August 3, 2018

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA DEL ESPACIO EUCLIDIANO

1. Producto Escalar en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1. Dado $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, su **producto escalar** está definido como

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Ejemplo 1.2. $(2, 1, 3) \cdot (-1, 0, 2) = -2 + 6 = 4$

Observación 1.3. $x \cdot y = y \cdot x$.

Definición 1.4. Dado $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos su **norma** por

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Ejemplo 1.5. Ejemplo: $\|(-1, 0, 3)\| = \sqrt{10}$

Observación 1.6. La siguiente es la interpretación de la norma:

- La magnitud $\|x\|$ es la distancia desde x al origen.
- También podemos interpretar $\|x\|$ como la longitud del vector x.
- La magnitud $\|x - y\|$ es la distancia entre x e y.

Observación 1.7. Sea θ el ángulo entre u y v. Entonces

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

2. El Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$

Definición 2.1. Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se define la **bola abierta** con centro p y radio r como el conjunto

$$B(p, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|p - y\| < r\}$$

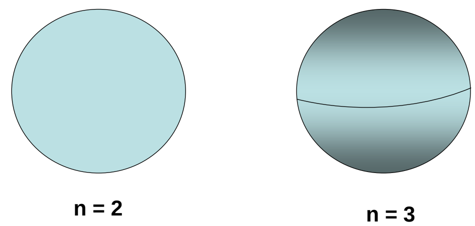
y la **bola cerrada** con centro p y radio r como el conjunto

$$\overline{B(p, r)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|p - y\| \leq r\}$$

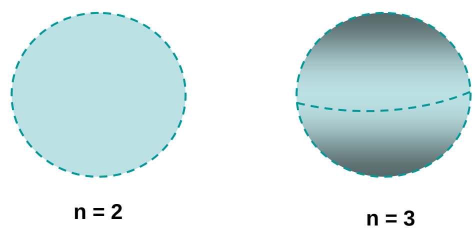
Observación 2.2.

- Recordemos que $\|p - y\|$ es la distancia de p a y.
- Para $n = 1$, se tiene que $B(p, r) = (p - r, p + r)$ y $\overline{B(p, r)} = [p - r, p + r]$.

- Para $n = 2, 3$ las bolas cerradas son



- Para $n = 2, 3$ las bolas abiertas son

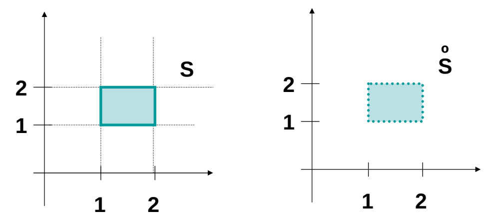


Definición 2.3. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que $p \in \mathbb{R}^n$ es un **punto interior** de S si existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \subset S$.

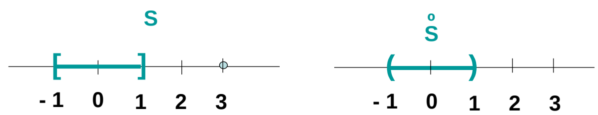
Notación: $\overset{\circ}{S}$ es el conjunto de puntos interiores de S.

Observación 2.4. Observemos que $\overset{\circ}{S} \subset S$ porque $p \in B(p,r)$ para todo $r > 0$.

Ejemplo 2.5. Consideremos $S \subset \mathbb{R}^2, S = [1,2] \times [1,2]$. Entonces $\overset{\circ}{S} = (1,2) \times (1,2)$.

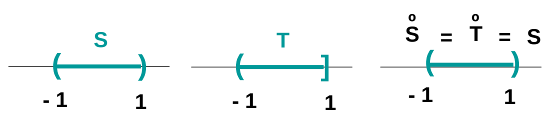


Ejemplo 2.6. Consideremos $S = [-1, 1] \cup \{3\} \subset \mathbb{R}$. Entonces $\overset{\circ}{S} = (-1, 1)$.

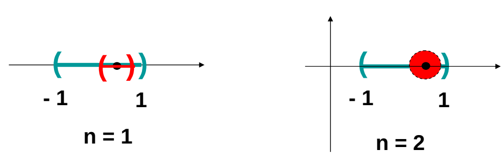


Definición 2.7. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **abierto** si $S = \overset{\circ}{S}$

Ejemplo 2.8. En $\mathbb{R}$, el conjunto $S = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ es abierto, pero $T = (-1, 1] \subset \mathbb{R}$ no lo es.



