April 15, 2009

CAPÍTULO 4: DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

En este capítulo D denota un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

1. Introducción

Definición 1.1. Dada una aplicación $f : D \to \mathbb{R}$, definimos la derivada parcial segunda de f como

$$D_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

De forma análoga, podemos definir las derivadas de orden superior.

Ejemplo 1.2. Consideremos la función

$$f(x, y, z) = xy^2 + e^{zx}$$

entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + ze^{zx} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y) = xe^{zx}$$

y por ejemplo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) = z^2 e^{zx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y) = xe^{zx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y) = xe^{zx}$$

Vemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y)$$

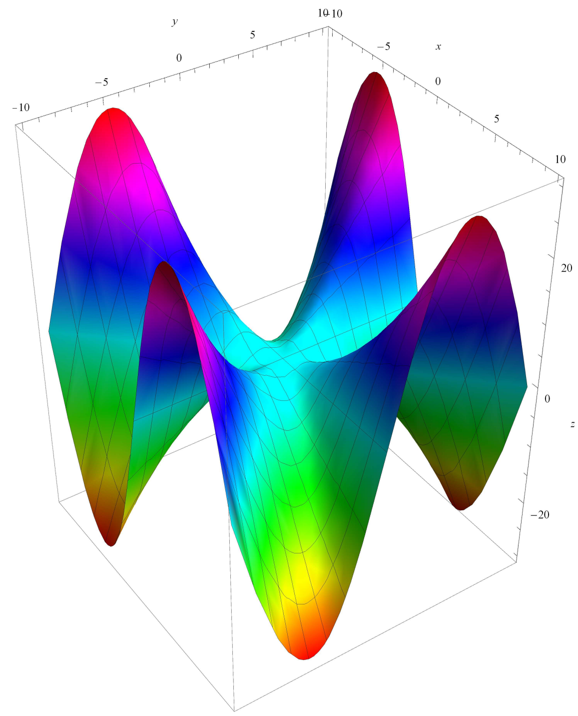
Se puede comprobar que esto se verifica para todas las variables

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y)$$

Ejemplo 1.3. Consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La gráfica de esta función es la siguiente



Se comprueba fácilmente que si $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4 y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

y que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \lim_{x\to 0} \frac{-y}{y} = -1$$

por lo que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

Por otra parte, se puede comprobar que si $(x,y) \neq (0,0)$ entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

El siguiente resultado proporciona condiciones suficientes bajo las cuales las derivadas cruzadas coinciden.

Teorema 1.4. (Schwarz) Supongamos que para algún $i, j = 1 \ldots, n$ las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

existen y son continuas en una bola $B(p, r)$ con $r > 0$. Entonces,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

para cada x en la bola $B(p, r)$.

Definición 1.5. Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}$. Decimos que f es de clase

- $C^1(D)$ si todas las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de f existen y son continuas en D para todo $i = 1 \ldots, n$.
- $C^2(D)$ si todas las derivadas parciales de f existen y son de clase $C^1(D)$.
- $C^k(D)$ si todas las derivadas parciales primeras

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

  de f existen y son de clase $C^{k-1}(D)$ para todo $i = 1 \ldots, n$.

Escribimos $f \in C^k(D)$.

Definición 1.6. Sea $f \in C^2(D)$. La matriz Hessiana de f en p es la matriz

$$\mathrm{D}^2 f(p) = \mathrm{H} f(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

Observación 1.7. Por el teorema de Schwarz, si $f \in C^2(D)$ entonces la matriz $\mathrm{H} f(p)$ es simétrica.

2. El Teorema de la función implícita

En esta sección vamos a estudiar sistemas de ecuaciones **no lineales**. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} x^2 + ze^{xy} + z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 3 \end{aligned} \tag{2.1}$$

En general, es muy difícil probar que existe solución (y no siempre existe) o resolver de manera explícita estos sistemas. Sin embargo, en Economía ocurre a menudo que el modelo que estamos estudiando aparece descrito por un sistema de ecuaciones como, por ejemplo, el sistema 2.1. Y nos gustaría poder decir algo sobre cómo depende la solución respecto de los parámetros. En esta sección estudiamos esta pregunta.

En primer lugar observemos que un sistema de m ecuaciones y n incógnitas se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} f_1(u) &= 0 \\ f_2(u) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(u) &= 0 \end{aligned}$$

donde $u \in \mathbb{R}^n$ y $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Por ejemplo, el sistema 2.1 se puede escribir como

$$\begin{aligned} f_1(u) &= 0 \\ f_2(u) &= 0 \end{aligned}$$

con $f_1(x,y,z) = x^2 + ze^{xy} + z - 1$ y $f_2(x) = 3x + 2y + z - 3$.

