

PROBLEMAS TEMA I.

- (1) Consideremos una economía de intercambio con dos agentes con preferencias del tipo Cobb–Douglas

$$\begin{aligned}u_1(x, y) &= x^\alpha y^{1-\alpha} \\ u_2(x, y) &= x^\beta y^{1-\beta}\end{aligned}$$

con $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Los recursos iniciales son $\omega^1 \gg 0$, $\omega^2 \gg 0$.

- (a) Calcular las asignaciones que son Pareto eficientes.
 - (b) Calcular los precios de equilibrio.
- (2) Supongamos que las funciones de utilidad de los agentes son $u_1(x, y) = \max\{x, y\}$, $u_2(x, y) = \min\{x, y\}$ y los recursos iniciales agregados son $\omega = (4, 1)$. Representar las asignaciones Pareto eficientes.
- (3) Supongamos que las funciones de utilidad de los agentes son $u_1(x, y) = x + 2y$, $u_2(x, y) = \min\{x, y\}$ y los recursos iniciales agregados son $\omega = (3, 1)$. Representar las asignaciones Pareto eficientes.
- (4) Consideremos una economía de intercambio con dos consumidores y dos bienes. El conjunto de consumo de cada agente es $X_i = R_+^2$. La dotación total de recursos iniciales es $\omega = (1, 1)$. Determinar el conjunto de las asignaciones Pareto eficientes para cada uno de los siguientes pares de preferencias:
- (a) $u_1(x_1^1, x_2^1) = \ln x_1^1 + \ln x_2^1$, $u_2(x_1^2, x_2^2) = \ln x_1^2 + \ln x_2^2$.
 - (b) $u_1(x_1^1, x_2^1) = x_1^1$, $u_2(x_1^2, x_2^2) = x_2^2$.
 - (c) $u_1(x_1^1, x_2^1) = x_1^1 x_2^1$, $u_2(x_1^2, x_2^2) = x_2^2$.
 - (d) $u_1(x_1^1, x_2^1) = \ln x_1^1 + (x_2^1)^2$, $u_2(x_1^2, x_2^2) = x_1^2 x_2^2$.
 - (e) $u_1(x_1^1, x_2^1) = \min\{x_1^1, 2x_2^1\}$, $u_2(x_1^2, x_2^2) = \min\{x_1^2, x_2^2\}$.
- (5) Para cada una de las siguientes economías de intercambio con conjuntos de consumo $X_1 = X_2 = R_+^2$
- Calcular las funciones de demanda de cada agente, el precio de equilibrio y el equilibrio de Walras.
 - Determinar el conjunto de asignaciones que son Óptimos de Pareto. Utilizar esta información para calcular de nuevo los precios y las asignaciones de equilibrio.
- (a) $u_i(x, y) = 2 \ln x + \ln y$, $i = 1, 2$, $\omega^1 = (1, 1)$, $\omega^2 = (1, 1)$.
 - (b) $u_i(x, y) = x^\rho + y^\rho$, $i = 1, 2$, $0 < \rho < 1$, $\omega^1 = (1, 0)$, $\omega^2 = (0, 1)$.
 - (c) $u_1(x_1^1, y) = \sqrt{xy}$, $u_2(x, y) = (xy)^2$, $\omega^1 = (1, 0)$, $\omega^2 = (0, 1)$.
 - (d) $u_1(x, y) = xy$, $u_2(x, y) = \ln x + \ln y$, $\omega^1 = (18, 4)$, $\omega^2 = (3, 6)$.
 - (e) $u_1(x, y) = x + \frac{y^2}{2}$, $u_2(x, y) = x + y^2$, $\omega^1 = (0, 4)$, $\omega^2 = (4, 2)$.
 - (f) $u_1(x, y) = 2\sqrt{xy}$, $u_2(x, y) = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$, $\omega^1 = (3/2, 1/2)$, $\omega^2 = (3/2, 1/2)$.
 - (g) $u_1(x, y) = a \ln x + (1 - a) \ln y$ (con $0 < a < 1$), $u_2(x, y) = \min\{x, y\}$, $\omega^1 = (0, 1)$, $\omega^2 = (1, 0)$.
- (6) Las funciones de utilidad de los agentes son $u_1(x, y) = x + y$, $u_2(x, y) = \max\{x, y\}$ y los recursos iniciales son $\omega^1 = \omega^2 = (1/2, 1/2)$.
- (a) Representar la situación en una caja de Edgeworth.
 - (b) En el equilibrio de Walras, ¿cuál es la relación entre los precios?
 - (c) ¿Cuál es la asignación en el equilibrio de Walras?
- (7) Las funciones de utilidad de los agentes son $u_1(x, y) = x + 2y$, $u_2(x, y) = \sqrt{xy}$ y los recursos iniciales son $\omega^1 = (1, 2)$, $\omega^2 = (1, 3)$. Encontrar el equilibrio de Walras.
- (8) Las funciones de utilidad de los agentes son $u_1(x, y) = u_2(x, y) = xy^2$. Los recursos iniciales son $\omega^1 = (40, 160)$, $\omega^2 = (240, 120)$.
- (a) Calcular el precio y la asignación de equilibrio.
 - (b) Demuestra que la asignación $x^1 = (80, 80)$, $x^2 = (200, 200)$ es una asignación Pareto eficiente.
 - (c) ¿Qué precios soportan la asignación en el apartado (b)?
 - (d) ¿Qué reasignación de los recursos iniciales convierte a la asignación en el apartado (b) en un equilibrio de Walras? ¿Es única esa reasignación?
 - (e) Representa los apartados anteriores en una caja de Edgeworth.

