

PROBLEMAS TEMA I.

- (1) Consideremos una economía de intercambio con dos agentes con preferencias del tipo Cobb–Douglas

$$u_1(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$$

$$u_2(x, y) = x^\beta y^{1-\beta}$$

con $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Los recursos iniciales son $\omega^1 \gg 0$, $\omega^2 \gg 0$.

- (a) Calcular las asignaciones que son Pareto eficientes.
 (b) Calcular los precios de equilibrio.

Solución:

- (a)
- Asignaciones que son Pareto eficientes:**

$$u_1(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$$

$$u_2(x, y) = x^\beta y^{1-\beta}$$

$$\omega^1 = (\omega_1^1, \omega_2^1)$$

$$\omega^2 = (\omega_1^2, \omega_2^2)$$

utilizaremos las siguientes preferencias

$$v_1(x_1, y_1) = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln y_1 = \ln u_1$$

$$v_2(x_2, y_2) = \beta \ln x_2 + (1 - \beta) \ln y_2 = \ln u_2$$

Las asignaciones P.E. son solución de

$$\max \quad t(\alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln y_1) + (1 - t)(\beta \ln x_2 + (1 - \beta) \ln y_2)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= \omega_1 = \omega_1^1 + \omega_1^2 \\ y_1 + y_2 &= \omega_2 = \omega_2^1 + \omega_2^2 \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} : \quad \frac{t\alpha}{x_1} = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} : \quad \frac{(1-t)\beta}{x_2} = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} : \quad \frac{t(1-\alpha)}{y_1} = \mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} : \quad \frac{(1-t)(1-\beta)}{y_2} = \mu$$

De las dos primeras se obtiene

$$t\alpha = \lambda x_1$$

$$(1-t)\beta = \lambda x_2$$

y sumando,

$$t\alpha + (1-t)\beta = \lambda \omega_1$$

por lo que,

$$\lambda = \frac{t\alpha + (1-t)\beta}{\omega_1}$$

Asimismo, de las dos últimas,

$$t(1-\alpha) = \mu y_1$$

$$(1-t)(1-\beta) = \mu y_2$$

y sumando

$$t(1 - \alpha) + (1 - t)(1 - \beta) = \mu\omega_2$$

de donde,

$$\mu = \frac{\omega_2}{t(1 - \alpha) + (1 - t)(1 - \beta)}$$

Las asignaciones P.E. son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{t\alpha}{\lambda} = \frac{t\alpha}{t\alpha + (1 - t)\beta}\omega_1 \\ x_2 &= \frac{(1 - t)\beta}{\lambda} = \frac{(1 - t)\beta}{t\alpha + (1 - t)\beta}\omega_1 \\ y_1 &= \frac{t(1 - \alpha)}{t(1 - \alpha) + (1 - t)(1 - \beta)}\omega_2 \\ y_2 &= \frac{(1 - t)(1 - \beta)}{t(1 - \alpha) + (1 - t)(1 - \beta)}\omega_2 \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq 1.$$

- (b) **Precios de equilibrio:** Sea $p = (p_1, p_2)$ los precios de equilibrio. Llamamos $z^i = p \cdot \omega^i$ la renta del agente $i = 1, 2$, bajo estos precios. La demanda del agente 1 está determinada por el problema de maximización

$$\begin{aligned} \max_{x, y} \quad & x^\alpha y^{1-\alpha} \\ \text{s.a.} \quad & p_1 x + p_2 y = z^1 \end{aligned}$$

El lagrangiano es $L = x^\alpha y^{1-\alpha} + \lambda(z^1 - p_1 x - p_2 y)$. Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= (1 - \alpha) x^\alpha y^{-\alpha} - \lambda p_2 = 0 \\ p_1 x + p_2 y &= z^1 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por x y la segunda por y y sumando, obtenemos

$$x^\alpha y^{1-\alpha} = \lambda(p_1 x + p_2 y) = \lambda z^1$$

Sustituyendo $x^\alpha y^{1-\alpha}$ por λz^1 en las ecuaciones de Lagrange, obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha \lambda z^1 &= \lambda p_1 x \\ (1 - \alpha) \lambda z^1 &= \lambda p_2 y \end{aligned}$$

de donde

$$x_1^1 = \frac{\alpha z^1}{p_1}, \quad x_2^1 = \frac{(1 - \alpha) z^1}{p_2}$$

Análogamente, obtenemos para el agente 2,

$$x_1^2 = \frac{\beta z^2}{p_1}, \quad x_2^2 = \frac{(1 - \beta) z^2}{p_2}$$

En equilibrio, los mercados se vacían, por lo que

$$\begin{aligned} x_1^1 + x_1^2 &= \omega_1^1 + \omega_1^2 \\ x_2^1 + x_2^2 &= \omega_2^1 + \omega_2^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la primera ecuación, vemos que

$$\frac{\alpha z^1}{p_1} + \frac{\beta z^2}{p_1} = \omega_1^1 + \omega_1^2$$

y sustituyendo

$$\begin{aligned}z^1 &= p_1 \omega_1^1 + p_2 \omega_2^1 \\ z^2 &= p_1 \omega_1^2 + p_2 \omega_2^2\end{aligned}$$

obtenemos

$$\alpha \omega_1^1 + \beta \omega_1^2 + \frac{p_2}{p_1} (\alpha \omega_2^1 + \beta \omega_2^2) = \omega_1^1 + \omega_2^1$$

de donde

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(1 - \alpha) \omega_1^1 + (1 - \beta) \omega_1^2}{\alpha \omega_2^1 + \beta \omega_2^2}$$

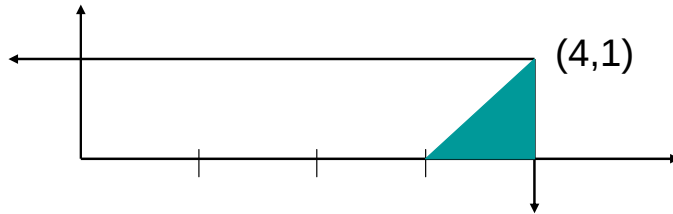
Y, obtenemos los precios de equilibrio

$$\begin{aligned}p_1 &= \alpha \omega_2^1 + \beta \omega_2^2 \\ p_2 &= (1 - \alpha) \omega_1^1 + (1 - \beta) \omega_1^2\end{aligned}$$

Sustituyendo estos precios en las expresiones de x_k^i se obtienen las asignaciones de equilibrio.

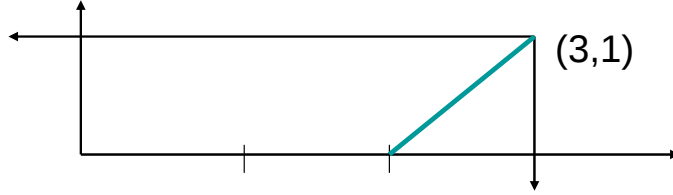
-
- (2) Supongamos que las funciones de utilidad de los agentes son $u_1(x, y) = \max\{x, y\}$, $u_2(x, y) = \min\{x, y\}$ y los recursos iniciales agregados son $\omega = (4, 1)$. Representar las asignaciones Pareto eficientes.
-

Solución: Las asignaciones Pareto eficientes están representadas en el diagrama siguiente



- (3) Supongamos que las funciones de utilidad de los agentes son $u_1(x, y) = x + 2y$, $u_2(x, y) = \min\{x, y\}$ y los recursos iniciales agregados son $\omega = (3, 1)$. Representar las asignaciones Pareto eficientes.