Una primera cuestión es cómo son las soluciones del sistema 2.1. Comparando la situación con un sistema lineal deberíamos esperar que podemos despejar dos variables en función de un parámetro, ya que hay 2 ecuaciones y 3 variables. Supongamos, por ejemplo que queremos despejar y, z como funciones de x. Esto puede ser complicado y en la mayoría de los casos imposible. En esta situación, el teorema de la función implícita,

- proporciona condiciones bajo las cuales podemos garantizar que el sistema 2.1 tiene solución, en el sentido de que determina dos funciones $y(x)$ y $z(x)$ que satisfacen las ecuaciones 2.1, incluso aunque no sepamos cómo se calculan esas funciones.
- cuando el sistema de ecuaciones 2.1 tiene solución nos permite encontrar una expresión para $y'(x)$ y $z'(x)$, incluso aunque no sepamos calcular $y(x)$, $z(x)$.

Vamos a considerar un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(u,v) &= 0 \\ f_2(u,v) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(u,v) &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ son las variables independientes y $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ son las variables que queremos despejar[1] y $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. A este sistema le asociamos la expresión siguiente

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial (v_1, \dots, v_m)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial v_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial v_m} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, para el sistema 2.1

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (y,z)} = \det \begin{pmatrix} xze^{xy} & e^{xy}+1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = xze^{xy} - 2e^{xy} - 2$$

[1]En el ejemplo 2.1 $n = 1$, $m = 2$, $u = x$, $v = (y,z)$.

Teorema 2.1 (Teorema de la función implícita)**.** Supongamos que las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ son de clase C^1 y que existe un punto $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ que verifica

(1) $f_1(u_0, v_0) = f_2(u_0, v_0) = \cdots = f_m(u_0, v_0) = 0$; y
(2)
$$\frac{\partial\,(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial\,(v_1, \ldots, v_m)}(u_0, v_0) \neq 0$$

Entonces, existen conjuntos abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ y unas funciones $g_1, \ldots g_m : U \to \mathbb{R}$ tales que

(1) $u_0 \in U$, $v_0 \in V$.
(2) para todo $u \in U$,

$$f_1(u, g_1(u), \ldots, g_m(u)) = f_2(u, g_1(u), \ldots, g_m(u)) = \cdots = f_m(u, g_1(u), \ldots, g_m(u)) = 0$$

(3) Si $u \in U$ y $v = (v_1, \ldots, v_m) \in V$ verifican el sistema $f_1(u, v) = f_2(u, v) = \cdots = f_m(u, v) = 0$ entonces $v_1 = g_1(u), \ldots v_m = g_m(u)$.
(4) Las funciones $g_1, \ldots g_m : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables y para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$ se verifica que

$$\frac{\partial g_i}{\partial u_j} = -\left.\frac{\partial\,(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial\,(v_1, \ldots, v_{i-1}, u_j, v_{i+1}, \ldots, v_m)}\right/\frac{\partial\,(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial\,(v_1, \ldots, v_m)} \tag{2.3}$$

Observación 2.2. De manera explícita,

$$\frac{\partial\,(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial\,(v_1, \ldots, v_{i-1}, x_j, v_{i+1}, \ldots, v_m)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial v_{i-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_j} & \frac{\partial f_1}{\partial v_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial v_m} \\ \vdots & \cdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial v_{i-1}} & \frac{\partial f_m}{\partial x_j} & \frac{\partial f_1}{\partial v_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial v_m} \end{pmatrix}$$

Observación 2.3. La conclusión del Teorema de la función implícita se puede enunciar de la siguiente manera,

(1) Las funciones
$$z_1 = g_1(u), z_2 = g_1(u), \ldots, z_m = g_m(u)$$
son una solución del sistema de ecuaciones 2.2.
(2) Las derivadas de las funciones $g_1, \ldots g_m : U \to \mathbb{R}$ se pueden calcular derivando el sistema de ecuaciones 2.2 y aplicando la regla de la cadena.

Observación 2.4. Aplicando sucesivamente el Teorema de la función implícita se pueden calcular también las derivadas de orden superior de las variables dependientes.

Ejemplo 2.5. Vamos a aplicar el Teorema de la función implícita al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + ze^{xy} + z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

En primer lugar observamos que $x = 1$, $y = z = 0$ es una solución del sistema. Por otra parte, ya hemos visto que

$$\frac{\partial\,(f_1, f_2)}{\partial\,(y, z)}(1, 0, 0) = \det\left.\begin{pmatrix} xze^{xy} & e^{xy} + 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right|_{x=1, y=z=0} = \left.(xze^{xy} - 2e^{xy} - 2)\right|_{x=1, y=z=0} = -4 \neq 0$$

