

August 4, 2018

## CAPÍTULO 3: DERIVADAS PARCIALES Y DIFERENCIACIÓN

### 1. DERIVADAS PARCIALES Y FUNCIONES DIFERENCIABLES

En este capítulo,  $D$  denota un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.1.** Consideremos una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $p \in D$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Definimos la derivada parcial de  $f$  en el punto  $p$  respecto a la variable  $i$ -ésima como el límite (si existe)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t}$$

donde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  definida como

$$e_i = ( \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ elementos}}, i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i \text{ elementos}} )$$

Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^2$  la base canónica es

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0) \\ e_2 &= (0, 1) \end{aligned}$$

y en  $\mathbb{R}^3$  la base canónica es

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

**Observación 1.2.** Cuando  $n = 2$ , en la definición anterior escribimos

$$p = (x, y), \quad f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

y utilizamos la notación,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t} \end{aligned}$$

De la misma forma, cuando  $n = 3$  escribimos

$$p = (x, y, z)$$

y utilizamos la notación

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t, y, z) - f(x, y, z)}{t} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, y + t, z) - f(x, y, z)}{t} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + t) - f(x, y, z)}{t} \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.3.** En economía, las derivadas parciales de una función de utilidad se denominan ‘utilidades marginales’, las derivadas parciales de una función de producción se denominan ‘productividades marginales’.

Consideremos, por ejemplo la función de producción Cobb-Douglas

$$f(K, L) = 5K^{1/3}L^{2/3}$$

donde  $f$  es el número de unidades producidas,  $K$  es el capital y  $L$  es el trabajo. Es decir, la fórmula anterior significa que si utilizamos  $K$  unidades de capital y  $L$  unidades de trabajo, entonces se producen  $f(K, L) = 5K^{1/3}L^{2/3}$  unidades de un artículo. Las constantes  $A = 5$ ,  $\alpha = 1/3$  y  $\beta = 2/3$  son parámetros de la tecnología de producción.

Las ‘productividades marginales’ del capital y del trabajo son

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial K} &= \frac{5}{3}K^{-2/3}L^{2/3} \\ \frac{\partial f}{\partial L} &= \frac{10}{3}K^{1/3}L^{-1/3}\end{aligned}$$

La productividad marginal del trabajo,

$$\frac{\partial f}{\partial L}(K, L)$$

se interpreta en economía como una **aproximación** a la variación en la producción del artículo cuando pasamos de utilizar  $K$  unidades de capital y  $L$  unidades de trabajo a utilizar una unidad más  $L + 1$  de trabajo y las mismas unidades  $K$  de capital que antes.

Vemos que la productividad del trabajo y del capital es positiva. Es decir si utilizamos más trabajo y/o más capital, aumenta la producción. Por otra parte, la productividad del trabajo es decreciente en el trabajo y creciente en el capital. Esto se interpreta de la siguiente manera.

- Supongamos que la cantidad de capital utilizado  $K$  se mantiene constante. Si  $L' > L$  entonces

$$f(K, L' + 1) - f(K, L') < f(K, L + 1) - f(K, L)$$

Es decir, el aumento en la producción al utilizar una unidad más de trabajo es decreciente en el trabajo inicial utilizado. Si se mantiene el capital constante, usar una unidad adicional de trabajo, cuando ya se está utilizando mucho trabajo, aumenta poco la producción.

Podemos pensar que  $f(K, L)$  es la producción de un producto agrícola en una parcela de tierra donde  $L$  son las personas contratadas y el tamaño  $K$  de la parcela se mantiene fijo. El impacto en la producción al contratar a una persona adicional es mayor si se están utilizando pocas personas comparado con el caso en que ya se están utilizando muchas.

- Supongamos que la cantidad de trabajo utilizado  $L$  se mantiene constante. Si  $K' > K$  entonces

$$f(K', L + 1) - f(K', L) > f(K, L + 1) - f(K, L)$$

Es decir, el aumento en la producción al utilizar una unidad más de trabajo es creciente en las unidades de capital que se están utilizando. El capital y el trabajo son complementarios. En el ejemplo anterior, contratar a una

persona adicional tiene un impacto mayor en la producción cuanto mayor es la parcela cultivada.

**Definición 1.4.** Consideremos una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Si, en el punto  $p \in D$ , existen las  $n$  derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)$$

se define el **vector gradiente** de  $f$  en  $p$  como el siguiente vector

$$\nabla f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$$

**Definición 1.5.** Consideremos una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos que las  $n$  derivadas parciales en el punto  $p \in D$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)$$

existen. Decimos que  $f$  es diferenciable en  $p$  si

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(p+v) - f(p) - \nabla f(p) \cdot v}{\|v\|} = 0$$

Observemos que el límite se toma para  $v \in \mathbb{R}^n$ .