Solución: Las asignaciones Pareto eficientes están representadas en el diagrama siguiente



- (4) Consideremos una economía de intercambio con dos consumidores y dos bienes. El conjunto de consumo de cada agente es $X_i = R_+^2$. La dotación total de recursos iniciales es $\omega = (1, 1)$. Determinar el conjunto de las asignaciones Pareto eficientes para cada uno de los siguientes pares de preferencias:

- (a) $u_1(x_1^1, x_2^1) = \ln x_1^1 + \ln x_2^1$, $u_2(x_1^2, x_2^2) = \ln x_1^2 + \ln x_2^2$.
- (b) $u_1(x_1^1, x_2^1) = x_1^1$, $u_2(x_1^2, x_2^2) = x_2^2$.
- (c) $u_1(x_1^1, x_2^1) = x_1^1 x_2^1$, $u_2(x_1^2, x_2^2) = x_2^2$.
- (d) $u_1(x_1^1, x_2^1) = \ln x_1^1 + (x_2^1)^2$, $u_2(x_1^2, x_2^2) = x_1^2 x_2^2$.
- (e) $u_1(x_1^1, x_2^1) = \min\{x_1^1, 2x_2^1\}$, $u_2(x_1^2, x_2^2) = \min\{x_1^2, x_2^2\}$.

Solución: Apartado a): Las asignaciones Pareto Eficientes corresponden a soluciones del problema siguiente para algunos pesos positivos α_1, α_2 de la función de bienestar social

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha_1 \ln x_1^1 + \alpha_1 \ln x_2^1 + \alpha_2 \ln x_1^2 + \alpha_2 \ln x_2^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1^1 + x_1^2 = 1 \\ & x_2^1 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

el lagrangiano asociado al problema es

$$L = \sum_{i=1}^2 \alpha_i (\ln x_1^i + \ln x_2^i) + \gamma_1 (1 - x_1^1 - x_1^2) + \gamma_2 (1 - x_2^1 - x_2^2)$$

y las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1^1} &= \frac{\alpha_1}{x_1^1} - \gamma_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^1} &= \frac{\alpha_1}{x_2^1} - \gamma_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1^2} &= \frac{\alpha_2}{x_1^2} - \gamma_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^2} &= \frac{\alpha_2}{x_2^2} - \gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

operando obtenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_1 x_1^1 \\ \alpha_2 &= \gamma_1 x_1^2 \\ \alpha_1 &= \gamma_2 x_2^1 \\ \alpha_2 &= \gamma_2 x_2^2 \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras y dos últimas ecuaciones, vemos que $\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, por lo que

$$\begin{aligned}x_1^1 &= x_2^1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \\x_1^2 &= x_2^2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\end{aligned}$$

son las asignaciones Pareto eficientes con $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$. Normalizando $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1 - \alpha$, con $0 \leq \alpha \leq 1$ concluimos que las asignaciones eficientes de Pareto son de la forma

$$\begin{aligned}x_1^1 &= x_2^1 = \alpha \\x_1^2 &= x_2^2 = 1 - \alpha\end{aligned}$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$.

Observemos que este problema también puede resolverse como un caso particular del problema 1.

Apartado b): Como la función de utilidad del primer agente sólo depende del primer bien y la del segundo sólo depende del segundo, la única asignación Pareto eficiente es $(1, 1)$.

Apartado c): El agente 2 es indiferente al primer bien. Las únicas asignaciones Pareto eficiente son de la forma

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1) = (1, t), \quad x^2 = (x_1^2, x_2^2) = (0, 1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Apartado e): Vamos a probar que las asignaciones Pareto eficientes son

$$\{(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = (x, y; 1 - x, 1 - y) : 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2} \leq y \leq x\}$$

Para comprobarlo consideremos una asignación de la forma $(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = (x, y; 1 - x, 1 - y)$ con, por ejemplo,

$$\frac{x}{2} \leq y \leq x$$

entonces

$$u_1(x, y) = \min\{x, 2y\} = x$$

En cuanto al agente 2, tenemos que $y \leq x$ por lo que $x_1^2 = 1 - x \leq 1 - y = x_2^2$ y entonces

$$u_2(1 - x, 1 - y) = \min\{1 - x, 1 - y\} = 1 - x$$

por lo que, siempre que $\frac{x}{2} \leq y \leq x$: ambos agentes son indiferentes a la variación de consumo del segundo bien.

Si, por ejemplo, $y > x > x/2$ (y, por tanto $1 - x > 1 - y$), entonces

$$u_1(x, y) = \min\{x, 2y\} = x < y = u_1(y, y)$$

$$u_2(1 - x, 1 - y) = \min\{1 - x, 1 - y\} = 1 - y = u_2(1 - y, 1 - y)$$

Es decir, la asignación $(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = (y, y; 1 - y, 1 - y)$ domina en el orden de Pareto a la asignación $(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = (x, y; 1 - x, 1 - y)$.

Por otra parte, si $y < x/2 < x$ (y, por tanto $1 - x < 1 - y$), entonces

$$u_1(x, y) = \min\{x, 2y\} = y = u_1(y, y)$$

$$u_2(1 - x, 1 - y) = \min\{1 - x, 1 - y\} = 1 - x < 1 - y = u_2(1 - y, 1 - y)$$

Es decir, la asignación $(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = (y, y; 1 - y, 1 - y)$ domina en el orden de Pareto a la asignación $(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = (x, y; 1 - x, 1 - y)$.

- (5) Para cada una de las siguientes economías de intercambio con conjuntos de consumo $X_1 = X_2 = R_+^2$
- Calcular las funciones de demanda de cada agente, el precio de equilibrio y el equilibrio de Walras.
 - Determinar el conjunto de asignaciones que son Óptimos de Pareto. Utilizar esta información para calcular de nuevo los precios y las asignaciones de equilibrio.
- (a) $u_i(x, y) = 2 \ln x + \ln y$, $i = 1, 2$, $\omega^1 = (1, 1)$, $\omega^2 = (1, 1)$.
- (b) $u_i(x, y) = x^\rho + y^\rho$, $i = 1, 2$, $0 < \rho < 1$, $\omega^1 = (1, 0)$, $\omega^2 = (0, 1)$.
- (c) $u_1(x_1^1, y) = \sqrt{xy}$, $u_2(x, y) = (xy)^2$, $\omega^1 = (1, 0)$, $\omega^2 = (0, 1)$.
- (d) $u_1(x, y) = xy$, $u_2(x, y) = \ln x + \ln y$, $\omega^1 = (18, 4)$, $\omega^2 = (3, 6)$.
- (e) $u_1(x, y) = x + \frac{y}{2}$, $u_2(x, y) = x + y^2$, $\omega^1 = (0, 4)$, $\omega^2 = (4, 2)$.
- (f) $u_1(x, y) = 2\sqrt{xy}$, $u_2(x, y) = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$, $\omega^1 = (3/2, 1/2)$, $\omega^2 = (3/2, 1/2)$.

(g) $u_1(x, y) = a \ln x + (1 - a) \ln y$ (con $0 < a < 1$), $u_2(x, y) = \min\{x, y\}$, $\omega^1 = (0, 1)$, $\omega^2 = (1, 0)$.

Solución:

(a) Este es un caso particular del problema (1) con

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{3}$$

Justifica estos valores de α y β .

(b) **Precios de equilibrio:** Este también es un caso particular del problema (1) con

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3}$$

(Justifica estos valores de α y β). También vamos a resolverlo sin utilizar el problema (1).

Dados los precios $p = (p_1, p_2)$ la demanda del agente 1 está determinada por el problema de maximización

$$\begin{aligned} \max_{x, y} \quad & 2 \ln x + \ln y \\ \text{s.a.} \quad & p_1 x + p_2 y = z^1 \end{aligned}$$

donde $z^1 = p_1 + p_2$ es la renta del agente 1, bajo estos precios.

