & \quad & i = 1, \ldots, I \\ u_k &> \bar{u}^k & & \text{para algún k} \end{aligned}$$

entonces $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_I u_I > \alpha_1 \bar{u}^1 + \alpha_2 \bar{u}^2 + \cdots + \alpha_I \bar{u}^I$ por lo que $\bar{u}$ no es el máximo de (P).

(2) Supongamos que $\bar{u} \in \partial U$, con U convexo. Por los teoremas de separación encontramos $p \in \mathbb{R}^I$, $p \neq 0$, tal que para todo $u = (u_1, \ldots, u_I) \in U$,

$$p_1 \bar{u}_1 + \cdots + p_I \bar{u}_I \geq p_1 u_1 + \cdots + p_I u_I \qquad (1)$$

Si $p_k < 0$ para algún k, entonces como $u = (0, \ldots, u_k, \ldots, 0) \in U$ para todo $u_k < 0$ y

$$p_1 u_1 + \cdots + p_I u_I = p_k u_k > 0 \qquad (2)$$

tendríamos que (2) se puede hacer arbitrariamente grande tomando u_k negativo y $|u_k|$ arbitrariamente grande. Por tanto, $p \geq 0, p \neq 0$ y podemos tomar $\alpha = p$.

6. Condiciones de primer orden de optimalidad de Pareto

Sea e una economía de intercambio. Supongamos que las asignaciones son <u>interiores</u>. En este caso las condiciones de primer orden del problema

$$\begin{aligned} \max \quad & u_i(x^i) \\ \text{s.a.} \quad & px^i = p \cdot w^i \end{aligned}$$

son

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_l^i} = \delta^i p_l \; i = 1, \ldots, I; \; l = 1, \ldots, L$$

Recordemos que todo equilibrio competitivo verifica estas condiciones (estamos suponiendo que u_i es diferenciable, $i = 1, 2, \ldots, I$). Por otra parte, las condiciones de maximizar la función de bienestar social (como en el problema (P))

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha_1 u_1 \left(x^1\right) + \alpha_2 u_2 \left(x^2\right) + \cdots + \alpha_I u_I \left(x^I\right) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{I} x_l^i = w^l \qquad\qquad l = 1, 2, \ldots, L \end{aligned}$$

son

$$\alpha^i \frac{\partial u_i}{\partial x_l^i} = \gamma_l \quad i = 1, \ldots, I; \; l = 1, \ldots, L$$

ya que el Lagrangiano es

$$L = \alpha_1 u_1\left(x^1\right) + \alpha_2 u_2\left(x^2\right) + \cdots + \alpha_I u_I\left(x^I\right) + \sum_{l=1}^{L} \gamma_l (w^l - \sum_{i=1}^{I} x_l^i)$$

Por tanto, vemos que las soluciones interiores de los dos problemas son las mismas. Por ello, basta tomar

$$\begin{aligned} p_l &= \gamma_l & \qquad l &= 1, \ldots, L \\ \alpha^i &= \frac{1}{\delta^i} & \qquad i &= 1, \ldots, I \end{aligned}$$

Esto proporciona un método para calcular las asignaciones Pareto eficientes interiores y las asignaciones de equilibrio.

<u>Ejemplo 1:</u> (continuación) Vamos a calcular las asignaciones Pareto eficientes interiores de la economía:

$$\begin{aligned} u_1(x_1^1, x_2^1) &= 4\ln x_1^1 + 9\ln x_2^1 & \qquad w^1 &= (0,2) \\ u_1(x_1^2, x_2^2) &= 4\ln x_1^2 + 9\ln x_2^2 & \qquad w^2 &= (2,1) \end{aligned}$$

Notemos que $w = w^1 + w^2 = (2,3)$. El problema de maximización de la función de bienestar social es

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha_1 4\ln x_1^1 + \alpha_1 9\ln x_2^1 + \alpha_2 4\ln x_1^2 + \alpha_2 9\ln x_2^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1^1 + x_1^2 = 2 \\ & x_2^1 + x_2^2 = 3 \end{aligned}$$