- (9) Considerar una economía con dos bienes y dos agentes con funciones de utilidad

$$u^1(x, y) = xy^2$$

$$u^2(x, y) = x^2y$$

Los recursos agregados son $(10, 20)$.

- (a) Encontrar una asignación Pareto eficiente (a, b) en la que $u^2(a, b) = 8000/27$. (probar que la solución es $x_1^1 = 10/3, x_2^1 = 40/3$)
 (b) Supongamos que los recursos iniciales son $w^1 = (10, 0), w^2 = (0, 20)$. Encontrar el equilibrio de Walras.
- (10) En una economía de intercambio con dos bienes, hay dos tipos de consumidores: (1) m_1 consumidores de tipo 1 con preferencias

$$\frac{1}{2} \ln x_1 + \frac{1}{3} \ln y_1$$

e inicialmente una unidad de cada bien por cada uno de los individuos. (2) m_2 consumidores de tipo 2 con preferencias

$$2x_2 + y_2$$

y cada uno de estos agentes tiene una asignación inicial de 12 unidades de cada bien. Determinar el equilibrio cuando $m_1 = m_2$ ¿Cómo cambia el equilibrio al cambiar m_1 ?

- (11) Consideremos una economía de intercambio con dos agentes cuyas preferencias están representadas por las funciones de utilidad

$$\begin{aligned} u_1(x_1^1, x_2^1) &= x_1^1 - \frac{1}{8}(x_2^1)^{-8} \\ u_2(x_1^2, x_2^2) &= -\frac{1}{8}(x_1^2)^{-8} + x_2^2 \end{aligned}$$

Sus recursos iniciales son $\omega^1 = (2, r), \omega^2 = (r, 2)$, donde r es momentáneamente un parámetro. Probar que las funciones de demanda de los agentes son

$$\begin{aligned} x_1(p_1, p_2) &= \left(2 + r \left(\frac{p_2}{p_1} \right) - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{8/9}, \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-1/9} \right) \\ x_2(p_1, p_2) &= \left(\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{-1/9}, 2 + r \left(\frac{p_1}{p_2} \right) - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{8/9} \right) \end{aligned}$$

donde r está elegido de forma que la demanda de cada bien es positiva. Probar que los precios de equilibrio están determinados por la ecuación

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-1/9} + r \left(\frac{p_1}{p_2} \right) - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{8/9} = r$$

comprobar que para el valor $r = 2^{8/9} - 2^{1/9}$ hay tres soluciones

$$\frac{p_1}{p_2} = 1, 2, \frac{1}{2}$$

y por tanto hay tres equilibrios competitivos.

- (12) Supongamos que un agente tiene una relación de preferencias $\succeq$ localmente no saciada y que x^* es un elemento maximal de $\succeq$ en el conjunto presupuestario $\{x \in X : p \cdot x \leq z\}$. Probar que si $y \succeq x^*$, entonces $p \cdot y \geq z$.
- (13) Supongamos que la relación de preferencias $\succeq$ es localmente no saciada. Sea x^* una asignación factible y p un vector de precios. Probar que las dos condiciones siguientes son equivalentes:
- (a) Si $y \succeq x^*$ entonces $p \cdot y \geq p \cdot x^*$.
 (b) x^* es una solución del problema

$$\text{s.a. } \left. \begin{array}{l} \min p \cdot x \\ x \succeq x^* \end{array} \right\}$$

- (14) Consideremos una economía en la que las preferencias de los agentes dependen no sólo del consumo propio sino también del bienestar de los demás agentes. Es decir, la utilidad de cada agente $i = 1, \dots, I$ depende de su consumo x^i y del bienestar “de consumo” alcanzado por los demás agentes $v_1(x^1), \dots, v_I(x^I)$. Asumimos, por tanto que las preferencias del agente $i = 1, \dots, I$ se pueden representar por una “función de felicidad” u^i de la forma $u^i(x^1, \dots, x^I) = u^i(v_1(x^1), \dots, v_I(x^I))$. Suponiendo que las funciones $U_1, \dots, U_n$ son crecientes en todos los argumentos, probar que si $x = (x^1, \dots, x^I)$ es una asignación Pareto eficiente relativa a las preferencias u^i , también es un óptimo de Pareto con las preferencias v_i .
- (15) Consideremos una economía con dos agentes y dos bienes. Los agentes $i = 1, 2$ tienen las mismas preferencias representadas por la función de utilidad

$$u^i(x, y) = x^2 + y^2$$

Las asignaciones iniciales son $w^1 = (4, 2) = w^2$. Probar que no puede haber unos precios de equilibrio.