El lagrangiano es $L = 2 \ln x + \ln y + \lambda(z^1 - p_1 x - p_2 y)$. Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{2}{x} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{1}{y} - \lambda p_2 = 0 \\ p_1 x + p_2 y &= z^1 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por x y la segunda por y y sumando, obtenemos

$$3 = \lambda(p_1 x + p_2 y) = \lambda z^1$$

de donde

$$\lambda = \frac{3}{z^1}$$

y

$$x_1^1 = \frac{2z^1}{3p_1}, \quad x_2^1 = \frac{z^1}{3p_2}$$

Análogamente, obtenemos para el agente 2,

$$x_1^2 = \frac{2z^2}{3p_1}, \quad x_2^2 = \frac{z^2}{3p_2}$$

En equilibrio, los mercados se vacían, por lo que

$$\begin{aligned} x_1^1 + x_1^2 &= \omega_1^1 + \omega_1^2 = 2 \\ x_2^1 + x_2^2 &= \omega_2^1 + \omega_2^2 = 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores obtenidos, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{2}{3p_1}(z^1 + z^2) &= 2 \\ \frac{1}{3p_2}(z^1 + z^2) &= 2 \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2}$$

Obtenemos los precios de equilibrio $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ y las asignaciones de equilibrio

$$x_1^1 = x_1^2 = x_2^1 = x_2^2 = 1$$

Asignaciones Pareto eficientes: Son solución del problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 2\alpha_1 \ln x_1^1 + \alpha_1 \ln x_2^1 + 2\alpha_2 \ln x_1^2 + \alpha_2 \ln x_2^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1^1 + x_2^1 = 2 \\ & x_1^2 + x_2^2 = 2 \end{aligned}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = 2\alpha_1 \ln x_1^1 + \alpha_1 \ln x_2^1 + 2\alpha_2 \ln x_1^2 + \alpha_2 \ln x_2^2 + \gamma_1(2 - x_1^1 - x_2^1) + \gamma_2(2 - x_1^2 - x_2^2)$$

Obtenemos las condiciones de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1^1} &= \frac{2\alpha_1}{x_1^1} - \gamma_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^1} &= \frac{\alpha_1}{x_2^1} - \gamma_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1^2} &= \frac{2\alpha_2}{x_1^2} - \gamma_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^2} &= \frac{\alpha_2}{x_2^2} - \gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

Operando, obtenemos que

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 &= \gamma_1(x_1^1 + x_2^1) = 2\gamma_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= \gamma_2(x_1^2 + x_2^2) = 2\gamma_2 \end{aligned}$$

de donde

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = x_2^1 = \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ x_1^2 &= \frac{2\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = x_2^2 = \frac{2\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_2^1 = t \\ x_1^2 &= x_2^2 = 2 - t \end{aligned}$$

con $0 \leq t \leq 2$.

(c)

- (d) Tras una transformación por una función monótona creciente, vemos que las preferencias de los agentes también pueden representarse por las funciones de utilidad $u_1(x_1^1, x_2^1) = \sqrt{x_1^1 x_2^1}$, $u_2(x_1^2, x_2^2) = \sqrt{x_1^2 x_2^2}$ que son un caso particular de las funciones de utilidad del problema 2 con $\alpha = \beta = 1/2$. Por tanto, los precios de equilibrio son:

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha \omega_2^1 + \beta \omega_2^2 = \frac{1}{2} \\ p_2 &= (1 - \alpha) \omega_1^1 + (1 - \beta) \omega_1^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

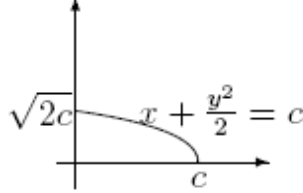
Bajo estos precios, la renta de los agentes es $z^1 = 1/2$, $z^2 = 1/2$. Y las demandas de los agentes son

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{\alpha z^1}{p_1} = \frac{1}{2}, \quad x_2^1 = \frac{(1 - \alpha) z^1}{p_2} = \frac{1}{2} \\ x_1^2 &= \frac{\beta z^2}{p_1} = \frac{1}{2}, \quad x_2^2 = \frac{(1 - \beta) z^2}{p_2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- (e) Las preferencias son del tipo Cobb- Douglas. Es un caso particular del problema 1.
(f) Demanda del agente 1: Las curvas de indiferencia del agente 1 son

$$x + \frac{y^2}{2} = c \Leftrightarrow y = \sqrt{2c - 2x}$$

Gráficamente,

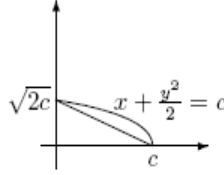


La recta presupuestaria es

$$p_1x + p_2y = 4p_2$$

Los puntos de corte con los ejes son $(0, 4)$, $(\frac{4p_2}{p_1}, 0)$. Hay tres posibilidades (dependiendo de $\frac{p_2}{p_1}$).

Caso I: La recta presupuestaria corta a las curvas de indiferencia en los dos ejes,



Por lo tanto,

$$4 = \sqrt{2c} \Rightarrow c = 8$$

$$\frac{4p_2}{p_1} = c = 8 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 2$$

Si $\frac{p_2}{p_1} = 2$ la demanda del agente 1 es

$$x(p_1, p_2), y(p_1, p_2) = \{(0, 4), (8, 0)\}$$

Vemos que estos puntos verifican las restricciones presupuestarias de los agentes

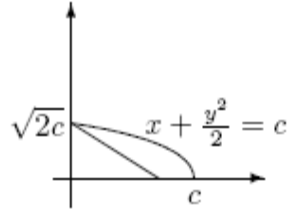
$$u_1(0, 4) = 8$$

$$u_2(8, 0) = 8$$

$$p_1x + p_2y|_{x=0, y=4} = 4p_2$$

$$(p_1x + p_2y)_{x=8, y=0} = 8p_1 = 8 \frac{p_2}{2} = 4p_2$$

Caso II: La recta presupuestaria corta a la curva de indiferencia sólo en el eje vertical,

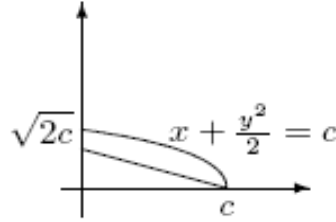


Se verifica $\frac{p_2}{p_1} < 2$. La demanda del agente 1 es

$$x(p_1, p_2) = 0$$

$$y(p_1, p_2) = 4$$

Caso III: La recta presupuestaria corta a la curva de indiferencia sólo en el eje horizontal,



Se verifica $\frac{p_2}{p_1} > 2$ y la demanda del agente 1 es

$$x(p_1, p_2) = 4 \frac{p_2}{p_1}$$

$$y(p_1, p_2) = 0$$

Demanda del agente 2: Las curvas de indiferencia del agente 2 están determinadas implícitamente por la ecuación

$$x + y^2 = c \Leftrightarrow y = \sqrt{c - x}$$

La recta presupuestaria es

$$p_1 x + p_2 y = 4p_1 + 2p_2$$

y corta a los ejes en los puntos,

$$\left(0, \frac{4p_1 + 2p_2}{p_2}\right), \quad \left(\frac{4p_1 + 2p_2}{p_1}, 0\right)$$

