UNIVERSIDAD CARLOS III. **MICROECONOMÍA IV.**

Primer Cuatrimestre **Año 2015**

PROBLEMAS TEMA II.
SOLUCIONES

(1) Supongamos que hay tres sucesos.

(a) Un individuo posee una relación de preferencias sobre loterías $\succeq$ que puede ser representada mediante una función de utilidad esperada. Dicha relación satisface

$$(1,0,0) \succ (0,1,0) \succ (0,0,1), \qquad \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \sim \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$$

Determinar una función de utilidad que represente las preferencias $\succeq$.

(b) Otro individuo tiene posee una relación de preferencias sobre loterías $\succeq$ que verifica

$$(1,0,0) \sim \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad (0,0,1) \succ (0,1,0), \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \succ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

¿Es posible representarlas mediante una función de utilidad esperada?

Solución: (a) Podemos suponer que

$$u(1,0,0) = 1 \quad u(0,0,1) = 0$$

Utilizando que

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \sim \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$$

tenemos que

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}u(0,1,0) = \frac{5}{12} + \frac{1}{4}u(0,1,0)$$

y despejando obtenemos que

$$u(0,1,0) = \frac{2}{3}$$

La relación de preferencias se puede representar por la función de utilidad

$$u(p_1,p_2,p_3) = p_1 + \frac{2p_2}{3}$$

(b) Como

$$(1,0,0) \sim \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(0,1,0) + \frac{1}{2}(0,0,1)$$

y como

$$(0,0,1) \succ (0,1,0)$$

tenemos

$$(0,0,1) \succ \frac{1}{2}(0,1,0) + \frac{1}{2}(0,0,1) \succ (0,1,0)$$

es decir,

$$(0,0,1) \succ (1,0,0) \succ (0,1,0)$$

y podemos suponer que

$$u(0,0,1) = 1 \quad u(0,1,0) = 0$$

Utilizando que

$$(1,0,0) \sim \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

obtenemos que

$$u(1,0,0) = \frac{1}{2}u(0,0,1) + \frac{1}{2}u(0,1,0) = \frac{1}{2}$$

por lo que, si se verifican los axiomas del teorema de la utilidad esperada, la función de utilidad que representa a las preferencias del agente sería

$$u(p_1, p_2, p_3) = \frac{p_1}{2} + p_3$$

Pero ahora tenemos que

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4}$$

y

$$u\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

es decir,

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \succ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

lo cual contradice la hipótesis en el enunciado. Por tanto, las preferencias del agente no verifican los axiomas del teorema de la utilidad esperada.

---

(2) Hay una probabilidad del 1% de que ocurra una inundación. El gobierno considera cuatro posibilidades

(A) No se evacua a la población, no siendo necesario hacerlo.
(B) Se evacua a la población, no siendo necesario hacerlo.
(C) Se evacua a la población, siendo necesario hacerlo.
(D) No se evacua a la población, siendo necesario hacerlo.

El gobierno es indiferente entre el suceso seguro B y una lotería entre A, con probabilidad p, y D, con probabilidad $1 - p$. También es indiferente entre el suceso seguro C y una lotería entre A, con probabilidad q, y D, con probabilidad $1 - q$. Supongamos que prefiere el suceso A al suceso D y que se satisfacen las condiciones del Teorema de la Utilidad Esperada.

(a) Encontrar una función de utilidad esperada que represente las preferencias del gobierno.
(b) El gobierno debe decidir dos criterios de evacuación:
   (i) Criterio 1: éste conduce a una evacuación en el 90% de los casos en los que hay una inundación y en el 10% de los casos en los que no la hay.
   (ii) Criterio 2: éste conduce a una evacuación en el 95% de los casos en los que hay una inundación y en el 15% de los casos en los que no la hay.

¿Cuál es el criterio que elegirá el gobierno?

Solución:

(a) Por el teorema de utilidad esperada, las preferencias se pueden representar por una función de utilidad de la forma

$$u(p_A, p_B, p_C, p_D) = p_A u_A + p_B u_B + p_C u_C + p_D u_D$$

Por otra parte como

$$\begin{aligned} B &\sim pA + (1-p)D \\ C &\sim qA + (1-q)D \\ A &\succ D \end{aligned}$$

tenemos (¿por qué?) que $A \succ B$, $A \succ C$, $B \succ D$, $C \succ D$. Podemos asumir que $u(1, 0, 0, 0) = 1$ y $u(0, 0, 0, 1) = 0$. Es decir,

$$u(p_A, p_B, p_C, p_D) = p_A + p_B u_B + p_C u_C$$

Además,

$$\begin{aligned} B &\sim pA + (1-p)D \\ &\Leftrightarrow u(0, 1, 0, 0) = u(p, 0, 0, (1-p)) \\ &\Leftrightarrow u_B = p \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} C &\sim qA+(1-q)D \\ &\Leftrightarrow u(0,0,1,0)=u(q,0,0,(1-q)) \\ &\Leftrightarrow u_B = q \end{aligned}$$

Por tanto,

$$u(p_A,p_B,p_C,p_D)=p_A+p_Bp+p_Cq$$

es una representación de las preferencias.

(b) Con el criterio (1) las probabilidades de los sucesos (A), (B), (C), y (D) son:

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{99}{100}\frac{90}{100}=\frac{891}{1000} \\ p_B &= \frac{99}{100}\frac{10}{100}=\frac{990}{10000} \\ p_C &= \frac{1}{100}\frac{90}{100}=\frac{9}{1000} \\ p_D &= \frac{1}{100}\frac{10}{100}=\frac{1}{1000} \end{aligned}$$

La utilidada del criterio (1) es, por tanto,

$$u_1=\frac{891}{1000}+\frac{990}{1000}p+\frac{9}{1000}q$$

Mientras que, con el criterio (2) las probabilidades de los sucesos (A), (B), (C) y (D) son:

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{99}{100}\frac{85}{100}=\frac{8415}{10000} \\ p_B &= \frac{99}{100}\frac{15}{100}=\frac{1485}{10000} \\ p_C &= \frac{1}{100}\frac{95}{100}=\frac{95}{10000} \\ p_D &= \frac{1}{100}\frac{5}{100}=\frac{5}{10000} \end{aligned}$$

con una utilidad de

$$u_2=\frac{8415}{10000}+\frac{1485}{10000}p+\frac{95}{10000}q$$

Por tanto, $u_1>u_2 \Leftrightarrow u_1-u_2>0 \Leftrightarrow \frac{99}{2000}-\frac{95}{2000}p-\frac{1}{2000}q>0 \Leftrightarrow 99>99p+q$

---

(3) Un individuo tienen una función de utilidad $u(x)=\ln x$ sobre cantidades monetarias, una riqueza inicial w y una probabilidad subjetiva p de que su equipo favorito gane la liga. Sabiendo que elige apostar una cantidad x_0 a favor de su equipo favorito, determinar la probabilidad subjetiva p.

Solución: Supongamos que el agente apuesta la cantidad monetaria x. En este caso, con probabilidad p obtendrá $w+x$ y con probabilidad $1-p$ obtendrá $w-x$. Por tanto, si apuesta x, su utilidad será

$$U(x)=p\ln(w+x)+(1-p)\ln(w-x)$$

El agente elige apostar una cantidad monetaria x_0 que maximiza su utilidad. Escribiendo las condiciones de primer orden, obtenemos que

$$U'(x_0)=\frac{p}{w+x_0}-\frac{1-p}{w-x_0}=0$$

de donde, despejando obtenemos

$$p=\frac{w+x_0}{2w}$$

---

(4) Un agente averso al riesgo tiene una riqueza inicial de w, pero puede perder D u.m. con probabilidad π. Puede comprar un seguro a un precio unitario de q, por unidad monetaria asegurada.

(a) Probar que si el seguro no es actuarialmente justo y $q > \pi$, entonces el agente elige una cantidad de seguro $\alpha^* < D$ (no se asegura completamente).