El Teorema de la función implícita garantiza que se pueden despejar las variables y y z como funciones de x para valores de x cercanos a 1. Además, derivando respecto a x en el sistema obtenemos

$$\begin{aligned} 2x + z'e^{xy} + z(y + xy')e^{xy} + z' &= 0 \\ 3 + 2y' + z' &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ahora sustituimos $x = 1, y = z = 0$,

$$\begin{aligned} 2 + 2z'(1) &= 0 \\ 3 + 2y'(1) + z'(1) &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

con lo que $z'(1) = y'(1) = -1$. Podemos calcular esto de otra manera utilizando la fórmula 2.3,

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,z)}(1,0,0)}{-4} = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} 2x + yze^{xy} & e^{xy}+1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=1,y=z=0} = \frac{-4}{4} = -1$$

y

$$z'(1) = -\frac{\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,x)}(1,0,0)}{-4} = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} xze^{xy} & 2x + yze^{xy} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=1,y=z=0} = \frac{-4}{4} = -1$$

Para calcular las derivadas segundas $y''(x)$ y $z''(x)$ derivamos cada ecuación del sistema 2.5 respecto a x. Después de simplificar obtenemos

$$\begin{aligned} 2 + z''e^{xy} + 2z'(y + xy')e^{xy} + z(2y' + xy'')e^{xy} + z(y + xy')^2e^{xy} + z'' &= 0 \\ 2y'' + z'' &= 0 \end{aligned}$$

y sustituyendo $x = 1, y(1) = z(1) = 0$, $z'(1) = y'(1) = -1$

$$\begin{aligned} 2 + 2z''(1) &= 0 \\ 2y''(1) + z''(1) &= 0 \end{aligned}$$

y de aquí vemos que $z''(1) = -1$, $y''(1) = 1/2$. Derivando sucesivamente podemos obtener las derivadas de cualquier orden $z^{(n)}(1)$, $y^{(n)}(1)$.

Ejemplo 2.6. Consideremos el modelo macroeconómico

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= f(Y - T) \\ I &= h(r) \\ r &= m(M) \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde las variables son Y (la renta nacional), C (consumo), I (inversión) y r (la tasa de interés) y los parámetros son M (la oferta monetaria), T (los impuestos recaudados) y G (el gasto público). Suponemos que $0 < f'(z) < 1$. Calcular

$$\frac{\partial Y}{\partial M}, \quad \frac{\partial Y}{\partial T}, \quad \frac{\partial Y}{\partial G}$$

El sistema puede escribirse como

$$\begin{aligned} f_1 &= C + I + G - Y = 0 \\ f_2 &= f(Y - T) - C = 0 \\ f_3 &= h(r) - I = 0 \\ f_4 &= m(M) - r \end{aligned}$$

En primer lugar calculamos

$$\frac{\partial\left(f_1, f_2, f_3, f_4\right)}{\partial\left(Y, C, I, r\right)} = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ f'(Y-T) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & h'(r) \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 - f'(Y-T) \neq 0$$

Por el Teorema de la función implícita el sistema 2.7 define implícitamente a Y, C, I y r como funciones de M, T y G. (suponemos que el sistema tiene alguna solución). Derivando en 2.7 respecto a M obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial M} &= \frac{\partial C}{\partial M} + \frac{\partial I}{\partial M} \\ \frac{\partial C}{\partial M} &= f'(Y-T)\frac{\partial Y}{\partial M} \\ \frac{\partial I}{\partial M} &= h'(r)\frac{\partial r}{\partial M} \\ \frac{\partial r}{\partial M} &= m'(M) \end{aligned}$$

Despejando obtenemos

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{h'(r)m'(M)}{1 - f'(Y-T)}$$

Derivando en 2.7 respecto a T obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial T} &= \frac{\partial C}{\partial T} + \frac{\partial I}{\partial T} \\ \frac{\partial C}{\partial T} &= f'(Y-T)(\frac{\partial Y}{\partial T} - 1) \\ \frac{\partial I}{\partial T} &= h'(r)\frac{\partial r}{\partial T} \\ \frac{\partial r}{\partial T} &= 0 \end{aligned}$$

Despejando obtenemos

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{-f'(Y-T)}{1 - f'(Y-T)}$$

Derivando en 2.7 respecto a G obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial G} &= \frac{\partial C}{\partial G} + \frac{\partial I}{\partial G} + 1 \\ \frac{\partial C}{\partial G} &= f'(Y-T)\frac{\partial Y}{\partial G} \\ \frac{\partial I}{\partial G} &= h'(r)\frac{\partial r}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} &= 0 \end{aligned}$$

Despejando obtenemos

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{1}{1 - f'(Y-T)}$$

Ejemplo 2.7 (Curvas de indiferencia). Supongamos que hay dos bienes y un consumidor tiene unas preferencias representadas por la función de utilidad $u(x, y)$. Las curvas de indiferencia del consumidor son los conjuntos