De manera análoga al caso del agente 1, tenemos 3 posibilidades, dependiendo de

$$\frac{p_2}{p_1}$$

Caso I: La recta presupuestaria corta a las curvas de indiferencia en los dos ejes. Como el agente está indiferente entre estas dos asignaciones se debe verificar que

$$\left(\frac{4p_1 + 2p_2}{p_2}\right)^2 = \frac{4p_1 + 2p_2}{p_2}$$

$$4p_1 + 2p_2 = \frac{p_2^2}{p_1} \Leftrightarrow 4p_1^2 + 2p_1 p_2 = p_2^2 \Leftrightarrow 4\frac{p_1}{p_2} + 2 = \frac{p_2}{p_1}$$

llamando

$$x = \frac{p_1}{p_2},$$

tenemos que

$$4x + 2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2}$$

Tomamos la solución positiva $x = -1 + \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5} - 1$. Es decir, si $\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{5} - 1$ entonces

$$(x(p), y(p)) = \left\{ \left(0, \frac{4p_1 + p_2}{p_2} \right), \left(\frac{4p_1 + p_2}{p_1}, 0 \right) \right\}$$

Caso II: La recta presupuestaria corta a la curva de indiferencia sólo en el eje vertical. Se verifica que

$$\frac{p_1}{p_2} > \sqrt{5} - 1$$

Entonces

$$(x(p), y(p)) = \left(0, \frac{4p_1 + p_2}{p_2} \right)$$

Caso III: La recta presupuestaria corta a la curva de indiferencia sólo en el eje horizontal. Se verifica que

$$\frac{p_1}{p_2} < \sqrt{5} - 1.$$

La demanda es

$$(x(p), y(p)) = \left(\frac{4p_1 + p_2}{p_2}, 0 \right)$$

Equilibrios de Walras: Como $-1 + \sqrt{5} \approx 2' \dots$, tenemos que $\frac{1}{2} < \sqrt{5} - 1$. Consideramos los casos

- (i) $\frac{p_1}{p_2} < \frac{1}{2}$.
- (ii) $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$.
- (iii) $\frac{1}{2} < \frac{p_1}{p_2} < \sqrt{5} - 1$.
- (iv) $\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{5} - 1$.
- (v) $\frac{p_1}{p_2} > \sqrt{5} - 1$.

Analizamos ahora estos casos

Caso (i) Tenemos que

$$x_1 = 4\frac{p_2}{p_1}, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = \frac{4p_1 + p_2}{p_1}, \quad y_2 = 0$$

La demanda del bien 1 es

$$4\frac{p_2}{p_1} + \frac{4p_1 + p_2}{p_1} = 4$$

por lo que

$$4p_2 + 4p_1 + p_2 = 4p_1$$

de donde obtenemos que

$$p_2 = 0$$

Pero este valor no es compatible con $\frac{p_1}{p_2} < \frac{1}{2}$.

Caso (ii): Tenemos que

$$x_2 = \frac{4p_1 + p_2}{p_1} \quad y_2 = 0$$

Supongamos que

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 4$$

(El caso $x_1 = \frac{4p_2}{p_1}$, $y_1 = 0$ es igual que el caso (i)). La condición de que los mercados se vacían es para el bien 2,

$$6 \geq 4$$

y para el bien 1,

$$4 \geq \frac{4p_1 + p_2}{p_1} \Leftrightarrow 4p_1 \geq 4p_1 + p_2$$

es decir,

$$p_2 \leq 0$$

que no es compatible con

$$\frac{p_1}{p_2} \leq \sqrt{5} - 1$$

El caso (iii) es análogo.

Casos (iv) y (v) Se verifica que

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 4; \quad x_2 = 0, y_2 = \frac{4p_1 + p_2}{p_2}$$

por lo que la condición de vaciado de mercados para el bien 1 es

$$0 \leq 4$$

y para el bien 2,

$$4 + \frac{4p_1 + p_2}{p_2} \leq 6$$

es decir,

$$4 + \frac{4p_1}{p_2} + 1 \leq 6$$

de donde,

$$\frac{4p_1}{p_2} \leq 1$$

que es equivalente a

$$\frac{p_1}{p_2} \leq \frac{1}{4}.$$

Pero esto no es compatible con

$$\frac{p_1}{p_2} \geq \sqrt{5} - 1 > \frac{1}{4}.$$

Por tanto, no existe equilibrio competitivo.

Asignaciones Pareto eficientes: Como las preferencias no son convexas utilizamos el método de maximizar

$$\begin{aligned} \max \quad & x + \frac{y^2}{2} \\ \text{s.a} \quad & 4 - x + (6 - y)^2 = u \\ & 0 \leq x \leq 4 \\ & 0 \leq y \leq 6 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 4 - u + (6 - y)^2$ en la primera restricción el problema es equivalente a (ignorando las constantes aditivas)

$$\begin{aligned} \max \quad & (6 - y)^2 + \frac{y^2}{2} \\ & 0 \leq y \leq 6 \end{aligned}$$

La derivada de la función

$$g(y) = (6 - y)^2 + \frac{y^2}{2}$$

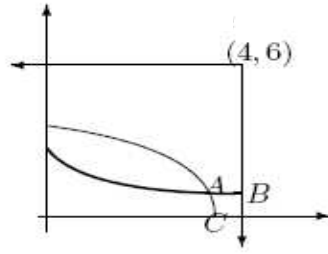
es

$$g'(y) = 3y - 12$$

y se verifica $g'(y) > 0$ para $0 \leq y \leq 6$. Por tanto, el máximo se alcanza para $y = 6$. Y los óptimos de Pareto son de la forma

$$x_1^1 = t, x_1^2 = 4 - t; \quad x_2^1 = 0, x_2^2 = 6, \quad 0 \leq t \leq 4$$

También se puede hacer utilizando la caja de Edgeworth. Si A es un punto interior a la caja de Edgeworth, tenemos que, en el dibujo siguiente,



los puntos B y C son Pareto superiores al punto A . Es decir, los óptimos de Pareto se alcanzan en la frontera de la caja de Edgeworth.

(g) Está resuelto en clase

- (6) Las funciones de utilidad de los agentes son $u_1(x, y) = x + y$, $u_2(x, y) = \max\{x, y\}$ y los recursos iniciales son $\omega^1 = \omega^2 = (1/2, 1/2)$.
- Representar la situación en una caja de Edgeworth.
 - En el equilibrio de Walras, ¿cuál es la relación entre los precios?
 - ¿Cuál es la asignación en el equilibrio de Walras?
- (7) Las funciones de utilidad de los agentes son $u_1(x, y) = x + 2y$, $u_2(x, y) = \sqrt{xy}$ y los recursos iniciales son $\omega^1 = (1, 2)$, $\omega^2 = (1, 3)$. Encontrar el equilibrio de Walras.

Solución: Las demandas de los agentes son

$$x^1(p) = \begin{cases} \left(\frac{m_1}{p_1}, 0\right), & \text{si } p_2 > p_1; \\ \left\{ \left(x, \frac{m_1}{p_2} - 2x\right) : 0 \leq x \leq \frac{m_1}{p_2} \right\}, & \text{si } p_2 = p_1; \\ \left(0, \frac{m_1}{p_2}\right), & \text{si } p_2 < p_1. \end{cases}$$

y

$$x^2(p) = \left(\frac{m_2}{2p_1}, \frac{m_2}{2p_2}\right)$$

Observemos que

$$m_1 = p_1 + 2p_2, \quad m_2 = p_1 + 3p_2$$

Si $p_2 = 2p_1$ entonces

$$m_2 = p_1 + 3p_2 = 7p_2$$

y

$$x^2(p_1, 2p_1) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

y la demanda del bien 1 excede los recursos totales de ese bien (2 unidades). Por tanto, $p_2 = 2p_1$ no puede ser un equilibrio.

Si $p_2 > 2p_1$, entonces la demanda total del bien 2 es

$$x_2^1(p) + x_2^2(p) = \frac{m_2}{2p_2} = \frac{p_1 + 3p_2}{2p_2} = 4$$

de donde obtenemos $p_1 = 5p_2 > p_1$ lo cual contradice que $p_2 > 2p_1$. Por tanto, $p_2 > 2p_1$ tampoco puede ser un equilibrio.