**Observación 1.6.** Una función de **dos variables**  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en el punto  $p = (a, b)$  si

$$\lim_{(v_1, v_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+v_1, b+v_2) - f(a, b) - \nabla f(a, b) \cdot (v_1, v_2)}{\|(v_1, v_2)\|} = 0$$

Llamando

$$x = a + v_1, \quad y = b + v_2$$

vemos que  $(v_1, v_2) \rightarrow (0, 0)$  es equivalente a  $(x, y) \rightarrow (a, b)$ , por lo que el límite anterior se puede escribir como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b)}{\|(x - a, y - b)\|} = 0$$

Escribiendo este límite de forma explícita obtenemos que  $f$  es diferenciable en el punto  $p = (a, b)$  si

$$(1.1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

**Ejemplo 1.7.** Consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vamos a demostrar que  $f$  no es diferenciable en el punto  $p = (0, 0)$ . Primero, calculamos  $\nabla f(0, 0)$ . Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^3} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^3} = 0 \end{aligned}$$

por lo que  $\nabla f(0,0) = (0,0)$ . Entonces,  $f$  es diferenciable en el punto  $p = (0,0)$  si y sólo si

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(p+v) - f(p) - \nabla f(p) \cdot v}{\|v\|} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f((0,0) + (x,y)) - f(0,0) - \nabla f(p) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - (0,0) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Vamos a probar que este límite no existe. Consideramos la función

$$g(x,y) = \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Observamos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{(2t^2)^{3/2}} = 0$$

y que

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{(2t^2)^{3/2}} = \frac{1}{(2)^{3/2}} \neq 0$$

por lo que el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

no existe y concluimos que  $f$  no es diferenciable en el punto  $(0,0)$ .

**Ejemplo 1.8.** Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Se puede demostrar que  $f$  es diferenciable en el punto  $p = (0,0)$ . Primero, calculemos  $\nabla f(0,0)$ . Observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^3} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^3} = 0 \end{aligned}$$

y obtenemos que  $\nabla f(0,0) = (0,0)$ . Utilizando la notación  $v = (x,y)$ ,  $f$  es diferenciable en el punto  $p = (0,0)$  si y sólo si

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(p+v) - f(p) - \nabla f(p) \cdot v}{\|v\|} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f((0,0) + (x,y)) - f(0,0) - \nabla f(p) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - (0,0) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Eligiendo  $\delta = \varepsilon$  y suponiendo que  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ , tenemos que,

$$\begin{aligned} \left| \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right| &= \frac{|x| y^2 |y|}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2} y^2 |y|}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) |y|}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(x^2 + y^2)^{3/2} |y|}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

por lo que,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

y la función es diferenciable en el punto  $(0,0)$ .

**Proposición 1.9.** Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  es diferenciable en el punto  $p \in D$ , entonces  $f$  es continua en ese punto.

**Ejemplo 1.10.** Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

¿Es continua y/o diferenciable en  $(0,0)$ ? Se calcula fácilmente el límite iterado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right) = 0$$

Por otra parte, tomando la curva

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2$$

observamos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Por tanto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

no existe y  $f$  no es continua en  $(0,0)$ . Además, por la Proposición 1.9,  $f$  tampoco es diferenciable en  $(0,0)$ .

**Teorema 1.11.** Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  y  $p \in D$ . Supongamos que existe un  $r > 0$  tal que las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

existen y son continuas en todo los puntos de la bola abierta  $B(p, r)$ . Entonces, la función  $f$  es diferenciable en  $p$ .

**Ejemplo 1.12.** Podemos utilizar el teorema anterior para demostrar que la función

$$f(x, y, z) = xe^{yz} + y \sin z$$

es diferenciable en todo los puntos de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 1.13.** Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  en  $D$  si todas las derivadas parciales de  $f$  existen y son continuas en todo  $D$ . En este caso escribimos  $f \in C^1(D)$ .

## 2. DERIVADAS DIRECCIONALES

**Definición 2.1.** Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado un punto  $p \in D$  y un vector  $v \in \mathbb{R}^n$ , si el siguiente límite existe

$$D_v f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

se denomina la **derivada** de  $f$  en el punto  $p$  **según el vector**  $v$ .