(b) (riesgo moral) Supongamos ahora que el agente puede reducir la probabilidad de accidente π incurriendo en un gasto por anticipado de z. Es decir si invierte z u.m. entonces la probabilidad de accidente es $\pi(z)$ con $\pi'(z) < 0$, $\pi''(z) \geq 0$. Suponiendo que el seguro es actuarialmente justo ($q = \pi(z)$), determinar el nivel óptimo z^* elegido por el individuo.

Solución: (a) Supongamos que el agente tiene utilidad esperada

$$U(\alpha) = (1-\pi)v(w - \alpha q) + \pi v(w - \alpha q - D + \alpha)$$

siendo v una función creciente y cóncava (porque el agente es averso al riesgo). La función v es la utilidad del agente en cantidades monetarias. El problema del agente es

$$\begin{array}{ll} \max & (1-\pi)v(w-\alpha q) + \pi v(w - \alpha q - D + \alpha) \\ \text{s.a.} & \alpha \geq 0 \end{array}$$

y la condición de primer orden es

$$-q(1-\pi)v'(w - \alpha^* q) + (1-q)\pi v'(w - \alpha^* q - D + \alpha^*) = 0$$

es decir,

$$q(1-\pi)v'(w - \alpha^* q) = (1-q)\pi v'(w - \alpha^* q - D + \alpha^*)$$

Como

$$q > \pi$$

tenemos que

$$1 - \pi > 1 - q$$

por lo que

$$q(1-\pi) > (1-q)\pi$$

De la condición de primer orden obtenemos ahora que

$$v'(w - \alpha^* q) < v'(w - \alpha^* q - D + \alpha^*)$$

Y como v' es decreciente, concluimos que

$$w - \alpha^* q > w - \alpha^* q - D + \alpha^*$$

es decir,

$$\alpha < D$$

---

(5) Consideremos un agente **averso al riesgo** con la función de utilidad $v(x)$ sobre cantidades monetarias y preferencias

$$U(F) = \int v(z)\, dF(z)$$

sobre loterías.

Supongamos que en el futuro hay dos estados posibles que ocurren con probabilidades π y $1-\pi$ y que el agente puede elegir entre dos activos, $r_1 = (1,1)$ y $r_2 = (0,3)$ cuyos precios son, respectivamente $q_1 = 1$ y $q_2 = 1$. (Por ejemplo, el activo r_2 paga 0 unidades monetarias si (con probabilidad π) ocurre el estado 1 y paga 3 unidades monetarias si (con probabilidad $1-\pi$) ocurre el estado 2. La riqueza inicial del agente es w. Llamamos α a la cantidad de unidades del activo r_2 que compraría el agente.

(a) Determinar para qué valores de π el agente elige $\alpha = 0$ ó $\alpha = w$.

(b) Suponiendo que la función de utilidad del agente es
$$v(x) = \sqrt{x}$$
calcular la cantidad, α, de unidades del activo r_2 que compraría el agente. ¿Cómo cambia α al variar la renta inicial w del agente? ¿Cómo cambia α/w al variar la renta inicial w del agente? Calcular los coeficientes de aversión absoluta y de aversión relativa al riesgo del agente. Explicar los resultados obtenidos utilizando estos coeficientes.

Solución:

(a) Si el agente compra α unidades del activo r_2, entonces su utilidad es
$$U(\alpha) = \pi v(w-\alpha) + (1-\pi)v(w+2\alpha)$$
La derivada es
$$U'(\alpha) = -\pi v'(w-\alpha) + 2(1-\pi)v'(w+2\alpha)$$
Para que $\alpha = 0$ sea un óptimo debe verificarse que $U'(0) \leq 0$. Esto ocurre si y sólo si
$$-\pi v'(w) + 2(1-\pi)v'(w) = v'(w)(2-3\pi) \leq 0$$
es decir, si y sólo si
$$\pi \geq \frac{2}{3}$$
Para que $\alpha = w$ sea un óptimo debe verificarse que $U'(w) \geq 0$. Esto ocurre si y sólo si
$$-\pi v'(0) + 2(1-\pi)v'(3w) \geq 0$$
es decir, si y sólo si
$$\pi \leq \frac{2v'(3w)}{v'(0) + 2v'(3w)}$$
(b) Aplicando la condición de primer orden $U'(\alpha) = 0$ a la función de utilidad
$$v(x) = \sqrt{x}$$
obtenemos la ecuación
$$\frac{\pi}{\sqrt{w-\alpha}} = \frac{2(1-\pi)}{\sqrt{w+2\alpha}}$$
es decir
$$\frac{\pi^2}{w-\alpha} = \frac{4(1-\pi)^2}{w+2\alpha}$$
Despejamos α y obtenemos
$$\alpha(w) = \frac{3\pi^2 - 8\pi + 4}{2\pi^2 + 4(1-\pi)^2}w = \frac{3\pi^2 - 8\pi + 4}{6\pi^2 - 8\pi + 4}w$$
El denominador es positivo para todos los valores de π. Las raíces del numerador son
$$\pi = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} = \frac{2}{3}, 2$$
por tanto el signo del numerador es
$$3\pi^2 - 8\pi + 4 \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{si } 0 \leq \pi \leq 2/3, \\ \leq 0 & \text{si } 2/3 \leq \pi \leq 1. \end{cases}$$
Recordando el apartado anterior, vemos que,
$$\alpha(w) = \begin{cases} \frac{3\pi^2-8\pi+4}{6\pi^2-8\pi+4}w & \text{si } 0 \leq \pi \leq 2/3, \\ 0 & \text{si } 2/3 \leq \pi \leq 1. \end{cases}$$
y, por tanto,
$$\alpha(w) \text{es creciente en } w$$
$$\alpha(w)/w \text{es constante en } w$$

Los coeficientes de aversión absoluta y relativa al riesgo son

$$R_a(x) = -\frac{v''(x)}{v'(x)} = \frac{1}{2x}$$
$$R_r(x) = -x\frac{v''(x)}{v'(x)} = \frac{1}{2}$$

Como el coeficiente de aversión absoluta al riesgo es decreciente, la cantidad que el agente invierte en el activo de riesgo es creciente con la renta. Y como el coeficiente de aversión relativa al riesgo es constante, la fracción de la renta que el agente invierte en el activo de riesgo es constante.

---

(6) Supongamos que el conjunto de sucesos es finito $C = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, donde los sucesos están ordenados en orden decreciente $c_0 \succeq c_1 \succeq \ldots \succeq c_n$ según una cierta relación de preferencias $\succeq$ que satisface los axiomas de continuidad y de independencia. Sea u una función de utilidad que representa a la relación de preferencias $\succeq$. Identificamos al conjunto $\mathcal{L}$ de loterías sobre C con el símplice de dimensión n. Probar que las soluciones de los problemas

$$\max_{p\in\mathcal{L}} u(p) \quad \text{y} \quad \min_{p\in\mathcal{L}} u(p)$$

se alcanzan en alguno de los puntos $c_0, c_1, \ldots, c_n$.

Solución: Podemos suponer que

$$V(p_0, p_1, \ldots, p_n) = p_0 u_0 + \cdots + p_n u_n$$

con $u_0 \geq u_1 \geq \cdots \geq u_n$, $p_0 + p_1 + \cdots + p_n = 1$ entonces

$$\begin{aligned} u(p_0, p_1, \ldots, p_n) &= p_0 u_0 + \cdots + p_n u_n \\ &\leq u_0(p_0 + p_1 + \cdots + p_n) = u_0 = u(1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Por lo que para toda lotería $c \in \mathcal{L}$ se verifica que $u(c_0) \geq u(c)$. Análogamente, $u(c_n) \leq u(c)$ para toda lotería $c \in \mathcal{L}$.

---

(7) Un individuo con coche tiene ω euros y se enfrenta a tres alternativas (excluyentes) sobre su futuro: (i) con probabilidad p_1 sufrirá un accidente pequeño, perdiendo L_1 euros; (ii) con probabilidad p_2 sufrirá un accidente grave perdiendo $L_2 > L_1$ euros; y (iii) con probabilidad $1 - p_1 - p_2$ no sufrirá ningún accidente y se quedará con su renta ω.