Finalmente, queda la posibilidad $p_2 < 2p_1$. En este caso la demanda total del bien 1 es

$$x_1^1(p) + x_1^2(p) = \frac{m_2}{2p_1} = \frac{p_1 + 3p_2}{2p_1} = 2$$

de donde obtenemos

$$\frac{p_2}{p_1} = 1$$

Concluimos que el equilibrio es

$$p_1 = p_2 = 1, \quad \bar{x}^1 = (0, 3), \quad \bar{x}^2 = (2, 2)$$

- (8) Las funciones de utilidad de los agentes son $u_1(x, y) = u_2(x, y) = xy^2$. Los recursos iniciales son $\omega^1 = (40, 160)$, $\omega^2 = (240, 120)$.
- (a) Calcula el precio y la asignación de equilibrio.
 - (b) Demuestra que la asignación $x^1 = (80, 80)$, $x^2 = (200, 200)$ es una asignación Pareto eficiente.
 - (c) ¿Qué precios soportan la asignación en el apartado (b)?
 - (d) ¿Qué reasignación de los recursos iniciales convierte a la asignación en el apartado (b) en un equilibrio de Walras? ¿Es única esa reasignación?
 - (e) Representa los apartados anteriores en una caja de Edgeworth.

- (9) Considerar una economía con dos bienes y dos agentes con funciones de utilidad

$$u^1(x, y) = xy^2$$

$$u^2(x, y) = x^2y$$

Los recursos agregados son $(10, 20)$.

- (a) Encontrar una asignación Pareto eficiente (a, b) en la que $u^2(a, b) = 8000/27$. (probar que la solución es $x_1^1 = 10/3$, $x_2^1 = 40/3$)
 - (b) Supongamos que los recursos iniciales son $w^1 = (10, 0)$, $w^2 = (0, 20)$. Encontrar el equilibrio de Walras.
- (10) En una economía de intercambio con dos bienes, hay dos tipos de consumidores: (1) m_1 consumidores de tipo 1 con preferencias

$$\frac{1}{2} \ln x_1 + \frac{1}{3} \ln y_1$$

e inicialmente una unidad de cada bien por cada uno de los individuos. (2) m_2 consumidores de tipo 2 con preferencias

$$2x_2 + y_2$$

y cada uno de estos agentes tiene una asignación inicial de 12 unidades de cada bien. Determinar el equilibrio cuando $m_1 = m_2$ ¿Cómo cambia el equilibrio al cambiar m_1 ?

Solución: La demanda de los agentes de tipo 1 viene determinada por el siguiente problema de maximización

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{3} \ln y \\ \text{sujeto a} \quad & p_1 x + p_2 y = p_1 + p_2 \end{aligned}$$

las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} &= \lambda p_1 \\ \frac{1}{3y} &= \lambda p_2 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \lambda p_1 x \\ \frac{1}{3} &= \lambda p_2 y \end{aligned}$$

Sumando

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \lambda(p_1 x + p_2 y) = \lambda(p_1 + p_2)$$

de donde

$$\lambda = \frac{5}{6(p_1 + p_2)}$$

y obtenemos

$$x = \frac{3(p_1 + p_2)}{5p_1} \quad y = \frac{2(p_1 + p_2)}{5p_2}$$

La demanda de los agentes de tipo 2 viene determinada por el siguiente problema de maximización

$$\begin{aligned} & \max && 2x + y \\ & \text{sujeto a} && p_1x + p_2y = 12(p_1 + p_2) \end{aligned}$$

Se trata de un problema de programación lineal. El óptimo se alcanza en los vértices del conjunto presupuestario. Éstos son:

$$x = 0, y = \frac{12(p_1 + p_2)}{p_2} \quad x = \frac{12(p_1 + p_2)}{p_1}, y = 0$$

La utilidad alcanzada por el agente en el punto $(0, \frac{12(p_1 + p_2)}{p_2})$ es $u_1 = \frac{12(p_1 + p_2)}{p_2}$. Mientras que la utilidad alcanzada en el punto $(\frac{12(p_1 + p_2)}{p_1}, 0)$ es $u_2 = \frac{24(p_1 + p_2)}{p_1}$. Vemos que $u_1 \geq u_2$ si y sólo si $p_1 \geq 2p_2$. Por tanto, la demanda de los agentes de tipo 2 es

$$(x(p_1, p_2), y(p_1, p_2)) = \begin{cases} (0, \frac{12(p_1 + p_2)}{p_2}) & \text{si } p_1 > 2p_2 \\ (\frac{12(p_1 + p_2)}{p_1}, 0) & \text{si } p_1 < 2p_2 \end{cases}$$

y cualquier punto en el conjunto presupuestario $\{(x, y) : p_1x + p_2y = 12(p_1 + p_2)\}$, si $p_1 = 2p_2$. Vamos a analizar las condiciones de factibilidad en cada uno de estos casos. Supongamos primero que $p_1 > 2p_2$. En este caso debe verificarse que

$$\begin{aligned} m_1 \frac{3(p_1 + p_2)}{5p_1} &= m_1 + 12m_2 \\ m_1 \frac{2(p_1 + p_2)}{5p_2} + m_2 \frac{12(p_1 + p_2)}{p_2} &= m_1 + 12m_2 \end{aligned}$$

Normalizamos los precios de forma que $p_1 + p_2 = 1$. El sistema se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{3m_1}{5p_1} &= m_1 + 12m_2 \\ \frac{2m_1}{5p_2} + \frac{12m_2}{p_2} &= m_1 + 12m_2 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} 3m_1 &= 5p_1(m_1 + 12m_2) \\ 2m_1 + 60m_2 &= 5p_2(m_1 + 12m_2) \end{aligned}$$

Y despejando,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{3m_1}{5(m_1 + 12m_2)} \\ p_2 &= \frac{2m_1 + 60m_2}{5(m_1 + 12m_2)} \end{aligned}$$

Pero entonces,

$$2p_2 = \frac{4m_1 + 120m_2}{5(m_1 + 12m_2)} > p_1$$

lo que contradice nuestra hipótesis de que $p_1 > 2p_2$.

Veamos ahora el caso en que $p_1 < 2p_2$. La restricción de factibilidad es

$$\begin{aligned} m_1 \frac{3(p_1 + p_2)}{5p_1} + m_2 \frac{12(p_1 + p_2)}{p_1} &= m_1 + 12m_2 \\ m_1 \frac{2(p_1 + p_2)}{5p_2} &= m_1 + 12m_2 \end{aligned}$$

normalizando de nuevo $p_1 + p_2 = 1$,

$$\begin{aligned}\frac{3m_1}{5p_1} + \frac{12m_2}{p_1} &= m_1 + 12m_2 \\ \frac{2m_1}{5p_2} &= m_1 + 12m_2\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{3m_1 + 60m_2}{5(m_1 + 12m_2)} \\ p_2 &= \frac{2m_1}{5(m_1 + 12m_2)}\end{aligned}$$

Vemos que la condición $p_1 < 2p_2$ es equivalente a

$$3m_1 + 60m_2 < 2m_1$$

es decir,

$$60m_2 < m_1$$

Cuando esto ocurre, los precios anteriores son de equilibrio y la demanda es

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= \left(\frac{m_1 + 12m_2}{m_1 + 20m_2}, \frac{m_1 + 12m_2}{m_1} \right) \quad \text{para los agentes de tipo 1} \\ (x_2, y_2) &= \left(\frac{20(m_1 + 12m_2)}{m_1 + 20m_2}, 0 \right) \quad \text{para los agentes de tipo 2}\end{aligned}$$