Si  $\|v\| = 1$ , entonces  $D_v f(p)$  se denomina la **derivada direccional** de  $f$  en el punto  $p$  **en la dirección del vector**  $v$ .

**Observación 2.2.** Cuando  $n = 1$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{R}$  y  $v = 1$ , la definición anterior coincide con la derivada de una función de una variable estudiada anteriormente

$$f'(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t) - f(p)}{t}$$

**Ejemplo 2.3.** Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = xy$ . Tomamos  $p = (1, -1)$ ,  $v = (3, 4)$ . Para cada  $t \in \mathbb{R}$  tenemos que

$$p + tv = (1 + 3t, -1 + 4t)$$

y

$$\begin{aligned} D_v f(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 + 3t, -1 + 4t) - f(1, -1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + 3t)(-1 + 4t) + 1}{t} = 1 \end{aligned}$$

Y puesto que,  $\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ , la derivada direccional de  $f$  en  $p$  en la dirección del vector  $v$  es

$$\frac{1}{\|v\|} D_v f(p) = \frac{1}{5}$$

**Observación 2.4.** Si tomamos el vector  $i$ -ésimo de la base canónica,

$$v = e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$$

entonces

$$D_{e_i} f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

es la derivada parcial de  $f$  respecto a la variable  $i$ -ésima en el punto  $p$ .

**Proposición 2.5.** Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable en el punto  $p \in D$ , entonces

$$(2.1) \quad D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v$$

**Ejemplo 2.6.** Para la función del ejemplo 2.3, donde  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $f(x, y) = xy$  y  $p = (1, -1)$ ,  $v = (3, 4)$ . Tenemos que,

$$\nabla f(p) = (y, x) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = (-1, 1)$$

y teniendo en cuenta que  $f$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$ , obtenemos que

$$D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v = (-1, 1) \cdot (3, 4) = -3 + 4 = 1$$

que coincide con lo que hemos calculado en el ejemplo 2.3.

**Observación 2.7.** También se puede definir la derivada de una función  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  según el vector  $v$ . Para ello escribimos la función  $f$  usando sus funciones coordenadas

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

con  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $i = 1, \dots, m$ . Y definimos

$$D_v f(p) = (D_v f_1(p), D_v f_2(p), \dots, D_v f_m(p))$$

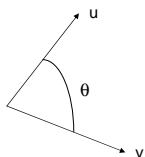
En este caso vemos que  $D_v f(p)$  es un vector de  $\mathbb{R}^m$ . De manera análoga se define la **derivada direccional** de  $f$  en el punto  $p$  en la **dirección de un vector unitario**  $u$ .

### 3. INTERPRETACIÓN DEL GRADIENTE

La fórmula 2.1 puede ser utilizada para establecer la siguiente interpretación del vector gradiente. El producto escalar de dos vectores  $u, v$  en  $\mathbb{R}^n$  satisface la expresión

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo comprendido entre ellos



Aplicando esta observación a la fórmula 2.1, obtenemos que

$$D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v = \|\nabla f(p)\| \|v\| \cos \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo comprendido entre los vectores  $\nabla f(p)$  y  $v$ . Si  $v$  es un vector unitario, entonces la derivada de  $f$  en la dirección de  $v$  es

$$D_v f(p) = \|\nabla f(p)\| \cos \theta$$

Por tanto, el valor de la derivada  $D_v f(p)$ ,

- es máximo cuando  $\theta = 0$ , es decir, cuando los vectores  $\nabla f(p)$  y  $v$  tienen la misma dirección y el mismo sentido.
- es mínimo cuando  $\theta = \pi$ , es decir, cuando los vectores  $\nabla f(p)$  y  $v$  tienen la misma dirección y sentidos opuestos.
- es cero cuando  $\theta = \pi/2$  o  $\theta = 3\pi/2$ , es decir, cuando los vectores  $\nabla f(p)$  y  $v$  son perpendiculares.

Se deduce que,

- La dirección de máximo crecimiento de  $f$  es la dirección determinada por  $\nabla f(p)$ .
- La dirección de máximo decrecimiento de  $f$  es la dirección opuesta a  $\nabla f(p)$ .
- La función  $f$  permanece constante en las direcciones perpendiculares a  $\nabla f(p)$ .

#### 4. LA REGLA DE LA CADENA

**Definición 4.1.** Dada una función  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y un punto  $p \in D$ , definimos la matriz Jacobiana de  $f$  en el punto  $p$  como la siguiente matriz de orden  $m \times n$

$$Df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(p)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(p)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(p)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**Observación 4.2.** Si  $f(x) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ¿cuál es la diferencia entre  $Df(p)$  y  $\nabla f(p)$ ?