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, \quad u(x, y) = C\}$$

con $C \in \mathbb{R}$. Supongamos que la función $u(x, y)$ es diferenciable y que

$$\frac{\partial u}{\partial x} > 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} > 0$$

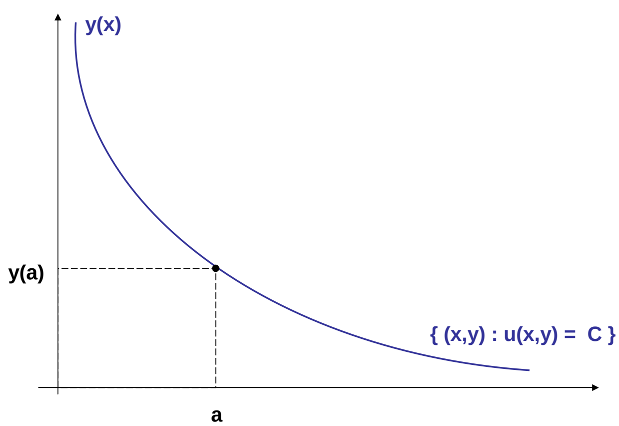
Aplicando el Teorema de la función implícita, vemos que la ecuación

$$u(x, y) = C$$

define a y como una función de x. El conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, \quad u(x, y) = C\}$$

se puede representar como la gráfica de la función $y(x)$.



Derivando implícitamente, podemos calcular la derivada y'

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} y'(x) = 0$$

por lo que

$$y'(x) = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y}$$

Vemos que $y(x)$ es una función decreciente. El valor absoluto de $y'(x)$ (es decir el valor absoluto de la pendiente de la recta tangente a la curva de indiferencia) es la relación marginal de sustitución del consumidor. Por tanto, definimos la relación marginal de sustitución del consumidor como la cantidad

$$\mathrm{RMS}(x, y) = \frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y}(x, y)$$

Supongamos que un consumidor puede consumir la cesta de bienes $(a, b = y(a))$. Recordando la interpretación de derivada $y'(a)$, vemos que la relación marginal de sustitución $\mathrm{RMS}(a, b)$ de ese agente mide (aproximadamente) la cantidad máxima de bien y a la que el agente estaría dispuesto a renunciar a cambio de poder consumir una unidad adicional de bien x.

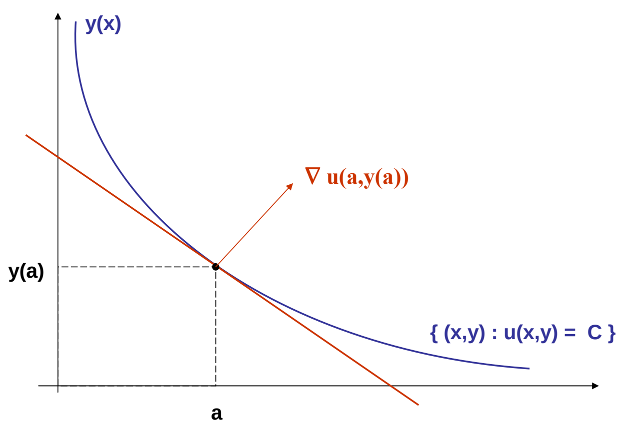
Por ejemplo, si el consumidor tiene una función de utilidad Cobb-Douglas $u(x,y) = x^2y^4$, la relación marginal de sustitución es

$$\mathrm{RMS}(x,y) = \frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y} = \frac{2xy^4}{4x^2y^3} = \frac{y}{2x}$$

Por otra parte, recordemos que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y(x)$ en el punto $(a, y(a))$ es $y'(a)$. Es decir, el vector director de la recta tangente a la gráfica de $y(x)$ en el punto $(a, y(a))$ es el vector $(1, y'(a))$. Realizando el producto escalar de este vector con el vector gradiente de u en el punto $(a, y(a))$ obtenemos que

$$(1, y'(a)) \cdot \nabla u(a, y(a)) = \left(1, -\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Con esto hemos comprobado otra vez que el vector gradiente ∇u es perpendicular a la recta tangente a la curva de indiferencia del consumidor.



Ejemplo 2.8. Supongamos que hay dos bienes y un consumidor tiene unas preferencias representadas por la función de utilidad $u(x,y)$. Si los precios de los bienes son p_x y p_y, consumir la cesta (x,y) le cuesta al agente

$$p_x x + p_y y$$

Si su renta es I entonces debe verificarse que

$$p_x x + p_y y = I$$

Esto equivale a decir que si el agente compra x unidades del primer bien, entonces puede consumir como mucho

$$\frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x$$

con lo cual su utilidad sería

$$u\left(x, \frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right) \tag{2.8}$$

En Teoría Económica se supone que el agente elige la cesta de bienes (x,y) que le proporciona una utilidad mayor. Es decir, el agente maximiza la función 2.8.