¿Qué ocurre si $m_1 \leq 60m_2$? Vamos a comprobar que, en este caso, los precios $p_1 = 2p_2$ son de equilibrio. Ahora normalizamos, tomando de nuevo $p_1 = 2/3$, $p_2 = 1/3$. La demanda de los agentes de tipo 1 es

$$x = \frac{3(p_1 + p_2)}{5p_1} = \frac{9}{10} \quad y = \frac{2(p_1 + p_2)}{5p_2} = \frac{6}{5}$$

La condición de vaciado de mercado es

$$\begin{aligned}m_1 \frac{9}{10} + m_2 x_2 &= m_1 + 12m_2 \\ m_1 \frac{6}{5} + m_2 y_2 &= m_1 + 12m_2\end{aligned}$$

y obtenemos la demanda de cada agente de tipo 2,

$$x_2 = 12 + \frac{m_1}{10m_2}, \quad y_2 = 12 - \frac{m_1}{5m_2}$$

Observemos que la restricción $y_2 \geq 0$ es equivalente a $m_1 \leq 60m_2$. Por tanto, sólo hay equilibrio si ocurre esta condición.

- (11) Consideremos una economía de intercambio con dos agentes cuyas preferencias están representadas por las funciones de utilidad

$$\begin{aligned}u_1(x_1^1, x_2^1) &= x_1^1 - \frac{1}{8}(x_2^1)^{-8} \\ u_2(x_1^2, x_2^2) &= -\frac{1}{8}(x_1^2)^{-8} + x_2^2\end{aligned}$$

Sus recursos iniciales son $\omega^1 = (2, r)$, $\omega^2 = (r, 2)$, donde r es momentáneamente un parámetro. Probar que las funciones de demanda de los agentes son

$$\begin{aligned}x_1(p_1, p_2) &= \left(2 + r \left(\frac{p_2}{p_1} \right) - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{8/9}, \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-1/9} \right) \\ x_2(p_1, p_2) &= \left(\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{-1/9}, 2 + r \left(\frac{p_1}{p_2} \right) - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{8/9} \right)\end{aligned}$$

donde r está elegido de forma que la demanda de cada bien es positiva. Probar que los precios de equilibrio están determinados por la ecuación

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-1/9} + r \left(\frac{p_1}{p_2}\right) - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{8/9} = r$$

comprobar que para el valor $r = 2^{8/9} - 2^{1/9}$ hay tres soluciones

$$\frac{p_1}{p_2} = 1, 2, \frac{1}{2}$$

y por tanto hay tres equilibrios competitivos.

Solución: La función de demanda del agente 1 es la solución del problema de maximización

$$\begin{aligned} \max \quad & x - \frac{1}{8}y^{-8} \\ \text{s.a.} \quad & p_1x + p_2y = r^1 \end{aligned}$$

donde $r^1 = 2p_1 + p_2r$. El lagrangiano asociado es $L = x - \frac{1}{8}y^{-8} + \lambda(r^1 - p_1x - p_2y)$. Las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -y^{-9} - \lambda p_2 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\lambda = \frac{1}{p_1}$$

y sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos

$$y = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{1}{9}}$$

y utilizando la restricción presupuestaria vemos que

$$x_1^1 = \frac{r^1}{p_1} - \frac{p_2y}{p_1} = 2 + r \frac{p_2}{p_1} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{8}{9}}, \quad x_2^1 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{1}{9}}$$

Análogamente, se obtiene la demanda del agente 2,

$$x_1^2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{1}{9}}, \quad x_2^2 = 2 + r \left(\frac{p_1}{p_2}\right) - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{8}{9}}.$$

Para calcular los precios de equilibrio, utilizamos la condición de vaciado de los mercados para el bien 2,

$$2 + r = 2 + r \frac{p_1}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}^{\frac{8}{9}} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{1}{9}}$$

Haciendo el cambio

$$x = \frac{p_1}{p_2},$$

obtenemos

$$r = rx - x^{\frac{8}{9}} + x^{\frac{1}{9}}$$

Claramente, $x = 1$ es una solución. Supongamos ahora que $x \neq 1$. En ese caso

$$r(1 - x) = x^{\frac{8}{9}} + x^{\frac{1}{9}}$$

y sustituyendo vemos que $x = 2$ y $x = 1/2$ son soluciones, si $r = 2^{8/9} - 2^{1/9}$.

- (12) Supongamos que un agente tiene una relación de preferencias $\succeq$ localmente no saciada y que x^* es un elemento maximal de $\succeq$ en el conjunto presupuestario $\{x \in X : p \cdot x \leq z\}$. Probar que si $y \succeq x^*$, entonces $p \cdot y \geq z$.

Solución: Supongamos que $y \succeq x^*$ pero $p \cdot y < z$. Como la función $x \mapsto p \cdot x$ es continua, existe un $r > 0$ tal que si $\|x - y\| \leq r$ entonces $p \cdot x < z$. Como la relación de preferencias $\succeq$ es localmente no saciada, existe una cesta x_0 que verifica que $\|x_0 - y\| \leq r$ y que $x_0 \succ y$. Pero entonces x^* no es un elemento maximal de $\succeq$ en el conjunto presupuestario $\{x \in X : p \cdot x \leq z\}$.

- (13) Supongamos que la relación de preferencias $\succeq$ es localmente no saciada. Sea x^* una asignación factible y p un vector de precios. Probar que las dos condiciones siguientes son equivalentes:
 (a) Si $y \succeq x^*$ entonces $p \cdot y \geq p \cdot x^*$.
 (b) x^* es una solución del problema

$$\text{s.a.} \quad \left. \begin{array}{l} \min p \cdot x \\ x \succeq x^* \end{array} \right\}$$

Solución: Veamos primero que (a) implica (b). Para ello, observamos que si x^* no es una solución del problema

$$\text{s.a.} \quad \left. \begin{array}{l} \min p \cdot x \\ x \succeq x^* \end{array} \right\}$$

entonces, podemos encontrar una asignación $y \succeq x^*$ tal que $p \cdot y < p \cdot x^*$. Pero esto contradice el apartado (a). Por tanto, (a) implica (b).

Veamos ahora que (b) implica (a). Sea $y \succeq x^*$. Como x^* es una solución del problema

$$\text{s.a.} \quad \left. \begin{array}{l} \min p \cdot x \\ x \succeq x^* \end{array} \right\}$$

entonces $p \cdot x^* \leq p \cdot y$.

- (14) Consideremos una economía en la que las preferencias de los agentes dependen no sólo del consumo propio sino también del bienestar de los demás agentes. Es decir, la utilidad de cada agente $i = 1, \dots, I$ depende de su consumo x^i y del bienestar “de consumo” alcanzado por los demás agentes $v_1(x^1), \dots, v_I(x^I)$. Asumimos, por tanto que las preferencias del agente $i = 1, \dots, I$ se pueden representar por una “función de felicidad” u^i de la forma $u^i(x^1, \dots, x^I) = u^i(v_1(x^1), \dots, v_I(x^I))$. Suponiendo que las funciones $U_1, \dots, U_n$ son crecientes en todos los argumentos, probar que si $x = (x^1, \dots, x^I)$ es una asignación Pareto eficiente relativa a las preferencias u^i , también es un óptimo de Pareto con las preferencias v_i .