El agente, que es averso al riesgo y maximiza su utilidad esperada, puede elegir entre dos tipos de seguros: (i) el primero es una póliza con franquicia en la que el agente tiene que pagar r y la compañía de seguros le pagará $L_i - D$ en caso de accidente. (ii) el segundo ofrece cobertura parcial. Cuesta r y la compañía le pagará $(1-\alpha)L_i$ en caso de accidente $(0 < \alpha < 1)$. Supongamos que $r = p_1(L_1 - D) + p_2(L_2 - D) = p_1(1-\alpha)L_1 + p_2(1-\alpha)L_2$. Demostrar que el individuo siempre comprará la póliza con franquicia.

Solución:
Con el seguro 1 (seguro con franquicia) el agente se enfrenta a la lotería L_1:

$$\begin{aligned} \omega - r - D &\text{ con probabilidad } p_1 \\ \omega - r - D &\text{ con probabilidad } p_2 \\ \omega - r &\text{ con probabilidad } p_3 \end{aligned}$$

mientras que con el seguro 2 (cobertura parcial) la lotería sería, L_2:

$$\begin{aligned} \omega - r - \alpha L_1 &\text{ con probabilidad } p_1 \\ \omega - r - \alpha L_2 &\text{ con probabilidad } p_2 \\ \omega - r &\text{ con probabilidad } p_3 \end{aligned}$$

Supongamos que su función de utilidad es de la forma

$$u(x_1, x_2, x_3) = p_1 v(x_1) + p_2 v(x_2) + p_3 v(x_3)$$

con v cóncava y creciente (ya que es averso al riesgo).

Tenemos que

$$\begin{aligned} U(L_1) &= p_1 v(\omega - r - D) + p_2 v(\omega - r - D) + p_3 v(\omega - r) \\ &= (p_1 + p_2) v(\omega - r - D) + p_3 v(\omega - r) \\ U(L_2) &= p_1 v(\omega - r - \alpha L_1) + p_2 v(\omega - r - \alpha L_2) + p_3 v(\omega - r) \end{aligned}$$

El agente prefiere L_1 a $L_2 \Leftrightarrow U(L_1) \geq U(L_2) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2) v(\omega - r - D) &\geq p_1 v(\omega - r - \alpha L_1) + p_2 v(\omega - r - \alpha L_2) \\ v(\omega - r - D) &\geq \frac{p_1}{p_1 + p_2} v(\omega - r - \alpha L_1) + \frac{p_2}{p_1 + p_2} v(\omega - r - \alpha L_2) \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned} p_1(L_1 - D) + p_2(L_2 - D) &= p_1 L_1 + p_2 L_2 - (p_1 + p_2) D \\ p_1(1 - \alpha) L_1 + p_2(1 - \alpha) L_2 &= p_1 L_1 + p_2 L_2 - \alpha(p_1 L_1 + p_2 L_2) \end{aligned}$$

por lo que $(p_1 + p_2) D = \alpha(p_1 L_1 + \alpha p_2 L_2)$.

Sea ahora $q_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2}$ y $q_2 = \frac{p_2}{p_1 + p_2}$ por lo que $q_1 + q_2 = 1$.

Como v es cóncava,

$$v(q_1(\omega - r - \alpha L_1) + q_2(\omega - r - \alpha L_2)) \geq q_1 v(\omega - r - \alpha L_1) + q_2 v(\omega - r - \alpha L_2)$$

pero

$$\begin{aligned} q_1(\omega - r - \alpha L_1) + q_2(\omega - r - \alpha L_2) &= (q_1 + q_2)(\omega - r) - \alpha(q_1 L_1 + q_2 L_2) \\ &= \omega - r - \frac{\alpha}{p_1 + p_2}(p_1 L_1 + p_2 L_2) \\ &= w - r - D \end{aligned}$$

Por tanto,

$$v(\omega - r - D) \geq q_1 v(\omega - r - \alpha L_1) + q_2 v(\omega - r - \alpha L_2)$$

que es lo que queríamos demostrar.

---

(8) Consideremos un agente con una renta inicial de $m = 10$ y una función de utilidad $u(x) = \ln x$ sobre cantidades monetarias. El agente consume una cantidad c de la renta hoy y ahorra el resto para consumir mañana. La tasa de interés es $r = 5/100$. Además mañana el agente recibe una renta adicional que es incierta (por ejemplo, debido a incertidumbre en el trabajo): con probabilidad $\pi = 1/2$ recibe $y + \alpha$ y con probabilidad $1 - \pi = 1/2$ recibe $y - \alpha$, con $y = 5$ y $0 \leq \alpha \leq 5$.

(a) Plantear el problema de elección de consumo hoy, c, del agente.

(b) Expresar el consumo hoy $c(\alpha)$ y el ahorro del agente como funciones de α.

(c) Probar que $c'(\alpha) < 0$, es decir, al aumentar el riesgo en el futuro, el agente consume menos hoy y ahorra más para el futuro.

Solución:

(a) Suponiendo que las preferencias del agente sobre loterías verifican las hipótesis del teorema de utilidad esperada, su utilidad si hoy consume c es

$$\begin{aligned} V(c) &= \ln(c) + \pi * \ln((1 + r) * (m - c) + y + \alpha) + (1 - \pi) * \ln((1 + r) * (m - c) + y - \alpha) \\ &= \ln c + \frac{1}{2} \ln\left[5 + \frac{21(10 - c)}{20} - \alpha\right] + \frac{1}{2} \ln\left[5 + \frac{21(10 - c)}{20} + \alpha\right] \end{aligned}$$

(b) La condición de primer orden es

$$\frac{1}{c} = \frac{21}{620 - 42c - 40\alpha} + \frac{21}{620 - 42c + 40\alpha}$$

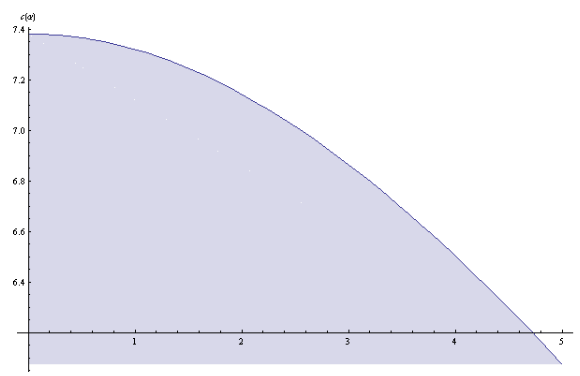
y de aquí despejamos el consumo

$$c(\alpha) = \frac{465}{42} - \frac{5\sqrt{961 + 32\alpha^2}}{42}$$

(c) La derivada es

$$c'(\alpha) = -\frac{80\alpha}{21\sqrt{961 + 32\alpha^2}} < 0$$

La gráfica de $c(\alpha)$ es,



---

(9) Consideremos un inversor con una función de utilidad sobre dinero $u(x) = x - 5x^2/100$ definida para $x \leq 10$, con preferencias sobre dinero del tipo utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern y una riqueza inicial w. Supongamos que hay dos posibles estados en el futuro uno favorable y otro desfavorable. La probabilidad de cada uno es $1/2$. Supongamos también que hay dos activos. Un bono del estado que tiene un precio de 1 y paga 1 en cualquier caso. Y un activo de riesgo que cuesta q por unidad y paga 2 en el caso favorable y 0 en el estado desfavorable.

(a) Calcular la función de demanda/oferta del activo de riesgo bajo la hipótesis de que $q < 1$.
(b) Dibuja un diagrama de la función de demanda/oferta del activo de riesgo ¿Es un bien normal?
(c) Supongamos que $q \geq 1$. Calcular la función de demanda/oferta del activo de riesgo. ?'Cambia algo si se permiten ventas al corto (ventas negativas del activo)?