Derivando implícitamente respecto a x obtenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{p_x}{p_y} = 0 \tag{2.9}$$

Es decir, la condición de primer orden es

$$\mathrm{RMS}(x,y) = \frac{p_x}{p_y}$$

esta ecuación junto con la restricción presupuestaria

$$p_x x + p_y y = I$$

determina la demanda del agente.

Por ejemplo, si las preferencias del agente se pueden representar por una función de utilidad Cobb-Douglas

$$u(x,y) = x^2 y$$

la RMS es

$$\mathrm{RMS}(x,y) = \frac{2xy}{x^2} = \frac{2y}{x}$$

y la demanda del agente está determinada por el sistema

$$\begin{aligned} \frac{2y}{x} &= \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x + p_y y &= I \end{aligned}$$

de aquí obtenemos las funciones de demanda del agente

$$\begin{aligned} x(p_x, p_y, I) &= \frac{2I}{3p_x} \\ y(p_x, p_y, I) &= \frac{I}{3p_y} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.9 (Isocuantas y la relación marginal de sustitución técnica). Supongamos que una empresa utiliza la función de producción $Y = f(x_1, x_2)$ donde (x_1, x_2) son las unidades de factores utilizadas en la elaboración de Y unidades del producto. Dado un nivel de producción $\bar{y}$ fijo, la isocuanta correspondiente es el conjunto de nivel

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0, \quad f(x_1, x_2) = \bar{y}\}$$

De manera análoga al ejercicio anterior, vemos que sobre la isocuanta podemos escribir x_2 como una función de x_1 y que

$$x_2'(x_1) = -\frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}$$

La relación marginal de sustitución técnica se define como

$$\mathrm{RMST} = -x_2'(x_1) = \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}$$

Por ejemplo, si la función de producción de la empresa es $Y = x_1^{1/3} x_2^{1/2}$ entonces la relación marginal de sustitución técnica es

$$\mathrm{RMST} = \frac{\partial Y / \partial x_1}{\partial Y / \partial x_2} = \frac{\frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{1/2}}{\frac{1}{2} x_1^{1/3} x_2^{-1/2}} = \frac{2x_2}{3x_1}$$

3. Aproximaciones de Taylor de Primer y Segundo Orden

Definición 3.1. Dada una función $f \in C^1(D)$, $p \in D$, el polinomio de Taylor de grado 1 en el punto p es

$$P_1(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p)$$

Observación 3.2. Si $f(x, y)$ es una función de dos variables y $p = (a, b)$ el polinomio de Taylor de grado 1 para la función f alrededor del punto $p = (a, b)$ es el polinomio

$$P_1(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Definición 3.3. Si $f \in C^2(D)$ se define el polinomio de Taylor de grado 2 en el punto p como

$$P_2(x) = f(p)+\nabla f(p)\cdot(x-p)+\frac{1}{2}(x-p)\,\mathrm{H}\,f(p)(x-p) = P_1(x)+\frac{1}{2}(x-p)\,\mathrm{H}\,f(p)(x-p)$$

Observación 3.4. Si $f(x, y)$ es una función de dos variables y $p = (a, b)$ el polinomio de Taylor de grado 1 para la función f alrededor del punto $p = (a, b)$ es el polinomio

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x - a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(y - b)^2\right) \end{aligned}$$

Observación 3.5. Estas son buenas aproximaciones de $f(x)$ en el sentido de que si f es de clase $C^1(D)$, entonces,

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - P_1(x)}{\|x - p\|} = 0$$

y si f es de clase $C^2(D)$, entonces,

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - P_2(x)}{\|x - p\|^2} = 0$$

4. Formas Cuadráticas

Definición 4.1. Una forma cuadrática de orden n es una función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$

Ejemplo 4.2. $Q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 4xz + 6yz + 5z^2$

Observación 4.3. Una forma cuadrática puede expresarse utilizando el producto de matrices. Por ejemplo,

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 - 2xy + 4xz + 6yz + 5z^2$$

En general, es posible hacer esto de muchas maneras. Por ejemplo, la forma cuadrática anterior puede expresarse también como

$$Q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(La condición es que

$$xAx^t = xBx^t$$

si $a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$)

Pero observemos que, si exigimos que la matriz A sea simétrica, entonces existe una única manera de expresar $Q(x)$ de la forma $Q(x) = xAx^t$. Formalmente,

Proposición 4.4. Toda forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, puede ser expresada de manera única como $Q(x) = xAx^t$ con $A = A^t$, una matriz simétrica.

Observación 4.5. Observamos que la matriz simétrica

$$A = (a_{ij})$$

se corresponde de forma única con la forma cuadrática

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$$

Identificaremos la forma cuadrática $Q(x) = xAx^t$ con la matriz A.