Solución: Supongamos que x no es una asignación Pareto eficiente con las preferencias v_i . Entonces, existe otra asignación factible $y = (y^1, \dots, y^I)$ tal que

$$v_i(y^i) \geq v_i(x^i) \text{ para todo } i = 1, \dots, I$$

$$v_j(y^j) > v_j(x^j) \text{ para algún } j \in \{1, \dots, I\}$$

Pero como las funciones $U_1, \dots, U_n$ son crecientes en todos los argumentos tenemos que

$$U_i(v_1(y^1), \dots, v_I(y^I)) > U_i(v_1(x^1), \dots, v_I(x^I))$$

para todo $i = 1, \dots, I$, por lo que la asignación x no es Pareto eficiente relativa a las preferencias U_i .

- (15) Consideremos una economía con dos agentes y dos bienes. Los agentes $i = 1, 2$ tienen las mismas preferencias representadas por la función de utilidad

$$u^i(x, y) = x^2 + y^2$$

Las asignaciones iniciales son $w^1 = (4, 2) = w^2$. Probar que no puede haber unos precios de equilibrio.

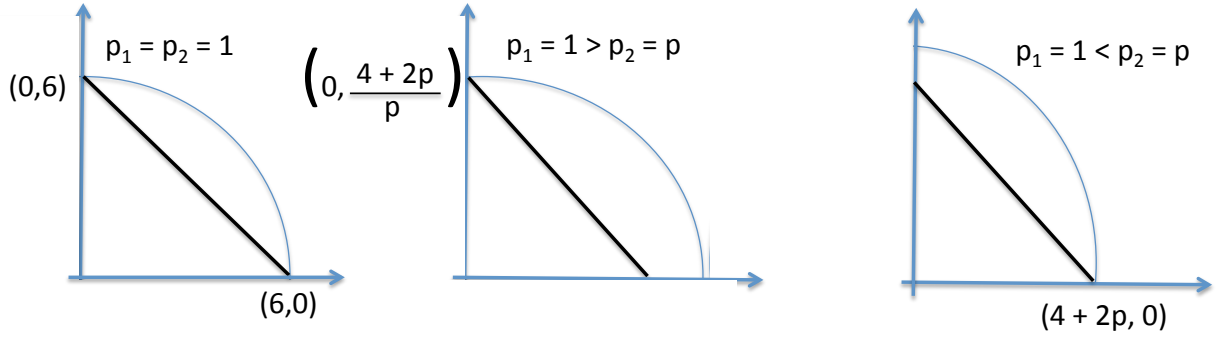


FIGURE 1. Problema 11: Demanda de los agentes

Solución: Normalizamos los precios de forma que $p_1 = 1$, $p_2 = p$. Las demandas de los agentes están determinadas por el problema de maximización

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} \quad & x + py = 4 + 2p \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Lagrange del problema son

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda \\ 2y &= \lambda p \\ x + py &= 4 + 2p \end{aligned}$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange. Vemos que la solución es $y = px = \frac{4p+2p^2}{1+p^2}$. Sin embargo, el Hessiano es

$$HL = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es definido positivo. Por tanto, el punto $(3,3)$ corresponde a un mínimo local, no a un máximo. El máximo se alcanza en los puntos extremos. Esto se puede demostrar analíticamente, pero es más sencillo utilizar las curvas de indiferencia. Las curvas $x^2 + y^2 = C > 0$ son círculos de radio $\sqrt{C}$ y centro $(0,0)$. (En particular, el conjunto $\{y \in \mathbb{R}_+^2 : y \succ x\}$ no es convexo. Esta es la hipótesis que falla y que no permite aplicar el teorema de existencia).

En la figura ?? se representan las curvas de indiferencia, el conjunto presupuestario y la demanda del agente $i = 1, 2$ para cada una de las tres situaciones posibles

- (a) $p_1 = p_2 = 1$.
- (b) $p_1 = 1 > p_2 = p$.
- (c) $p_1 = 1 < p_2 = p$.

Gráficamente, vemos que la demanda del agente $i = 1, 2$ es

$$(x^i(p_1, p_2), y^i(p_1, p_2)) = \begin{cases} \{(6, 0), (0, 6)\} & \text{si } p_1 = p_2 = 1, \\ (0, (4 + 2p)/p) & \text{si } p_1 = 1 > p_2 = p, \\ (4 + 2p, 0) & \text{si } p_1 = 1 < p_2 = p. \end{cases}$$

Vemos que si $p_1 = 1 > p_2 = p$, la condición de vaciado de mercado es $y^1(p_1, p_2) + y^2(p_1, p_2) = 2\frac{4+2p}{p} \leq 4$ que no tiene solución.

Si $p_1 = 1 < p_2 = p$, entonces la condición de vaciado de mercado es $x^1(p_1, p_2) + x^2(p_1, p_2) = 2(4 + 2p) \leq 8$, cuya solución es $p \leq 0$ lo cual es absurdo.

Si $p_1 = p_2 = 1$, entonces los agentes son indiferentes entre las cestas $(6, 0)$ y $(0, 6)$ y hay varias posibilidades para la demanda total, resumidas en la siguiente ecuación

$$(x^1(1, 1), y^1(1, 1)) + (x^2(1, 1), y^2(1, 1)) = \begin{cases} (6, 0) + (0, 6) &= (6, 6), \\ (6, 0) + (6, 0) &= (12, 0), \\ (0, 6) + (0, 6) &= (0, 12). \end{cases}$$

Vemos que en todos los casos es imposible que

$$(x^1(1, 1), y^1(1, 1)) + (x^2(1, 1), y^2(1, 1)) \leq (8, 4)$$

y concluimos que no puede haber precios de equilibrio.

- (16) Supongamos una economía en la que todos los agentes tienen las mismas preferencias y que éstas son estrictamente convexas. Probar que dividir los recursos iniciales de forma igualitaria es una asignación Pareto eficiente. ¿Es cierta esta afirmación si no todos los agentes son iguales?

Solución: Llamamos $w^1, \dots, w^I$ los recursos iniciales de los agentes y

$$w = w^1 + \dots + w^I$$

los recursos agregados. Representamos por $\succ$ la relación de preferencias de todos los agentes. Tenemos que probar que la asignación

$$x^i = \frac{w}{I}, \quad i = 1, 2, \dots, I$$

es un óptimo de Pareto.

Supongamos que $y^1, \dots, y^I$ es una asignación tal que

(a) Es factible: $y^1 + \dots + y^I = w$

(b) Es preferida (débilmente) por todos los agentes a x^i : $y^i \succeq \frac{w}{I}$ para $i = 1, 2, \dots, I$.

Observemos que

$$\frac{w}{I} = \frac{1}{I}(y^1 + \dots + y^I) = \frac{y^1}{I} + \dots + \frac{y^I}{I}$$

es decir, $\frac{w}{I}$ es una combinación lineal de $y^1, \dots, y^I$. Como $\succ$ es estrictamente convexa tenemos que

$$\frac{w}{I} \succ y^i \quad i = 1, 2, \dots, I$$

pero esto contradice el apartado (ii), a menos que

$$\frac{w}{I} = y^i \quad i = 1, 2, \dots, I$$

Y hemos demostrado que no hay ninguna asignación factible en la que todos los agentes mejoren sobre la asignación $\frac{w}{I}$.

Si los agentes no son iguales el resultado no es cierto. Por ejemplo, si hay dos agentes y

$$u^1(x, y) = x, \quad u^2(x, y) = y$$

la única asignación Pareto eficiente es dar todo el bien 1 al agente 1 y todo el bien 2 al agente 2.