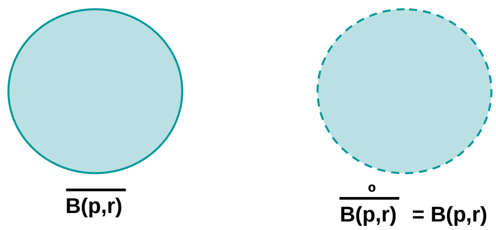
Ejemplo 2.9. El conjunto $S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$ no es abierto en $\mathbb{R}^2$.



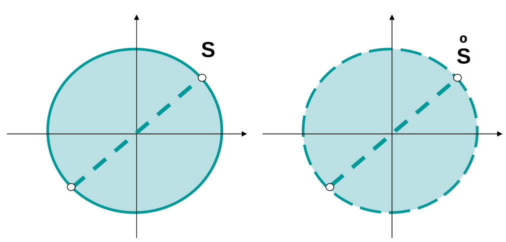
Compárese este ejemplo con el ejemplo anterior.

Ejemplo 2.10. La bola abierta $B(p,r)$ es un conjunto abierto.

Ejemplo 2.11. La bola cerrada $\overline{B(p,r)}$ no es un conjunto abierto, puesto que $\overset{\circ}{\overline{B(p,r)}} = B(p,r) \neq \overline{B(p,r)}$.



Ejemplo 2.12. Consideremos el conjunto $S = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$. Entonces $\overset{\circ}{S} = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1, x \neq y\}$. Por lo que, S no es abierto.

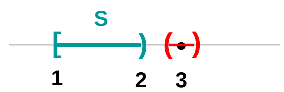


Proposición 2.13. $\overset{\circ}{S}$ es el conjunto abierto mas grande contenido en S. (Es decir, $\overset{\circ}{S}$ es un conjunto abierto, $\overset{\circ}{S} \subset S$ y si $A \subset S$ es otro conjunto abierto, entonces $A \subset \overset{\circ}{S}$).

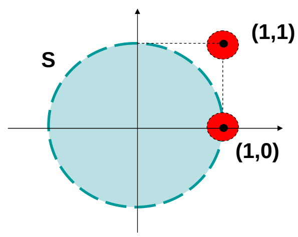
Definición 2.14. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es un **punto de clausura** de S si para cada $r > 0$ se tiene que $B(p,r) \cap S \neq \emptyset$.

Notación: $\bar{S}$ es el conjunto de puntos de clausura de S.

Ejemplo 2.15. Consideremos el conjunto $S = [1,2) \subset \mathbb{R}$. Entonces, los puntos $1, 2 \in \bar{S}$. Pero, $3 \notin \bar{S}$.

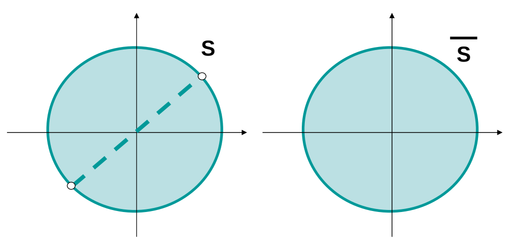


Ejemplo 2.16. Consideremos el conjunto $S = B\left((0,0),1\right) \subset \mathbb{R}^2$. Entonces, el punto $(1,0) \in \bar{S}$. Pero, el punto $(1,1) \notin \bar{S}$.



Ejemplo 2.17. Sea $S = [0,1]$, $T = (0,1)$. Entonces $\bar{S} = \bar{T} = [0,1]$.

Ejemplo 2.18. Sea $S = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$. Entonces, $\bar{S} = \overline{B\left((0,0),1\right)}$.



Ejemplo 2.19. $\overline{B(p,r)}$ es la clausura de la bola abierta $B(p,r)$.

Observación 2.20. $S \subset \bar{S}$.

Definición 2.21. Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si $F = \bar{F}$.

Proposición 2.22. Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si $\mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto.

Ejemplo 2.23. El conjunto $[1,2] \subset \mathbb{R}$ es cerrado. Pero, el conjunto $[1,2) \subset \mathbb{R}$ no lo es.

Ejemplo 2.24. El conjunto $\overline{B(p,r)}$ es cerrado. Pero, el conjunto $B(p,r)$ no lo es.

Ejemplo 2.25. El conjunto $S = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es cerrado.

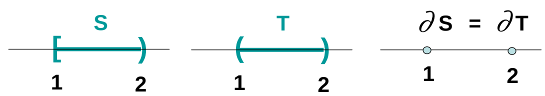
Proposición 2.26. La clausura $\bar{S}$ de S es el conjunto cerrado mas pequeño que contiene a S. (Es decir $\bar{S}$ es cerrado, $S \subset \bar{S}$ y si F es otro conjunto cerrado que contiene a S, entonces $\bar{S} \subset F$).