4.1. **Clasificación de las formas cuadráticas.**

Definición 4.6. Una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es

(1) Definida positiva si $Q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.
(2) Definida negativa si $Q(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.
(3) Semidefinida positiva si $Q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $Q(x) = 0$ para algún $x \neq 0$.
(4) Semidefinida negativa si $Q(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $Q(x) = 0$ para algún $x \neq 0$.
(5) Indefinida si hay dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $Q(x) > 0$ y $Q(y) < 0$.

Ejemplo 4.7. $Q_1(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2$ es definida positiva.

Ejemplo 4.8. $Q_2(x,y,z) = -2x^2 - y^2$ es semidefinida negativa.

Ejemplo 4.9. $Q_3(x,y) = -2x^2 - y^2$ es definida negativa.

Ejemplo 4.10. $Q_4(x,y,z) = x^2 - y^2 + 3z^2$ es indefinida.

Las formas cuadráticas anteriores son fáciles de clasificar porque están en forma diagonal, es decir,

$$Q_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposición 4.11. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Entonces la forma cuadrática

$$Q(x) = xAx^t = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

es,

(1) definida positiva si y sólo si $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.
(2) definida negativa si y sólo si $\lambda_i < 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.
(3) semidefinida positiva si y sólo si $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\lambda_k = 0$ para algún $k = 1, 2, \ldots, n$.
(4) semidefinida negativa si y sólo si $\lambda_i \leq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\lambda_k = 0$ para algún $k = 1, 2, \ldots, n$.
(5) indefinida si y sólo si existe algún $\lambda_i > 0$ y algún $\lambda_i < 0$.

Vamos a estudiar algunos métodos para determinar si una forma cuadrática es definida/semidefinida positiva/negativa o indefinida. Están basados en hacer un cambio de variables, de forma que, con las nuevas variables, la matriz asociada a la forma cuadrática está en forma diagonal. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matriz simétrica y

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ Dn = |A|$$

sus menores principales. Supongamos que

$$D_1 \neq 0, D_2 \neq 0, \ldots, D_{n-1} \neq 0$$

Entonces, existe un cambio de variable $Tx = z$ tal que la forma cuadrática

$$Q(x) = xAx^t$$

se convierte en

$$\tilde{Q}(z) = D_1 z_1^2 + \frac{D_2}{D_1} z_2^2 + \frac{D_3}{D_2} z_3^2 + \cdots + \frac{D_n}{D_{n-1}} z_n^2$$

De esta expresión de Q se obtiene fácilmente un criterio para clasificar formas cuadráticas.

Proposición 4.12. Supongamos $Q(x) = xAx^t$ con A una matriz simétrica y supongamos que $|A| = D_n \neq 0$. Entonces,

(1) la forma cuadrática $Q(x)$ es definida positiva si y sólo si $D_i > 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$;
(2) la forma cuadrática $Q(x)$ es definida negativa si y sólo si $(-1)^i D_i > 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$;

(3) si (1) y (2) no se cumplen, entonces Q es indefinida.

La anterior proposición es valida cuando $|A| \neq 0$. ¿Qué podemos decir si $|A| = 0$? La siguiente proposición proporciona una respuesta para algunos casos.

Proposición 4.13. Supongamos $Q(x) = xAx^t$ con A una matriz simétrica y supongamos que $|A| = D_n = 0, D_1 \neq 0, D_2 \neq 0, \ldots, D_{n-1} \neq 0$. Entonces,

(1) la forma cuadrática $Q(x)$ es semidefinida positiva si y sólo si $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1} > 0$;
(2) la forma cuadrática $Q(x)$ es semidefinida negativa si y sólo si $D_1 < 0, D_2 > 0, \ldots, (-1)^{n-1}D_{n-1} > 0$;
(3) en todos los demás casos, la forma cuadrática $Q(x)$ es indefinida.

A continuación se presentan algunos ejemplos de qué cosas se pueden hacer cuando $D_n = 0$ y además alguno de los menores principales $D_1, ..., D_{n-1}$ también se anula.

Ejemplo 4.14. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Observamos que $D_1 = 1, D_2 = D_3 = 0$. Por lo que la forma cuadrática asociada es semidefinida positiva si $a \geq 0$ e indefinida si $a < 0$. Sin embargo, no es posible determinar esto usando directamente los criterios anteriores. En cambio podemos observar que si intercambiamos las variables y y z, entonces la matriz asociada se convierte en

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y podemos utilizar la anterior proposición. Este resultado se presenta de manera formal en el siguiente comentario.

Definición 4.15. Un menor es central si incluye las **mismas filas y columnas**. Por ejemplo el menor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

es un menor central, porque incluye las filas y columnas 1 y 3. Pero el menor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

no es central, porque incluye las filas 1 y 3 y las columnas 1 y 2.