Solución:

(a) La función de utilidad es $\frac{1}{2}u(x_1) + \frac{1}{2}u(x_2) = \frac{1}{2}[u(x_1) + u(x_2)]$. La función de utilidad esperada es

$$\begin{aligned} E[u] &= \frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{5}{100}x_1^2 + x_2 - \frac{5}{100}x_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 - \frac{5}{100}(x_1^2 + x_2^2)\right) \end{aligned}$$

Sea z la cantidad de activos de riesgo que el agente compra. Entonces $y = \omega - qz$ es la cantidad de bonos que compra. Las posibilidades son: $\omega - qz + 2z$ y $\omega - qz$. La utilidad de este portafolio es

$$
\begin{aligned}
U(z) &= \frac{1}{2}\left((\omega - qz + 2z) + (\omega - qz) - \frac{5}{100}\left[(\omega - qz + 2z)^2 + (\omega - qz)^2\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\omega - 2qz + 2z - \frac{5}{100}\left[\omega^2 + q^2z^2 + 4z^2 + 4\omega z - 2\omega qz - 4qz^2 + \omega^2 + q^2z^2 - 2\omega qz\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\omega + 2(1-q)z - \frac{5}{100}\left[2\omega^2 + (4\omega - 4\omega q)z + (4 - 4q + 2q^2)z^2\right]\right) \\
&= \omega + (1-q)z - \frac{5}{100}\left[\omega^2 + 2\omega(1-q)z + (2 - 2q + q^2)z^2\right]
\end{aligned}
$$

Entonces $U'(z) = (1-q) - \frac{5}{50}[\omega(1-q) + (2 - 2q + q^2)z]$ por lo que $U'(z) = 0 \Leftrightarrow$

(1)
$$
z(q) = \frac{(10-\omega)(1-q)}{q^2 - 2q + 2}
$$

observamos que $q^2 - 2q + 2 = (q-1)^2 + 1 > 0$ por lo que si $q < 1$ entonces $z(q) > 0$.

(b) La derivada de $z(q)$ es

$$
\begin{aligned}
z'(q) &= (10-\omega)\frac{-q^2 + 2q - 2 - (1-q)(2q-2)}{(q^2 - 2q + 2)^2} \\
&= (10-\omega)\frac{-q^2 + 2q - 2 - 2q + 2 + 2q^2 - 2q}{(q^2 - 2q + 2)^2} \\
&= \frac{(q^2 - 2q)(10-\omega)}{(q^2 - 2q + 2)^2} \\
&= (10-\omega)\frac{q(q-2)}{(q^2 - 2q + 2)^2} < 0 \text{ si } q \leq 1 \text{ y } \omega < 10
\end{aligned}
$$

vemos que el activo de riesgo es un bien normal si $q < 1$. Se puede comprobar que $z''(q) < 0$ si $q < 1$ por lo que la gráfica de z (para $0 \leq q \leq 5$ es

(c) Si $q \geq 1$ entonces $z(q)$ en (**??**) es negativo. Si no se permiten ventas al corto, entonces el agente elegirá $z = 0$. Si se permiten ventas al corto elegirá

$$
z(q) = \frac{(10-\omega)(1-q)}{q^2 - 2q + 2}
$$

si $q > 2$ el activo no es un bien normal.

---

(10) Un agente es averso al riesgo y maximiza la utilidad esperada. Tiene una probabilidad de $1/2$ de sufrir un accidente que le costará $L/2$. Una empresa ofrece un seguro actuarialmente justo. Para aquellas personas que no contratan el seguro y sufren el accidente, el estado les compensa con $L/2$. ¿Cuál será la cantidad de seguro que compra el agente?

(11) Un contribuyente obtiene una renta y. Llamemos x a la cantidad que declara al rellenar su declaración de la renta. Suponemos que $x \leq y$ y que su tipo impositivo es t, es decir el contribuyente declara a hacienda que debe pagar unos impuestos de tx. Con una probabilidad p, Hacienda inspecciona al contribuyente y descubre su verdadera renta. En este caso, el contribuyente debe pagar los impuestos correspondientes a su renta, es decir ty, más una multa $\theta(y-x)$ por la cantidad evadida. Si Hacienda no inspecciona al contribuyente, asume que la declaración presentada por éste es correcta.

(a) El agente tiene una utilidad sobre dinero $u(x)$ de la que sólo sabemos que es averso al riesgo. Supongamos que la tasa impositiva t y la multa θ están determinadas por el parlamento. Si Hacienda desea que el contribuyente declare su verdadera renta, ¿Cuál es la probabilidad mínima con la que Hacienda debe realizar la inspección?

(b) Suponiendo que el agente tiene una utilidad sobre dinero $u(x) = \sqrt{x}$ y que $p = 0.1$, $t = 0.3$, $\theta = 2$, $y = 20.000$ euros, calcular la cantidad evadida por el agente.

Solución: Solución:

(a) El agente se queda con la renta $y - ty - \theta(y-x) = (1-t-\theta)y + \theta x$ con probabilidad p e $y - tx$ con probabilidad $1-p$. Por lo que, si declara que su renta es x, su utilidad esperada es

$$V(x) = pu\left((1-t-\theta)y + \theta x\right) + (1-p)u(y-tx)$$

Su objetivo es maximizar esta función. La condición de primer orden es

$$V'(x^*) \quad \begin{cases} \leq 0 & \text{si } x^* = 0, \\ = 0 & \text{si } 0 < x^* < y, \\ \geq 0 & \text{si } x^* = y. \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que $V(x)$ es cóncava y la condición de primer orden es suficiente para un máximo. En particular, para que el máximo se alcance en $x^* = y$ deber verificarse que

$$V'(y) = p\theta u'\left((1-t-\theta)y + \theta x\right) - (1-p)tu'(y-tx)|_{x=y} \geq 0$$

es decir,

$$p\theta u'(y+ty) - (1-p)tu'(y-ty) = \left(p\theta - (1-p)t\right)u'(y-ty) \geq 0$$

Como $u'(y+ty) > 0$, debe verificarse que

$$p\theta - (1-p)t \geq 0$$

es decir,

$$p \geq \frac{t}{\theta + t}$$

(b) Vemos que

$$p = 0'1 < \frac{t}{\theta + t} = 1'3$$

por lo que la solución es interior. La condición de primer orden (calculada en el apartado anterior) se reduce a

$$p\theta u'((1-t-\theta)y + \theta x) - (1-p)tu'(y-tx) = 0$$

es decir

$$\frac{p\theta}{\sqrt{((1-t-\theta)y + \theta x)}} = \frac{(1-p)t}{y - tx}$$

o sea,

$$p^2\theta^2 y - p^2\theta^2 tx = (1-p)^2t^2(1-t-\theta)y + \theta(1-p)^2t^2x$$

de donde

$$x^* = \frac{p^2\theta^2 - (1-p)^2t^2(1-t-\theta)}{p^2\theta^2 t + \theta(1-p)^2t^2} y \approx 17081.1$$

---

(12) Un agente con una función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern sobre dinero $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable dos veces es averso al riesgo ($u'' < 0$). El agente organiza una fiesta. La recaudación depende del tiempo que hará ese día. Si no llueve la recaudación será de y euros, mientras que si llueve será de z euros (suponemos $z < y$). La probabilidad de que llueva es p. Una compañía de seguros le ofrece un seguro con cobertura parcial: El agente paga una cantidad qx por el seguro y la compañía le paga la cantidad $(y-z)x$ si (y sólo si) llueve.

(a) Probar que el agente elige un seguro completo $x = 1$ si el precio del seguro es actuarialmente justo, es decir si $q = p(y-z)$.

(b) Probar que si el precio del seguro no es actuarialmente justo, es decir si $q > p(y-z)$ entonces el agente elige asegurarse sólo parcialmente $x < 1$.