**Observación 4.3.** Si  $m = n = 1$  ¿Qué es  $Df(p)$ ?

**Definición 4.4.** Una función  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se dice que es diferenciable en un punto  $p \in D$  si cada una de las funciones  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  es diferenciable en  $p$ .



**Teorema 4.5** (Regla de la cadena). Sean  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ . Supongamos que  $g$  es diferenciable en  $p \in \mathbb{R}^n$  y que  $f$  es diferenciable en  $g(p) \in \mathbb{R}^m$ . Entonces la función  $f \circ g$  es diferenciable en  $p$  y

$$D(f \circ g)(p) = Df(g(p)) Dg(p)$$

**Observación 4.6.** La expresión  $D(f \circ g)(p) = Df(g(p)) Dg(p)$  contiene el producto de 2 matrices.

**Ejemplo 4.7** (Caso especial de la regla de la cadena). Sea  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva diferenciable y  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Supongamos que  $\sigma(t)$  se escribe como

$$\sigma(t) = (x(t), y(t))$$

Entonces la regla de la cadena dice que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) &= D(f \circ \sigma)(t) = Df(x, y)|_{\substack{x=x(t) \\ y=y(t)}} D\sigma(t) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{\substack{x=x(t) \\ y=y(t)}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.8** (Caso especial de la regla de la cadena). Sea  $g(s, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función diferenciable y  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Supongamos que  $g(s, t)$  se escribe como

$$g(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$$

por lo que

$$(f \circ g)(s, t) = f(g(s, t)) = f(x(s, t), y(s, t))$$

Entonces la regla de la cadena dice que

$$\begin{aligned} Df(x(s, t), y(s, t)) &= D(f \circ g)(s, t) = Df(x, y)|_{\substack{x=x(s, t) \\ y=y(s, t)}} Dg(s, t) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \circ g)}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial(f \circ g)}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.9.** Consideremos la función de producción Cobb-Douglas

$$f(K, L) = 5K^{1/3}L^{2/3}$$

donde  $f$  es el número de unidades producidas,  $K$  es el capital y  $L$  es el trabajo. Supongamos que el capital y el trabajo son funciones del tiempo

$$K = K(t), \quad L = L(t)$$

Entonces la producción

$$f(K(t), L(t))$$

es también una función del tiempo. ¿Cómo cambia la producción en un instante determinado? Usando la regla de la cadena podemos expresar este cambio.

$$\begin{aligned} \frac{df(K(t), L(t))}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial K} \frac{dK}{dt} + \frac{\partial f}{\partial L} \frac{dL}{dt} \\ &= \frac{5}{3} K^{-2/3} L^{2/3} \frac{dK}{dt} + \frac{10}{3} K^{1/3} L^{-1/3} \frac{dL}{dt} \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.10.** Supongamos que un agente tiene una función de utilidad diferenciable

$$u(x, y)$$

donde  $x$  es un bien de consumo e  $y$  es la contaminación ambiental. Entonces la utilidad del agente es creciente en  $x$  y decreciente en  $y$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &> 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &< 0 \end{aligned}$$

Supongamos que para producir  $x$  unidades del bien se generan  $y = f(x)$  unidades de contaminación, ¿Cuál es el nivel óptimo de consumo del bien  $x$  para el agente?

La utilidad del agente cuando consume  $x$  del bien y se generan  $y = f(x)$  unidades de contaminación es

$$u(x, f(x))$$

Por tanto el agente maximiza la función de utilidad anterior. La condición de primer orden es

$$\frac{du(x, f(x))}{dx} = 0$$

Por la regla de la cadena, vemos que la ecuación

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, f(x))f'(x)$$

determina el nivel óptimo del bien.

## 5. DERIVADA A LO LARGO DE UNA CURVA Y CURVAS DE NIVEL

**Observación 5.1** (Un caso especial de la regla de la cadena). Sea  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva diferenciable y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, donde  $D$  es una subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que,  $\sigma(t)$  se escribe como

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_n(t))$$

donde para cada  $i = 1, \dots, n$  y cada  $t \in \mathbb{R}$  la función  $\sigma_i(t)$  es diferenciable. En este caso, podemos escribir

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left( \frac{d\sigma_1}{dt}, \frac{d\sigma_2}{dt}, \dots, \frac{d\sigma_n}{dt} \right)$$

Entonces, tenemos que  $f(\sigma(t))$  es diferenciable y

$$\frac{d}{dt} (f(\sigma(t))) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \frac{d\sigma}{dt}$$