Proposición 4.16. La proposición 4.13 se cumple si sustituimos la cadena de menores principales por otra cadena formada por menores centrales.

Observación 4.17. Los criterios que hemos estudiado son especialmente útiles en matrices simétricas de orden 2×2. Por ejemplo si A es de orden 2×2 y $|A| < 0$, entonces la forma cuadrática asociada es indefinida. ¿Por qué?

5. Concavidad y Convexidad

En esta sección asumimos que: $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y convexo.

Definición 5.1. Decimos que

(1) f es **cóncava** en D si para cada $\lambda \in [0,1]$ y cada $x, y \in D$ tenemos que

$$f\left((\lambda x + (1-\lambda)y\right) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

(2) f es **convexa** en D si para cada $\lambda \in [0,1]$ y cada $x, y \in D$ tenemos que

$$f\left((\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Observación 5.2. f es convexa en D si y sólo si $-f$ es cóncava en D.

Definición 5.3. Decimos que

(1) f es **estrictamente cóncava** en D si para cada $\lambda \in (0,1)$ y cada $x, y \in D$, $x \neq y$ tenemos que

$$f\left((\lambda x + (1-\lambda)y\right) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

(2) f es **estrictamente convexa** en D si para cada $\lambda \in (0,1)$ y cada $x, y \in D$, $x \neq y$ tenemos que

$$f\left((\lambda x + (1-\lambda)y\right) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Observación 5.4. f es estrictamente convexa en D si y sólo si $-f$ es estrictamente cóncava en D.

Proposición 5.5. Sea D un conjunto abierto y convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces,

(1) f es cóncava $\Leftrightarrow$ el conjunto $\{(x,y) : x \in D, y \leq f(x)\}$ es convexo.
(2) f es convexa $\Leftrightarrow$ el conjunto $\{(x,y) : x \in D, y \geq f(x)\}$ es convexo.
(3) f es estrictamente convexa $\Leftrightarrow$ el conjunto $\{(x,y) : x \in D, y \geq f(x)\}$ es convexo y la gráfica de f no contiene segmentos.
(4) f es estrictamente cóncava $\Leftrightarrow$ el conjunto $\{(x,y) : x \in D, y \leq f(x)\}$ es convexo y la gráfica de f no contiene segmentos.
(5) Si f es convexa, entonces el conjunto $\{x \in D : f(x) \leq \alpha\}$ es convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
(6) Si f es cóncava, entonces el conjunto $\{x \in D : f(x) \geq \alpha\}$ es convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Ejemplo 5.6. $f(x,y) = x^2 + y^2$ es estrictamente convexa.

Ejemplo 5.7. $f(x,y) = (x-y)^2$ es convexa, pero no estrictamente convexa.

Observación 5.8. Las condiciones (5) y (6) son necesarias pero no suficiente. Por ejemplo, cualquier función monónona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface que ambos conjuntos

$$\{x \in D : f(x) \leq \alpha\} \quad \text{y} \quad \{x \in D : f(x) \geq \alpha\}$$

son convexos.

6. Condiciones de Primer Orden

Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cóncava y diferenciable en un conjunto convexo D; entonces, el plano tangente a la gráfica de f en $p \in D$ está por encima de la gráfica de f. Recordemos que el plano tangente es el conjunto de puntos $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ que satisfacen la ecuación,

$$x_{n+1} = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p)$$

Por lo tanto, si f es diferenciable y cóncava en D, tenemos que,

$$f(x) \leq f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p)$$

para todo $x \in D$.

Proposición 6.1. Supongamos que $f \in C^1(D)$. Entonces,

(1) f es cóncava en D si y sólo si para todo $u, v \in D$ tenemos que
$$f(u) \leq f(v) + \nabla f(v) \cdot (u - v)$$
(2) f es estrictamente cóncava en D si y sólo si para todo $u, v \in D$ con $u \neq v$ tenemos que
$$f(u) < f(v) + \nabla f(v) \cdot (u - v)$$

Existe un enunciado análogo para funciones convexas.

Proposición 6.2. Supongamos que $f \in C^1(D)$. Entonces,

(1) f es convexa en D si y sólo si para todo $u, v \in D$ tenemos que
$$f(u) \geq f(v) + \nabla f(v) \cdot (u - v)$$
(2) f es estrictamente convexa en D si y sólo si para todo $u, v \in D$ con $u \neq v$ tenemos que
$$f(u) > f(v) + \nabla f(v) \cdot (u - v)$$

7. Condiciones de Segundo Orden para Concavidad y Convexidad

Proposición 7.1. Sea el conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y convexo. Sea $f \in C^2(D)$, y $\mathrm{H}\, f(p)$ la matriz Hessiana de f en p. Entonces,