Solución:

(a) La función utilidad esperada del agente es

$$V(x) = pu(z - qx + (y-z)x) + (1-p)u(y - qx)$$

donde x es la cantidad de seguro que compra. La condición de primer orden es

$$V'(x) = p(y - z - q)u'(z - qx + (y-z)x) - (1-p)qu'(y - qx) = 0$$

es decir

$$p(y - z - q)u'(z - qx + (y-z)x) = (1-p)qu'(y - qx)$$

Como, $q = p(y-z)$ tenemos que

$$y - z - q = (1-p)(y-z)$$

por lo que la condición de primer orden es equivalente a

$$p(1-p)(y-z)u'(z - qx + (y-z)x) = (1-p)p(y-z)u'(y - qx)$$

Y como $0 < p < 1$ y $z < y$, esta ecuación es equivalente a

$$u'(z - qx + (y-z)x) = u'(y - qx)$$

Como la función es estrictamente cóncava, tenemos que u' es estrictamente decreciente y debe verificarse que

$$z - qx + (y-z)x = y - qx$$

es decir,

$$x = 1$$

(b) Supongamos ahora que $q > p(y-z)$. Entonces,

$$y - z - q < y - z - p(y-z) = (1-p)(y-z)$$

Y, de la condición de primer orden,

$$(1-p)qu'(y - qx) = p(y - z - q)u'(z - qx + (y-z)x)$$

obtenemos

$$(1-p)p(y-z)u'(y - qx)(1-p)p(y-z) < u'(z - qx + (y-z)x)$$

(ya que $p(y-z) < q$ y $y - z - q < (1-p)(y-z)$).

Es decir,

$$u'(y - qx) < u'(z - qx + (y-z)x)$$

Y como u' es estrictamente decreciente, debe verificarse que

$$z - qx + (y-z)x < y - qx$$

es decir,

$$(y-z)x < y - z$$

por lo que

$$x < 1$$

(13) Consideremos un agente con unas preferencias sobre dinero representadas por la función de utilidad u y unas preferencias sobre loterías que verifican los axiomas del Teorema de la Utilidad Esperada. Su riqueza inicial es w. Tiene la oportunidad de participar en la lotería nacional con un premio total de P. Si gasta x unidades monetarias en la lotería su probabilidad de ganar el premio es $\pi = x/P$. (Suponemos que nunca gastará una cantidad de dinero mayor que el premio, es decir $0 \leq x \leq P$)

(a) Calcular las condiciones de primer y segundo orden del problema. Determinar si el agente gasta una cantidad positiva en la lotería o no, dependiendo de si es averso al riesgo ($u'' < 0$) or amante del riesgo ($u'' > 0$). (Sugerencia: Interpretar gráficamente las condiciones de primer orden)

(b) Calcular la cantidad óptima x_0 de lotería comprada para el caso en que $u(z) = -e^{-z}$. (Este apartado es, en principio, independiente y mucho más fácil que el anterior)

Solución:

(a) Si el agente gasta x unidades monetarias en la lotería entonces su utilidad esperada es

$$V(x) = \pi u(w + P - x) + (1 - \pi)u(w - x)$$

con $\pi = x/P$. Por tanto, su utilidad es

$$V(x) = \frac{x}{P}u(w + P - x) + (1 - \frac{x}{P})u(w - x) = \frac{x}{P}u(w + P - x) + (\frac{P - x}{P})u(w - x)$$

Podemos utilizar, de manera equivalente, la utilidad (Por abuso de notación utilizamos el mismo nombre)

$$V(x) = xu(w + P - x) + (P - x)u(w - x)$$

La derivada primera de V es

$$V'(x) = u(w + P - x) - xu'(w + P - x) - u(w - x) - (P - x)u'(w - x)$$

y la derivada segunda

$$\begin{aligned} V''(x) &= -u'(w + P - x) - u'(w + P - x) \\ &\quad + xu''(w + P - x) + u'(w - x) + u'(w - x) + (P - x)u''(w - x) \\ &= 2(u'(w - x) - u'(w + P - x)) + xu''(w + P - x) + (P - x)u''(w - x) \end{aligned}$$

Para que $x = 0$ sea una solución debe verificarse que,

$$V'(0) = u(w + P) - u(w) - Pu'(w) \leq 0$$

Esta condición se puede escribir como

$$\frac{u(w + P) - u(w)}{P} \leq u'(w)$$

Si, por ejemplo, $u'' < 0$, entonces se verifica que

$$u'(w) > \frac{u(w + P) - u(w)}{P}$$

y, por tanto, $x = 0$ es un máximo local. También es un máximo global. Ya que, como u es (estríctamente) cóncava, para cualquier $0 < x < P$,

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{x}{P}u(w + P - x) + (1 - \frac{x}{P})u(w - x) \\ &< u\left(\frac{x}{P}(w + P - x) + (1 - \frac{x}{P})(w - x)\right) = u(w) = V(0) \end{aligned}$$

En cambio si $u'' > 0$, entonces

$$u'(w) < \frac{u(w + P) - u(w)}{P}$$

y $x = 0$ no puede ser un máximo local. El agente compra una cantidad positiva de lotería en este caso.

(b) Como la función de utilidad es estríctamente cóncava, por el apartado a), el agente compraría 0 unidades de lotería.
Otra forma de probar esto, sería la siguiente. La utilidad esperada del agente (después de multiplicar por P) es
$$V(x) = -xe^{-w-P+x} - (P-x)e^{-w+x}$$
La condición de primer orden es
$$\begin{aligned} V'(x) &= -e^{-w-P+x} - xe^{-w-P+x} + e^{-w+x} - (P-x)e^{-w+x} \\ &= e^{-w+x}\left(-e^{-P} - xe^{-P} + 1 - P + x\right) = 0 \end{aligned}$$

Como $e^{-w+x} > 0$, entonces
$$-e^{-P} - xe^{-P} + 1 - P + x = 0$$
es decir, V' se anula en el punto
$$x_0 = \frac{e^{-P} + P - 1}{1 - e^{-P}}$$
Por el apartado a), $V'(0) < 0$. Así que $V'(x) < 0$ si $0 \leq x < x_0$ y $V'(x) > 0$ si $x > x_0$. Por tanto, x_0 es un mínimo.
El máximo se alcanza en un punto extremo: 0 ó w. Vemos que
$$\begin{aligned} V(0) &= -Pe^{-w} \\ V(w) &= -we^{-P} - P + w \end{aligned}$$
y el máximo se alcanza en 0, si $we^{-P} + P - w > Pe^{-w}$, ó en w, si se verifica la desigualdad contraria. Para determinar cuál de ellas se verifica consideramos la función
$$f(t) = -te^{-P} - P + t + Pe^{-t}$$
y observamos que
$$\begin{aligned} f(w) &= -we^{-P} - P + w + Pe^{-w} = V(w) - V(0) \\ f(P) &= -Pe^{-P} - P + P + Pe^{-P} = 0 \\ f(0) &= -P + P = 0 \end{aligned}$$
Además,
$$f'(t) = -e^{-P} + 1 - Pe^{-t}, \quad f''(t) = Pe^{-t} > 0$$
por tanto f es estrictamente convexa. Suponemos ahora que $0 < w < P$ (Es razonable suponer que el premio de la lotería es mayor que la renta del individuo). Entonces, Como $f(P) = f(0) = 0$, $0 < w < P$ y f es estrictamente convexa, tenemos que $f(w) < f(P) = f(0) = 0$, es decir, el máximo se alcanza en 0.

---

(14) Consideremos una economía con dos activos. Un bono del estado que paga 1 en cualquier estado y un activo de riesgo que paga a con probabilidad π y b con probabilidad $1 - \pi$. Supongamos que las demandas de los activos son, respectivamente, x_1 y x_2. Supongamos que el agente tiene preferencias del tipo von Neumann–Morgenstern y es averso al riesgo. Su riqueza inicial es 1 y éstos son también los precios de ambos activos.
(a) Dar una condición necesaria en a y b para que la demanda del bono sea positiva.
(b) Dar una condición necesaria en a y b para que la demanda del activo de riesgo sea positiva.
Asumiendo que las condiciones obtenidas en (a) y (b) se satisfacen,
(c) Escribir las condiciones de primer orden del problema de la maximización de la utilidad del agente.
(d) Suponiendo que $a < 1$, probar que $dx_1/da \leq 0$.
(e) Calcular el signo de $dx_1/d\pi$.

Solución: Supongamos $a \neq b$
(a) Si $\min\{a, b\} \geq 1$, entonces el activo de riesgo paga en todos los estados al menos lo mismo que el bono y en un estado paga algo estrictamente mayor por lo que el agente no comprará el bono. Una condición necesaria es que $\min\{a, b\} < 1$.

(b) Si $\pi a+(1-\pi)b \leq 1$, entonces el valor esperado del activo es menor que los pagos del activo sin riesgo. Si el agente es averso al riesgo no comprará el activo de riesgo. La condición necesaria es que $\pi a+(1-\pi)b > 1$.