- (16) Supongamos una economía en la que todos los agentes tienen las mismas preferencias y que éstas son estrictamente convexas. Probar que dividir los recursos iniciales de forma igualitaria es una asignación Pareto eficiente. ¿Es cierta esta afirmación si no todos los agentes son iguales?
- (17) Consideremos una economía con 15 agentes y 2 bienes. Un agente tiene la función de utilidad

$$u(x, y) = \ln x + \ln y$$

En una asignación Pareto eficiente al agente le corresponde la cesta $(10, 5)$. Calcular los precios competitivos que corresponden a la asignación Pareto Eficiente.

- (18) Sea $E = \{(u^i, \omega^i) : i = 1, 2, \dots, I\}$ una economía de intercambio, con $u^i : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua estrictamente cóncava y monótona, $\omega^i \gg 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, I$.

En esta economía hay una autoridad que establece impuestos y reparte subvenciones de acuerdo al siguiente sistema.

- Cada consumidor paga como impuesto una fracción α de su renta: $t^i(p) = \alpha p \cdot \omega^i$.
- Lo recaudado en el apartado anterior se reparte de forma igualitaria entre todos los agentes. Es decir cada agente recibe

$$S^i(p) = \frac{\alpha}{I} \sum_{i=1}^I p \cdot \omega^i = \frac{\alpha}{I} p \cdot \omega$$

donde

$$\omega = \sum_{i=1}^I \omega^i$$

En esta economía se define un equilibrio competitivo con impuestos y subvenciones como una asignación $x^1, \dots, x^I \in \mathbb{R}_+^n$ y unos precios $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tales que

- Para cada $i = 1, 2, \dots, I$, la asignación x^i es una solución de

$$\begin{aligned} \max_x \quad & u(x) \\ \text{s.a.} \quad & p \cdot x \leq p \cdot \omega^i - t^i(p) + S^i(p) \end{aligned}$$

- $\sum_{i=1}^I x^i \leq \sum_{i=1}^I \omega^i$.

Probar que existe un equilibrio en esta economía. ¿Es este sistema más igualitario que un sistema sin subvenciones e impuestos?

- (19) Consideremos una economía de intercambio con dos bienes y dos agentes cuyas preferencias vienen determinadas por la función de utilidad

$$u^i(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}, \quad i = 1, 2, \quad 0 < \alpha < 1$$

y los recursos globales son

$$\omega^1 + \omega^2 = (10, 10)$$

Probar que la asignación

$$x_1^1 = x_2^1 = x_1^2 = x_2^2 = 5$$

es Pareto eficiente. Determinar unos recursos iniciales ω^1, ω^2 con $\omega^1 \neq \omega^2$, tales que, en esta economía, la asignación anterior es un equilibrio competitivo.

- (20) Consideremos una economía de intercambio con dos bienes y tres agentes cuyas preferencias vienen determinadas por las funciones de utilidad siguientes

$$\begin{aligned}u^1(x, y) &= xy \\u^2(x, y) &= xy^2 \\u^3(x, y) &= 5 \ln x + \ln y\end{aligned}$$

y los recursos globales son

$$\omega^1 + \omega^2 + \omega^3 = (7, 8)$$

Probar que la asignación $x^1 = (1, 2)$, $x^2 = (1, 4)$, $x^3 = (5, 2)$ es Pareto eficiente. Calcular unas precios para los que esta asignación sea un equilibrio.

- (21) Consideremos una economía de intercambio con dos bienes y dos agentes cuyas preferencias vienen determinadas por las funciones de utilidad siguientes

$$\begin{aligned}u^1(x, y) &= \sqrt{xy} + \ln x + \ln y \\u^2(x, y) &= -4/x - 1/y\end{aligned}$$

y los recursos globales son

$$\omega^1 + \omega^2 = (3, 6)$$

Supongamos que utilizamos la función de bienestar social $W = au^1 + bu^2$. Probar que la asignación $x^1 = (1, 4)$, $x^2 = (2, 2)$ es Pareto eficiente. Determinar unos pesos a , b para los que la función de bienestar social W elegiría la asignación anterior.