Definición 2.27. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, se dice que $p \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de S si para cada $r > 0$, se tiene que,

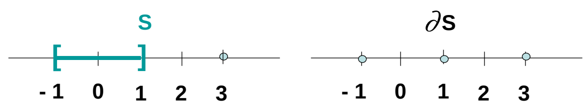
(1) $B(p,r) \cap S \neq \emptyset$.
(2) $B(p,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \emptyset$.

Notación: El conjunto de puntos frontera de S se denota por $\partial S = Fr(S)$.

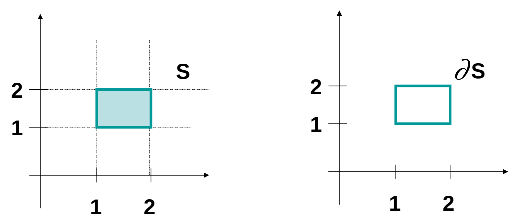
Ejemplo 2.28. Supongamos que $S = [1, 2)$, $T = (1, 2)$. Entonces $\partial S = \partial T = \{1, 2\}$.



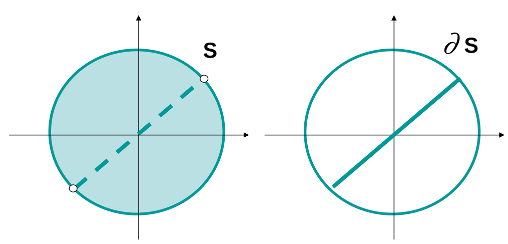
Ejemplo 2.29. Consideremos $S = [-1, 1] \cup \{3\} \subset \mathbb{R}$. Entonces $\partial S = \{-1, 1, 3\}$.



Ejemplo 2.30. Consideremos $S \subset \mathbb{R}^2, S = [1, 2] \times [1, 2]$. Entonces ∂S es



Ejemplo 2.31. $S = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$. Entonces, $\partial S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \bigcup \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x = y\}$.



La relación entre los conceptos anteriores se establece en la siguiente proposición.

Proposición 2.32. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, entonces

(1) $\overset{\circ}{S} = S \setminus \partial S$
(2) $\bar{S} = S \cup \partial S$
(3) $\partial S = \overline{S} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus S}$.
(4) S es cerrado $\Leftrightarrow S = \overline{S} \Leftrightarrow \partial S \subset S$
(5) S es abierto $\Leftrightarrow S = \overset{\circ}{S} \Leftrightarrow S \cap \partial S = \emptyset$.

Proposición 2.33.

(1) La intersección finita de conjuntos abiertos (cerrados) es un conjunto abierto (cerrado).
(2) La unión finita de conjuntos abiertos (cerrados) es un conjunto abierto (cerrado).

Definición 2.34. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe algún número real $R > 0$ y un punto $p \in \mathbb{R}^n$ tales que $S \subset B(p, R)$.

Ejemplo 2.35. La recta $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, z = 0\}$ no es un conjunto acotado.

Ejemplo 2.36. La bola $B(p, M)$ de centro p y radio M es un conjunto acotado.

Definición 2.37. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **compacto** S si es cerrado y acotado.

Ejemplo 2.38. $S = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es compacto (es acotado pero no cerrado).

Ejemplo 2.39. $B(p, R)$ no es compacto (es acotado pero no cerrado).

Ejemplo 2.40. $\overline{B(p, R)}$ es compacto.

Ejemplo 2.41. $(0, 1]$ no es compacto. $[0, 1]$ es compacto.

Ejemplo 2.42. $[0, 1] \times [0, 1]$ es compacto.

Definición 2.43. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para cualquier $x, y \in S$ y $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que $\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \in S$.

Ejemplo 2.44. Si A es una matriz de orden $n \times m$ y $b \in \mathbb{R}^m$ definimos

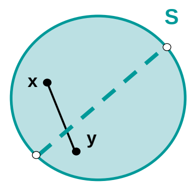
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$$

como el conjunto de soluciones del sistema lineal $Ax = b$. Supongamos que tenemos dos soluciones del sistema $x, y \in S$, entonces se verifica que $Ax = Ay = b$. Si ahora tomamos $0 \leq t \leq 1$ (en realidad el razonamiento que sigue es válido para cualquier $t \in \mathbb{R}$) entonces

$$A(tx + (1 - t)y) = tAx + (1 - t)Ay = tb + (1 - t)b = b$$

es decir $tx + (1 - t)y \in S$ por lo que el conjunto de soluciones de un sistema lineal es un conjunto convexo.

Ejemplo 2.45. El conjunto $S = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es convexo.


S
x
y