(1) f es cóncava en D si y sólo si para todo $p \in D$, $\mathrm{H}\, f(p)$ es semidefinida negativa o definida negativa. Es decir, f es cóncava en D si y sólo si para todo $p \in D$ y $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos $x \cdot \mathrm{H}(p)x \leq 0$.
(2) f es convexa en D si y sólo si para todo $p \in D$, $\mathrm{H}\, f(p)$ es semidefinida positiva o definida positiva. Es decir, f es convexa en D si y sólo si para todo $p \in D$ y $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos $x \cdot \mathrm{H}(p)x \geq 0$.
(3) Si $\mathrm{H}\, f(p)$ es definida negativa para todo $p \in D$, entonces f es estrictamente cóncava en D.
(4) Si $\mathrm{H}\, f(p)$ es definida positiva para todo $p \in D$, entonces f es estrictamente convexa en D.

Observación 7.2. Es posible demostrar que si f es estrictamente convexa, entonces $\mathrm{H}\, f(x)$ es definida positiva excepto en un conjunto "pequeño". Por ejemplo, $f(x, y) = x^4 + y^4$ es estrictamente convexa y

$$\mathrm{H}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

es positiva definida si $xy \neq 0$, es decir, es positiva definida en todo $\mathbb{R}^2$ excepto en los dos ejes $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Para los puntos sobre los dos ejes (el conjunto de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $xy = 0$) la matriz Hessiana es semidefinida positiva.

8. Aplicaciones a conjuntos convexos

Proposición 8.1. Si $X_1, \ldots, X_k$ son subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, entonces $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k$ también es un conjunto convexo.

Ejemplo 8.2. Utilizando la teoría explicada en este capítulo razonar por qué el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 10y^2 \leq 10, x \geq 0, y \leq 0\}$ es convexo.

Ejemplo 8.3 (Concavidad, convexidad y preferencias). En el ejemplo 2.7 consideramos un consumidor cuyas preferencias (sobre dos bienes) están representadas por la función de utilidad $u(x, y)$. Las curvas de indiferencia del consumidor son los conjuntos

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, \quad u(x, y) = C\}$$

con $C \in \mathbb{R}$. Supongamos que la función $u(x, y)$ es diferenciable y que

$$\frac{\partial u}{\partial x} > 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} > 0$$

Aplicando el Teorema de la función implícita, vemos que la ecuación

$$u(x, y) = C$$

define a y como una función de x. El conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, \quad u(x, y) = C\}$$

se puede representar como la gráfica de la función $y(x)$. Y derivando implícitamente la ecuación $u(x, y) = C$ podemos calcular la derivada y'

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y'(x) = 0$$

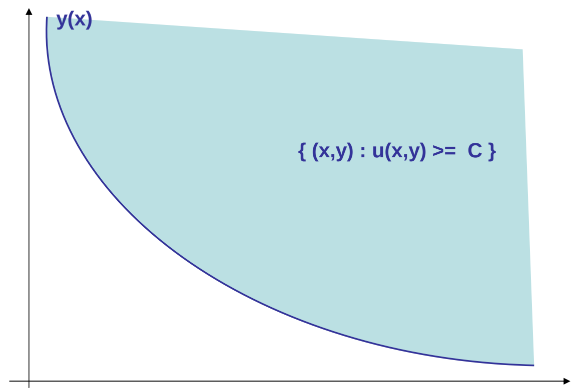
Aplicando de nuevo el Teorema de la función implícita obtenemos una ecuación para la derivada segunda y''

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} y'(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} \left(y'(x)\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} y''(x) = 0 \tag{8.1}$$

Una de las hipótesis estándar en Teoría Económica es que el conjunto formado por las cestas preferidas a una dada es un conjunto convexo. En términos de la función de utilidad esto se traduce en que el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, \quad u(x, y) > C\}$$

es convexo.



Por la proposición 5.5, una forma de garantizar que el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, \quad u(x,y) > C\}$ es convexo sería asumir que la función $u(x,y)$ es cóncava[2]. Supongamos que la función $u(x,y)$ es cóncava y de clase C^2. De acuerdo a la definición de concavidad, esto significa que para todo $h, k \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} h^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} k^2 \leq 0$$

Si en esta ecuación tomamos $h = 1$, $k = y'(x)$ obtenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} y'(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} \left(y'(x)\right)^2 \leq 0$$

y despejando y'' en la ecuación 8.1 obtenemos

$$y''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} y'(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} \left(y'(x)\right)^2}{\partial u / \partial x} \geq 0$$

es decir la función $y(x)$ es convexa, por lo que $y''(x)$ es creciente. Como $\mathrm{RMS}(x, y(x)) = -y'(x)$, vemos que si las preferencias del consumidor son convexas su relación marginal de sustitución es decreciente.

[2]Sin embargo, que el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, \quad u(x,y) \geq C\}$ sea convexo no implica necesariamente que la función u sea cóncava