(c) La restricción presupuestaria del agente es $\omega = x_1 + x_2$, despejando obtenemos $x_2 = \omega - x_1$ por lo que la lotería a la que se enfrenta el agente es:

$$\begin{aligned} x_1 + a(\omega - x_1) &\text{ con probabilidad } \pi \\ x_1 + b(\omega - x_1) &\text{ con probabilidad } 1-\pi \end{aligned}$$

La utilidad del agente es

$$U(x_1) = \pi u(x_1 + a(\omega - x_1)) + (1-\pi)u(x_1 + b(\omega - x_1))$$

y la condición de primer orden es

$$U'(x_1) = \pi u'(x_1 + a(\omega - x_1))(1-a) + (1-\pi)u'(x_1 + b(\omega - x_1))(1-b) = 0$$

(d) Fijamos b. Supongamos que $a < 1$ y que es variable. En este caso la solución de las condiciones de primer orden definen implícitamente a $x_1(a)$ como función de a. Derivando implícitamente queda

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dU'(x_1(a))}{da} \\ &= \pi u''(x_1 + a(\omega - x_1))(1-a)[x_1'(1-a) + \omega - x_1] \\ &- \pi u'(x_1 + a(\omega - x_1)) + (1-\pi)u''(x_1 + b(\omega - x_1))(1-b)[x_1'(1-b)] \\ &= \pi(1-a)^2 u''(x_1 + a(\omega - x_1))x_1' + \pi(\omega - x_1)(1-a)u''(x_1 + b(\omega - x_1)) \\ &- \pi u'(x_1 + a(\omega - x_1)) + (1-\pi)(1-b)^2 u''(x_1 + b(\omega - x_1))x_1' = 0 \end{aligned}$$

Despejando $x_1'(a)$ queda

$$x_1'(a) = \frac{\pi u'(x_1 + a(\omega - x_1)) - \pi(\omega - x_1)(1-a)u''(x_1 + a(\omega - x_1))}{\pi(1-a)^2 u''(x_1 + a(\omega - x_1)) + (1-\pi)(1-b)^2 u''(x_1 + b(\omega - x_1))}$$

Teniendo en cuenta que $a < 1$, $u' > 0$ y $u'' < 0$ vemos que

$$x_1'(a) < 0$$

(e) Ahora suponemos que a y b son fijos y π es variable. En este caso, $x_1(\pi)$ definido por las condiciones de primer orden (**??**) es una función de π. Derivando implícitamente respecto a π obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= u'(x_1 + a(\omega - x_1))(1-a) + \pi u''(x_1 + a(\omega - x_1))(1-a)^2 x_1' \\ &- u'(x_1 + b(\omega - x_1))(1-b) + (1-\pi)u''(x_1 + b(\omega - x_1))(1-b)^2 x_1' \end{aligned}$$

Despejando $x_1'(\pi)$:

$$x_1'(\pi) = \frac{u'(x_1 + b(\omega - x_1))(1-b) - u'(x_1 + a(\omega - x_1))(1-a)}{\pi u''(x_1 + a(\omega - x_1))(1-a)^2 + (1-\pi)u''(x_1 + b(\omega - x_1))(1-b)^2}$$

Por el apartado (b) $\pi a + (1-\pi)b > 1$. Como $a < 1$, debe ocurrir que $b > 1$, es decir $1 - b < 0$. Teniendo en cuenta esto vemos que

$$x_1'(\pi) > 0$$

---

(15) Supongamos que un individuo tiene preferencias dadas por la función de utilidad $u_1(x_1, x_2) = \pi_1 v(x_1) + \pi_2 v(x_2)$ con $\pi_1, \pi_2 \geq 0$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Supongamos que $v' > 0$ y que $v'' < 0$. Probar que si el individuo está indiferente entre los puntos (x_1, x_2) y (x_1', x_2') entonces preferirá estrictamente el punto

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_1', \lambda x_2 + (1-\lambda)x_2') \qquad 0 < \lambda < 1$$

a cualquiera de los dos anteriores.

Solución: Como $v' > 0$, $v'' < 0$, la fución v es creciente y cóncava. Entonces,

$$v(\lambda x_i + (1-\lambda)x_i') \geq \lambda v(x_i) + (1-\lambda)v(x_i')$$

por lo que

$$\begin{aligned} u_1(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_1', \lambda x_2 + (1-\lambda)x_2') &= \pi_1 v(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_1') + \pi_2 v(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_2') \\ &\geq \pi_1(\lambda v(x_1) + (1-\lambda)v(x_1')) + \pi_2(\lambda v(x_2) + (1-\lambda)v(x_2')) \\ &= \lambda[\pi_1 v(x_1) + \pi_2 v(x_2)] + (1-\lambda)[\pi_1 v(x_1') + \pi v(x_2')] \end{aligned}$$

Como el agente está indiferente entre (x_1, x_2) y (x_1', x_2') entonces

$$\pi_1 v(x_1) + \pi_2 v(x_2) = \pi_1 v(x_1') + \pi_2 v(x_2') = A$$

por tanto,

$$\begin{aligned} u_1(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_1', \lambda x_2 + (1-\lambda)x_2') &= \lambda A + (1-\lambda)A = A \\ &= \pi_1 v(x_1) + \pi_2 v(x_2) \\ &= \pi_1 v(x_1') + \pi_2 v(x_2') \end{aligned}$$

es decir, el agente prefiere $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_1', \lambda x_2 + (1-\lambda)x_2')$ a (x_1, x_2) y (x_1', x_2').

---

(16) Teoría del arrepentimiento: Supongamos dos loterías $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_s)$. Cada uno de los sucesos ocurre con probabilidades $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s$. El arrepentimiento esperado con la lotería x respecto de la lotería y es

$$A(x, y) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s h\left(\max\{0, y_s - x_s\}\right)$$

donde h es una función creciente. Es decir, h mide el arrepentimiento del individuo al elegir x una vez sabe cuál ha sido el estado resultante. Se dice que x es tan bueno como y en presencia de arrepentimiento si $A(x, y) \leq A(y, x)$.

Supongamos que hay tres estados, que $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3$ y que $h(x) = \sqrt{x}$. Considerar las loterías

$$\begin{aligned} x &= (0, -2, 1) \\ y &= (0, 2, -2) \\ z &= (2, -3, -1) \end{aligned}$$

Probar que el orden de preferencias inducido sobres estas tres loterías no es transitivo.

Solución: Un cálculo sencillo demuestra que

$$\begin{aligned} 3A(x, y) &= 0 + \sqrt{4} + 0 = 2 \\ 3A(y, x) &= 0 + 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

por lo que y es tan bueno como x. Por otra parte,

$$\begin{aligned} 3A(x, z) &= \sqrt{2} + 0 + 0 = \sqrt{2} \\ 3A(z, x) &= 0 + 1 + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

por lo que x es tan bueno como z. Finalmente,

$$\begin{aligned} 3A(y, z) &= \sqrt{2} + 0 + 1 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.41421 \\ 3A(z, y) &= 0 + \sqrt{5} + 0 \approx 2.23607 \end{aligned}$$

por lo que z es tan bueno como y.

---

(17) Supongamos que un agente tiene una función de utilidad sobre dinero $u(x) = x^2 + \alpha x$ con $\alpha < 0$, definida para $x \leq \frac{-1}{2\alpha}$, con preferencias sobre dinero del tipo utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern. Probar que para toda función de distribución F,

$$U(F) = (\sigma^2(F) + \mu(F)^2) + \alpha\mu(F)$$

donde

$$\mu(F) = \int x\, dF, \qquad \sigma^2(F) = \int \left(x - \mu(F)\right)^2\, dF$$

es decir, la utilidad sobre una función de distribución está determinada por la media y la varianza de la distribución.