El ejemplo

$$u^i(x, y) = x^2 + y^2, \quad i = 1, 2$$

con asignaciones iniciales

$$w^1 = (4, 2) = w^2$$

demuestra también que si las preferencias no son cóncavas entonces el resultado no es cierto. La asignación

$$x^1 = (4, 2) = x^2$$

no es un óptimo de Pareto ya que

$$u^i(4, 2) = 20, \quad i = 1, 2$$

mientras que

$$u^1(5, 0) = 25, \quad u^2(3, 4) = 25.$$

(17) Consideremos una economía con 15 agentes y 2 bienes. Un agente tiene la función de utilidad

$$u(x, y) = \ln x + \ln y$$

En una asignación Pareto eficiente al agente le corresponde la cesta (10, 5). Calcular los precios competitivos que corresponden a la asignación Pareto Eficiente.

Solución:

(18) Sea $E = \{(u^i, \omega^i) : i = 1, 2, \dots, I\}$ una economía de intercambio, con $u^i : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua estrictamente cóncava y monótona, $\omega^i \gg 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, I$.

En esta economía hay una autoridad que establece impuestos y reparte subvenciones de acuerdo al siguiente sistema.

- (a) Cada consumidor paga como impuesto una fracción α de su renta: $t^i(p) = \alpha p \cdot \omega^i$.
- (b) Lo recaudado en el apartado anterior se reparte de forma igualitaria entre todos los agentes. Es decir cada agente recibe

$$S^i(p) = \frac{\alpha}{I} \sum_{i=1}^I p \cdot \omega^i = \frac{\alpha}{I} p \cdot \omega$$

donde

$$\omega = \sum_{i=1}^I \omega^i$$

En esta economía se define un equilibrio competitivo con impuestos y subvenciones como una asignación $x^1, \dots, x^I \in \mathbb{R}_+^n$ y unos precios $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tales que

- Para cada $i = 1, 2, \dots, I$, la asignación x^i es una solución de

$$\begin{aligned} \max_x \quad & u(x) \\ \text{s.a.} \quad & p \cdot x \leq p \cdot \omega^i - t^i(p) + S^i(p) \end{aligned}$$

- $\sum_{i=1}^I x^i \leq \sum_{i=1}^I \omega^i$.

Probar que existe un equilibrio en esta economía. ¿Es este sistema más igualitario que un sistema sin subvenciones e impuestos?

Solución: Vamos a comprobar que se cumple la Ley de Walras. Por una parte,

$$p \cdot z(p) = \sum_{i=1}^I p \cdot (x^i(p) - w^i)$$

y como

$$p \cdot x^i(p) = p \cdot (w^i(p) - t^i(p) + S^i(p))$$

tenemos que

$$p \cdot z(p) = \sum_{i=1}^I (S^i(p) - t^i(p)) = 0$$

La demostración se hace ahora de la misma forma que para demostrar que existe un equilibrio de Walras.

La distribución de la renta es más igualitaria, ya que

$$S^i(p) - t^i(p) = \left(\frac{p \cdot w}{I} - p \cdot w^i \right) = \begin{cases} \geq 0, & \text{si } p \cdot w^i \leq p \cdot w / I \\ \leq 0 & \text{si } p \cdot w^i \geq p \cdot w / I \end{cases}$$

Y recordamos que

$$p \cdot w^i$$

es la renta individual, mientras que

$$\frac{p \cdot w}{I}$$

es la renta media.

- (19) Consideremos una economía de intercambio con dos bienes y dos agentes cuyas preferencias vienen determinadas por la función de utilidad

$$u^i(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}, \quad i = 1, 2, \quad 0 < \alpha < 1$$

y los recursos globales son

$$\omega^1 + \omega^2 = (10, 10)$$

Probar que la asignación

$$x_1^1 = x_2^1 = x_1^2 = x_2^2 = 5$$

es Pareto eficiente. Determinar unos recursos iniciales ω^1, ω^2 con $\omega^1 \neq \omega^2$, tales que, en esta economía, la asignación anterior es un equilibrio competitivo.

Solución: Las preferencias son un caso particular del problema 2 con $\alpha = \beta$. Las asignaciones PE son:

$$\begin{aligned} x_1 &= t\omega_1 & y_1 &= t\omega_2 \\ x_2 &= (1-t)\omega_1 & y_2 &= (1-t)\omega_2 \end{aligned}$$

tomando $t = \frac{1}{2}$ se obtiene que $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 5$ es PE.

Las C.P.O. para el agente 1 son

$$\nabla u_1(5, 5) = \lambda(p_1, p_2)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{x_1} &= \lambda p_1 \\ \frac{1-\alpha}{y_1} &= \lambda p_2 \end{aligned}$$

con $x_1 = x_2 = 5$, $\frac{\alpha}{5} = \lambda p_1$, $\frac{1-\alpha}{5} = \lambda p_2$. Por lo que,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Podemos tomar $p_1 = \alpha$ y $p_2 = 1 - \alpha$

Podemos tomar

$$\begin{aligned} \omega^1 &= (x, y) \\ \omega^2 &= (10 - x, 10 - y) \end{aligned}$$

que verifiquen

$$p_1 x + p_2 y = \alpha x + (1 - \alpha)y = cte$$

con $5 = p_1 5 + p_2 5 = \alpha x + (1 - \alpha)5 = 5$, es decir:

$$\alpha x + (1 - \alpha)y = 5$$

- (20) Consideremos una economía de intercambio con dos bienes y tres agentes cuyas preferencias vienen determinadas por las funciones de utilidad siguientes

$$\begin{aligned} u^1(x, y) &= xy \\ u^2(x, y) &= xy^2 \\ u^3(x, y) &= 5 \ln x + \ln y \end{aligned}$$

y los recursos globales son

$$\omega^1 + \omega^2 + \omega^3 = (7, 8)$$

Probar que la asignación $x^1 = (1, 2)$, $x^2 = (1, 4)$, $x^3 = (5, 2)$ es Pareto eficiente. Calcular unas precios para los que esta asignación sea un equilibrio.

Solución:

- (21) Consideremos una economía de intercambio con dos bienes y dos agentes cuyas preferencias vienen determinadas por las funciones de utilidad siguientes

$$\begin{aligned} u^1(x, y) &= \sqrt{xy} + \ln x + \ln y \\ u^2(x, y) &= -4/x - 1/y \end{aligned}$$

y los recursos globales son

$$\omega^1 + \omega^2 = (3, 6)$$

Supongamos que utilizamos la función de bienestar social $W = au^1 + bu^2$. Probar que la asignación $x^1 = (1, 4)$, $x^2 = (2, 2)$ es Pareto eficiente. Determinar unos pesos a , b para los que la función de bienestar social W elegiría la asignación anterior.

Solución: Escribimos la relación marginal de sustitución del agente 1

$$\frac{\partial u^1}{\partial x} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial u^1}{\partial y} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}$$

de donde

$$\text{RMS}^1(1, 4) = \frac{2}{1/2} = 4$$

y la relación marginal de sustitución del agente 2

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{4}{x^2}, \quad \frac{\partial u^2}{\partial y} = \frac{1}{y^2}$$

de donde

$$\text{RMS}^2(2, 2) = 4$$

por lo que la asignación $x^1 = (1, 4)$, $x^2 = (2, 2)$ es Pareto eficiente.

Recordemos que las condiciones de primer orden al maximizar la función de bienestar social son

$$\alpha^i \frac{\partial u^i}{\partial x_l^i} = \gamma_l$$

donde γ_1, γ_2 son los multiplicadores de Lagrange. Por tanto, los pesos de los agentes verifican que

$$\frac{\alpha^1}{\alpha^2} = \frac{\frac{\partial u^2}{\partial x_1^2}}{\frac{\partial u^1}{\partial x_1^1}} = \frac{\frac{\partial u^2}{\partial x_2^2}}{\frac{\partial u^1}{\partial x_2^1}} = \frac{1}{2}$$

Podemos elegir, por ejemplo, $a = 1$, $b = 2$.