**Ejemplo 5.2.** Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de dos variables y  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , la regla de la cadena se escribe como

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x(t) \\ y=y(t)}} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x(t) \\ y=y(t)}} \frac{dy(t)}{dt}$$

**Ejemplo 5.3.** Si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de tres variables y  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , la regla de la cadena se escribe como

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t)}} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t)}} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{\substack{x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t)}} \frac{dz(t)}{dt}$$

La observación 5.1 proporciona otra interpretación del vector gradiente. Tomemos un punto  $p \in D$  y supongamos que la función  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable. Sea  $C \in \mathbb{R}$  y supongamos que el conjunto de nivel

$$S_C = \{x \in D : f(x) = C\}$$

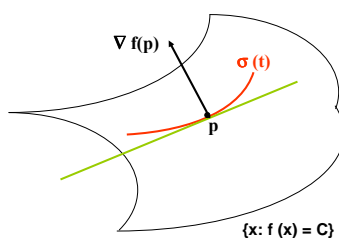
es no vacío. Sea  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva diferenciable y supongamos que  $\sigma(t) \in S_C$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Es decir,

$$f(\sigma(t)) = c$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Derivando y aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$0 = \frac{d}{dt} f(\sigma(t)) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \frac{d\sigma}{dt}$$

Es decir, los vectores  $\nabla f(\sigma(t))$  y  $d\sigma(t)/dt$  son perpendiculares para todo  $t \in \mathbb{R}$ .



El argumento anterior demuestra que en cualquier punto  $p \in S_C$ , el gradiente  $\nabla f(p)$  es perpendicular al conjunto de nivel  $S_C$ .

**Observación 5.4.** A continuación, calculamos el plano tangente a la gráfica de una función de dos variables. Consideremos una función diferenciable  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . La gráfica de  $f$  es el conjunto

$$G = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Definimos la función de **tres** variables

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z$$

Entonces, la gráfica de  $f$  se puede escribir también como

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$$

Vemos que dado un punto  $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , el plano  $T$  tangente a  $G$  en el punto  $(a, b, f(a, b))$  satisface las siguientes propiedades

- $T$  contiene el punto  $(a, b, f(a, b))$ .
- $T$  es perpendicular al vector gradiente  $\nabla g(a, b, f(a, b))$ .

Esta información permite determinar una ecuación para el plano tangente  $T$

$$\nabla g(a, b, f(a, b)) \cdot ((x, y, z) - (a, b, f(a, b))) = 0$$

y observando que

$$\nabla g(a, b, f(a, b)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right)$$

vemos que una ecuación para  $T$  es

$$(5.1) \quad f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) = z$$

Ahora podemos proporcionar una nueva interpretación de la definición de diferenciabilidad 1.5. Sea

$$P_1(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$

En el caso de dos variables, la ecuación 1.1 nos dice que la función  $f$  es diferenciable en el punto  $(a, b)$  si

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{|f(x, y) - P_1(x, y)|}{\|(x - a, y - b)\|} = 0$$

En vista de la ecuación 5.1, la función  $f$  es diferenciable en el punto  $(a, b)$  si el plano tangente es una buena aproximación al valor de la función

$$f(x, y) \approx f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$

## 6. APROXIMACIÓN DE PRIMER ORDEN MEDIANTE DESARROLLOS DE TAYLOR

Si el plano tangente es una buena aproximación de la función podemos utilizar el valor de la variable  $z$  en la ecuación 5.1 como una aproximación del valor de  $f(x, y)$ , es decir

$$f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) + f(a, b)$$

Lo anterior motiva la siguiente definición.

**Definición 6.1.** El polinomio de Taylor de grado 1 para la función  $f$  alrededor del punto  $p = (a, b)$  es el polinomio

$$P_1(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$

La siguiente proposición precisa el enunciado de que el polinomio de Taylor de grado 1 es una buena aproximación a la función.

**Proposición 6.2.** Sea  $f$  una función de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $P_1(x, y)$  el polinomio de Taylor de grado 1 para la función  $f$  alrededor del punto  $p = (a, b)$ . Entonces,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - P_1(x, y)}{\|(x - a, y - b)\|} = 0$$

**Observación 6.3.** Comparando la ecuación en la proposición anterior con la ecuación 1.1 vemos que una función  $f$  de dos variables es diferenciable en el punto  $p$  si y sólo si existen las derivadas parciales de  $f$  en ese punto y el polinomio de Taylor de primer orden es una ‘buena’ aproximación al valor de la función cerca del punto  $p$ .