Solución:

$$
\begin{aligned}
U(F) &= \int u(x)\,dF = \int (\alpha x + x^2)\,dF \\
&= \alpha \int x\,dF + \int x^2\,dF \\
&= \alpha\mu(F) + \sigma^2(F) + \mu^2(F)
\end{aligned}
$$

ya que

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(F) &= \int (x-\mu(F))^2\,dF \\
&= \int (x^2 - 2\mu(F)x + \mu^2(F))\,dF \\
&= \int x^2\,dF - 2\mu(F)\int x\,dF + \mu^2(F)\int dF \\
&= \int x^2\,dF - 2\mu(F)^2 + \mu^2(F) \\
&= \int x^2\,dF - \mu^2(F)
\end{aligned}
$$

---

(18) Calcular las siguientes integrales de Riemann–Stieltjes:

(a) $\int_0^3 x\,d([x]-x)$, donde $[x]$ representa la parte entera de x, es decir el mayor entero mas pequeño que x. (Por ejemplo $[3/2] = [1.5] = 1$). (Este ejercicio es muy fácil si se representa correctamente la función $x - [x]$.)

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dF(x)$, siendo

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/3 & \text{si } 1 \le x < 6 \\ 5/6 & \text{si } 6 \le x < 10 \\ 1 & \text{si } 10 \le x. \end{cases}
$$

(c) $\int_0^{\infty} e^{-x}\,d(x^2)$.

Solución:

(a)

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 x\,d([x]-x) &= x([x]-x)|_0^3 - \int_0^3 ([x]-x)\,dx \\
&= \int_0^3 ([x]-x)\,dx = 3\frac{1}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

(b) Sean $a < 1$, $b > 10$,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b x^2\,dF(x) = x^2\ F(x)|_a^b - 2\int_a^b xF(x)\,dx \\
= b^2F(b) - a^2F(a) - \Bigg[2\int_a^1 xF(x)\,dx \\
+2\int_1^6 xF(x)\,dx + 2\int_6^{10} xF(x)\,dx + 2\int_{10}^b xF(x)\,dx\Bigg]
\end{aligned}
$$

teniendo en cuenta que $F(b) = 1$, $F(a) = 0$, $F(x) = 0$ si $a < x < 1$, etc.

$$\begin{aligned}\int_a^b x^2\,dF(x) &= b^2 - \left[2\int_1^6 \frac{1}{3}x\,dx + 2\int_6^{10}\frac{5}{6}x\,dx + 2\int_{10}^b x\,dx\right]\\ &= b^2 - \frac{1}{3}x^2\Big|_1^6 - \frac{5}{6}x^2\Big|_6^{10} - x^2\big|_{10}^b\\ &= b^2 - \frac{1}{3}6^2 + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}10^2 + \frac{5}{6}6^2 - b^2 + 10^2\\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}6^2 + \frac{1}{6}10^2\end{aligned}$$

(c) Sea $b > 0$,

$$\int_0^b e^{-x}\,dx^2 = x^2e^{-x}\big|_0^b + \int_0^b x^2e^{-x}\,dx$$

Integrando por partes, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-x}\,dx &= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx\\ &= -x^2e^{-x} + 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right]\\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^b &= -\,x^2e^{-x}\big|_0^b - x^2e^{-x}\big|_0^b - 2xe^{-x}\big|_0^b - 2e^{-x}\big|_0^b\\ &= -2be^{-b} - 2e^{-b} + 2\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\,dx^2 &= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx^2\\ &= \lim_{b\to+\infty}(-2be^{-b} - 2e^{-b} + 2)\\ &= 2\end{aligned}$$

---

(19) Supongamos que $u(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y que $F(x)$ tiene una derivada continua $F'(x) = f(x)$ en ese mismo intervalo. Probar que

$$\int_a^b u(x)\,dF(x) = \int_a^b u(x)f(x)\,dx.$$

Aplicar este resultado para calcular otra vez $\int_0^\infty e^{-x}\,d(x^2)$.

Solución:

$$\int_a^b u(x)\,dF = u(x)F(x)\big|_a^b - \int_a^b u'(x)F(x)\,dx$$

Integrando por partes,

$$\int_a^b u'(x)F(x)\,dx = u(x)F(x)\big|_a^b - \int_a^b u(x)f(x)\,dx$$

y sustituyendo este valor en la primera fórmula,

$$\int_a^b u(x)\,dF = \int_a^b u(x)f(x)\,dx$$

---

(20) Supongamos un agente averso al riesgo con una función de utilizada $u(x)$ sobre cantidades monetarias. Dada una lotería F se define la prima de riesgo, para el agente u, como el número $\pi_u(F, w)$ definido por la ecuación

$$u(w - \pi_u(F, w)) = \int_{\mathbb{R}} u(w + z)\, dF(z)$$

Probar que si otro agente con una función de utilidad v(x) sobre cantidades monetarias es más averso al riesgo que u entonces $\pi_v(F, w) > \pi_u(F, w)$ para toda lotería F y para toda cantidad monetaria w. (Sugerencia: utilizar la desigualdad de Jensen: si g es una función cóncava, entonces $\int g(z)\, dF(z) < g\left(\int z\, dF(z)\right)$.)

Solución: Como v es más averso al riesgo que u, podemos encontrar una función g, cóncava, creciente y tal que $v(x) = g(u(x))$. Dada una lotería F y una cantidad monetaria w se verifica que

$$\begin{aligned}
v(w - \pi_v(F, w)) &= \int_{\mathbb{R}} v(w + z)\, dF(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(u(w + z))\, dF(z) \quad \text{(desigualdad de Jensen))} \\
&< g\left(\int_{\mathbb{R}} (u(w + z))\, dF(z)\right) \\
&= g\left(u(w - \pi_u(F, w))\right) \\
&= v(w - \pi_u(F, w))
\end{aligned}$$

y como v es creciente debe verificarse que $w - \pi_v(F, w) < w - \pi_u(F, w)$, es decir $\pi_u(F, w) < \pi_v(F, w)$.

---

(21) Consideremos un agente con una función de utilidad sobre cantidades monetarias

$$u(x) = -e^{-rx}$$

donde r es el coeficiente de aversión absoluta al riesgo del agente. Las preferencias sobre loterías F de este agente verifican las hipótesis del Teorema de la Utilidad Esperada:

$$V(F) = \int_{\mathbb{R}} u(z)\, dF(z)$$

Calcular $V(F)$ cuando la función de distribución de una lotería F es una normal de media μ y varianza σ^2. Es decir, la función de densidad de F es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Solución: La función de densidad de F es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
V(F) &= \frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-rx} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= \frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-rx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= \frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\left(x-\mu+r\sigma^2\right)^2 + \frac{r^2\sigma^2}{2} - \mu r}\, dx \\
&= \frac{-e^{\frac{r^2\sigma^2}{2} - \mu r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-\left(x-\mu+r\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= -e^{\frac{r^2\sigma^2}{2} - \mu r}
\end{aligned}$$

ya que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-\left(x-\mu+r\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma\sqrt{2\pi}$$

---

(22) Consideremos un agente que maximiza la utilidad esperada y con una función de utilidad $u(x)$ sobre cantidades monetarias que es derivable, estrictamente creciente y estrictamente cóncava. El agente evalúa un activo cuyo pago en el futuro ser realiza según una función de distribución normal con media μ y varianza σ^2. Por tanto, la función de densidad de pagos del activo es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Entonces su valoración del activo se puede representar por la función

$$\varphi(\mu,\sigma^2) = \int_{\mathbb{R}} u(x) f(x)\, dx$$

(a) Probar que $\varphi(\mu,\sigma^2)$ es creciente en μ.
(b) Probar que $\varphi(\mu,\sigma^2)$ es decreciente en σ^2.
(Suponer que

$$\lim_{x\to-\infty} u'(x)e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} u'(x)e^{-x^2} = 0)$$

Solución: Resolución: Haciendo el cambio de variable

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \text{o} \quad x = \sigma t + \mu$$

vemos que

$$\begin{aligned}\varphi(\mu,\sigma^2) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(\sigma t+\mu) e^{\frac{-t^2}{2}}\, dx\end{aligned}$$

Derivando respecto a μ,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u'(\sigma t+\mu) e^{\frac{-t^2}{2}}\, dx > 0$$

ya que el integrando es positivo, por ser u estrictamente creciente.