El lagrangiano es

$$L = 4\alpha_1 \ln x_1^1 + 9\alpha_1 \ln x_2^1 + 4\alpha_2 \ln x_1^2 + 9\alpha_2 \ln x_2^2 + \gamma_1(2 - x_1^1 - x_1^2) + \gamma_2(3 - x_2^1 - x_2^2)$$

y las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1^1} &= \frac{4\alpha_1}{x_1^1} - \gamma_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^1} &= \frac{9\alpha_1}{x_2^1} - \gamma_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1^2} &= \frac{4\alpha_2}{x_1^2} - \gamma_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^2} &= \frac{9\alpha_2}{x_2^2} - \gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} 4\alpha_1 &= \gamma_1 x_1^1 & \qquad (1) \\ 9\alpha_1 &= \gamma_2 x_2^1 & \qquad (2) \\ 4\alpha_2 &= \gamma_1 x_1^2 & \qquad (3) \\ 9\alpha_2 &= \gamma_2 x_2^2 & \qquad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) + (3) : 4(\alpha_1 + \alpha_2) &= \gamma_1(x_1^1 + x_1^2) = 2\gamma_1 \\ \Rightarrow \gamma_1 &= 2(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$

$$(2) + (4) : 9(\alpha_1 + \alpha_2) = \gamma_2(x_2^1 + x_2^2) = 3\gamma_2$$
$$\Rightarrow \gamma_2 = 3(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Entonces, las siguientes asignaciones son óptimos de pareto.

$$x_1^1 = \frac{4\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \qquad x_2^1 = \frac{9\alpha_1}{\gamma_2} = \frac{3\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$
$$x_1^1 = \frac{4\alpha_2}{\gamma_1} = \frac{2\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \qquad x_2^2 = \frac{9\alpha_2}{\gamma_2} = \frac{3\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Faltarían los puntos extremos que corresponden a $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ y $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$.

Veamos cómo de aquí es posible obtener, de nuevo, las asignaciones de equilibrio. Sabemos que los precios de equilibrio coinciden con los multiplicadores de Lagrange que hemos obtenido

$$p = (p_1, p_2) = (\gamma_1, \gamma_2)$$

por lo que $p_1 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$ y $p_2 = 3(\alpha_1 + \alpha_2)$. Vemos que $\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{3}$ y podemos tomar $p_1 = 2, p_2 = 3$.

Si ahora imponemos las restricciones presupuestarias individuales

$$p_1 x_{i1} + p_2 x_{i2} = pw^i \qquad i = 1, 2$$

obtenemos

$$p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 = 2p_2$$
$$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 = 2p_1 + p_2$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} + 3\frac{3\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = 6$$
$$2\frac{2\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + 3\frac{3\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = 7$$

$$\Leftrightarrow 6\alpha_1 + 6\alpha_2 = 13\alpha_1$$
$$7\alpha_1 = 6\alpha_2$$

Tomando $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 7$, vemos que la asignación de equilibrio es

$$x_1^1 = \frac{12}{13} \qquad x_2^1 = \frac{18}{13}$$
$$x_1^1 = \frac{14}{13} \qquad x_2^2 = \frac{21}{13}$$

Ejemplo 2: (continuación) Vamos a calcular las asignaciones eficientes de Pareto de la economía

$$u_1(x_1^1 x_2^1) = x_1^1 x_2^1 \qquad w^1 = (1, 3)$$
$$u_1(x_1^2 x_2^2) = x_1^2 x_2^2 \qquad w^1 = (4, 2)$$

La función de bienestar social es $W = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ y los óptimos de Pareto interiores son soluciones de

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha_1 x_1^1 x_2^1 + \alpha_2 x_1^2 x_2^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1^1 + x_1^2 = 5 \\ & x_2^1 + x_2^2 = 5 \end{aligned}$$

References

[1] G. A. Jehle and P. J. Reny, Advanced Microeconomic Theory", Addison Wesley Longman, 2001
[2] A. Mas–Colell, M. D. Whinston y J. Green, Microeconomic Theory, 1995.
[3] Hal R Varian, Análisis Microeconómico, Segunda Edición.