Derivando respecto a σ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u'(\sigma t+\mu) t e^{\frac{-t^2}{2}}\, dx \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} u'(\sigma t+\mu) e^{\frac{-t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u''(\sigma t+\mu) e^{\frac{-t^2}{2}}\, dx\end{aligned}$$

donde hemos integrado por partes haciendo

$$v = u'(\sigma t+\mu) \;\; du = te^{\frac{-t^2}{2}}\, dx$$

$$dv = \sigma u''(\sigma t+\mu) \;\; u = -e^{\frac{-t^2}{2}}$$

Pero

$$\lim_{x\to-\infty} u'(\sigma t+\mu)e^{\frac{-t^2}{2}} = \lim_{x\to+\infty} u'(\sigma t+\mu)e^{\frac{-t^2}{2}} = 0$$

por lo que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u''(\sigma t+\mu) e^{\frac{-t^2}{2}}\, dx < 0$$

porque $u''(\cdot) < 0$.

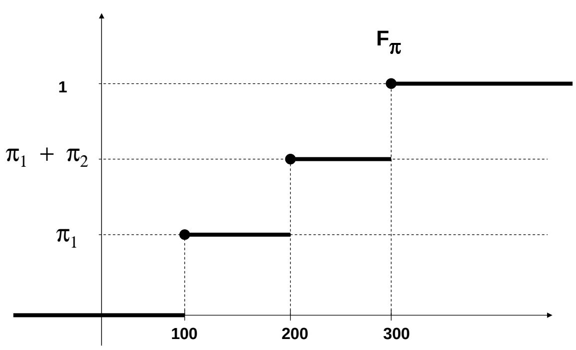
---

(23) Consideremos el conjunto de loterías con tres premios: 100, 200 y 300. Fijemos una lotería $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. En el símplice de probabilidades, dibuja las loterías que dominan a la lotería π estocásticamente de primer orden.

Solución: Dada una lotería $p = (p_1, p_2, p_3)$ cualquiera, la función de distribución es

$$F_p(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 100; \\ \pi_1, & \text{si } 100 \leq x < 200; \\ \pi_1 + \pi_2, & \text{si } 200 \leq x < 300; \\ 1, & \text{si } x \geq 300; \end{cases}$$

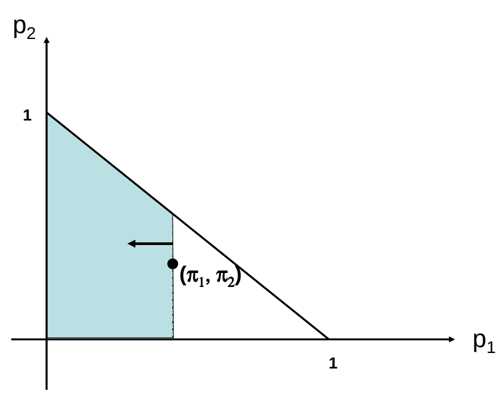
Para el caso de la la lotería π la representación gráfica de su función de distribución F_π es



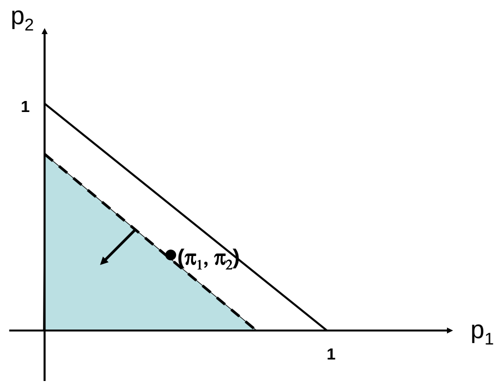
La lotería p domina a la lotería π estocásticamente de primer orden si la gráfica de F_p está por debajo de la gráfica de F_π. Esto ocurre si se dan las dos condiciones siguientes

$$\begin{aligned} p_1 &\leq \pi_1 \\ p_1 + p_2 &\leq \pi_1 + \pi_2 \end{aligned}$$

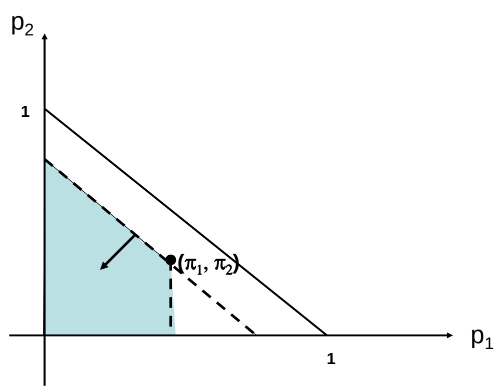
Gráficamente la condición $p_1 \leq \pi_1$ es



y la condición $p_1 + p_2 \leq \pi_1 + \pi_2$ es



por lo que las loterías que dominan a a lotería π estocásticamente de primer orden son las siguientes



---

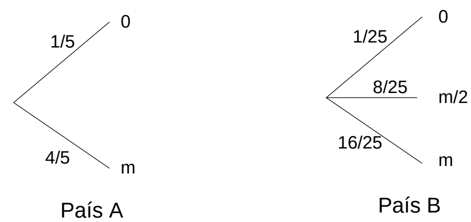
(24) Supongamos que hay dos agentes cuya función de utilidad sobre cantidades monetarias es $v(x) = \sqrt{x}$. Cada uno de ellos tiene una casa cuyo valor es m. Cada agente se enfrenta (independientemente de lo que le ocurra al otro) a una probabilidad de $1/5$ de que haya incendio y la casa quede destruida totalmente.

En el país A la regulación estipula que, en caso de incendio, cada agente tiene que asumir sus propias pérdidas. En el país B la ley obliga a que los gastos de los incendios se repartan equitativamente entre los vecinos.

(a) ¿Cuál es el valor monetario esperado en cada uno de los países?
(b) ¿En qué país elegirían construir su casa los agentes?
(c) Razonar si la respuesta a los apartados anteriores sigue siendo válida para cualquier función de utilidad **cóncava** sobre cantidades monetarias $v(x)$ y cualquier probabilidad de incendio π.
(d) Supongamos que un inmigrante se instala en el país A y otro en el país B. ¿En cuál de los dos países mejoran (estrictamente) los nativos originales?

Solución:

(a) Las loterías en cada país son



El valor esperado en el país A es

$$0 \times \frac{1}{5} + m \times \frac{4}{5} = \times \frac{4m}{5}$$

mientras que en el país B el valor esperado es

$$0 \times \frac{1}{25} + \frac{m}{2} \times \frac{8}{25} + m \times \frac{16}{25} = \times \frac{4m}{5}$$

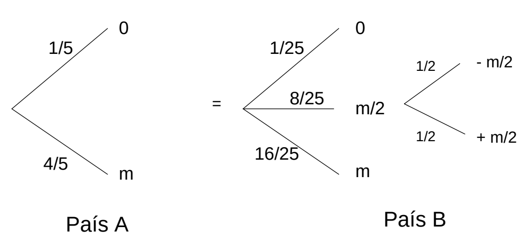
(b) La utilidad esperada en el país A es

$$v_A = \frac{1}{5}v(0) + \frac{4}{5}v(m)$$

y la utilidad esperada en el país B es

$$\begin{aligned}
v_B &= \frac{1}{25}v(0) + \frac{8}{25}v\left(\frac{m}{2}\right) + \frac{16}{25}v(m) \\
&= \frac{1}{25}v(0) + \frac{8}{25}v\left(\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times m\right) + \frac{16}{25}v(m) \\
&\geq \frac{1}{25}v(0) + \frac{8}{25}\left[\frac{1}{2}v(0) + \frac{1}{2}v(m)\right] + \frac{16}{25}v(m) \\
&= \left(\frac{1}{25} + \frac{4}{25}\right)v(0) + \left(\frac{4}{25} + \frac{16}{25}\right)v(m) \\
&= \frac{1}{5}v(0) + \frac{4}{5}v(m) = v_A
\end{aligned}$$

Gráficamente,



por lo que cualquier agente averso al riesgo, prefiere vivir en el país B.

(c) La respuesta es la misma que en el apartado anterior.

(d) Gráficamente,