February 2, 2022

I.1 MATRICES Y DETERMINANTES

1. Conceptos generales

Definición 1.1. Una matriz de m filas y n columnas es un arreglo rectangular de números reales de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Diremos que A es una matriz de orden $m \times n$.

- La fila i–ésima de A está formada por los elementos $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$.
- La columna j–ésima de A está formada por los elementos $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$.
- El elemento (i, j) de A es a_{ij}, que pertenece a la fila i–ésima y columna j–ésima.
- La diagonal principal la forman los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{pp}$, donde p es el menor de n y m.

Notación 1.2. El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ se denota $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$. Las matrices A y B son iguales si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Álgebra de matrices

2.1. **Suma de matrices.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$. La suma de A y B es $A + B = C \in \mathcal{M}_{m\times n}$, donde $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ y $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

2.2. **Propiedades de la suma de matrices.** Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$

(1) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(2) $A + B = B + A$.

(3) La matriz nula $O = (0_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ cumple $A + O = O + A = A$.

(4) $A + (-A) = (-A) + A = O$, donde $-A = (-a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$.

2.3. **Producto de un escalar por una matriz.** Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. El producto escalar de λ y A es $\lambda A = C \in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $C = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$.

2.4. **Propiedades del producto de un escalar por una matriz.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \mu B$.

(2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

(3) $(\lambda\mu A) = \lambda(\mu A)$.

(4) $1A = A$.

Ejemplo 2.1. Sean $\lambda = 3$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 27 & 18 & 15 \end{pmatrix}$.

2.5. **Producto de matrices.** Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$, donde $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,p}}$. El producto de A y B se define como $AB = C \in \mathcal{M}_{m\times p}$, donde $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,p}}$ y

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad \text{para todo } i \in \{1,\dots,m\},\ j \in \{1,\dots,p\}.$$

Es decir, AB es la matriz cuyos elemento (i, j) es el producto escalar de la fila i de la matriz A con la columna j de la matriz B, consideradas estas líneas como vectores.

2.6. **Propiedades del producto de matrices.** Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(1) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

(2) $(AB)C = A(BC)$.

(3) Si $m = n = p = q$, entonces

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(B + C)A = BA + CA$$

(4) $AI_n = I_n A = A$, donde

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz identidad de orden n.

(5) $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)(AB)$.

Ejemplo 2.2. Calcular AB y BA, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Respuesta: $AB = \begin{pmatrix} 49 & 8 = 2\cdot 6 + 1\cdot(-4) + 5\cdot 0 \\ 13 & -18 \end{pmatrix}$. $BA = \begin{pmatrix} -16 & 1 & 17 \\ 26 & 7 & 27 \\ 16 & 8 & 40 \end{pmatrix}$.

2.7. **Matriz traspuesta.** Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. La matriz traspuesta de A, denotada $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}$, es la matriz $A = (a_{ji})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, es decir

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2.8. **Propiedades de la transposición de matrices.** Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) $(A^t)^t = A$.

(2) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

(3) $I_n^t = I_n$.

(4) Si $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces $(A+B)^t = A^t + B^t$.

(5) Si $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$, entonces $(AB)^t = B^t A^t$.

3. Tipos de Matrices

3.1. **Definición.** 1. Matriz fila: está formada por una fila

$$(a_{11}a_{12}\dots a_{1n}) \in \mathcal{M}_{1\times n}.$$

2. Matriz columna: está formada por una columna

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}.$$

3. Matriz triangular inferior (superior) es aquella matriz cuyos elementos situados encima (debajo) de la diagonal principal son nulos: $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$ ($i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$)

4. Matriz cuadrada de orden n: tiene el mismo número de filas y de columnas, $m = n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, son los elementos diagonales.
- A es una matriz diagonal si y sólo si todos los elementos no diagonales son nulos: $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
- Una matriz cuadrada es escalar si y sólo si es diagonal con todos los elementos iguales.

5. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es idempotente si y sólo si $A^2 = A$.

6. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es nilpotente si y sólo si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^p = O$.

7. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es simétrica si y sólo si $A^t = A$, es decir, si $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$, entonces

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{para todol } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

8. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es antisimétrica si y sólo si $A^t = -A$, es decir, si $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$, entonces

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \text{para todo } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

4. Determinantes

A toda matriz *cuadrada* A es posible asociarle un número real llamado *determinante* y denotado por $|A|$ o $\det(A)$. La definición es como sigue.

- Para una matriz de orden 1, $A = (a)$, $\det(A) = a$.
- Para una matriz de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Para una matriz de orden 3, se computan 3 determinantes de orden 2 como sigue

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Esta forma es conocida como la *expansión* del determinante por su primera columna, pero la expansión puede realizarse utilizando cualquier fila o columna, obteniendo el mismo resultado. Es importante respetar el signo $(-1)^{i+j}$ que aparece junto a a_{ij}.

Antes de continuar con la definición inductiva, veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.1. Expandir el determinante por la segunda columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= -2 \cdot (-3) + 3 \cdot (0) - (1) \cdot 1 = 5$$

4.1. **Definiciones.** 1. Un menor de la matriz A es el determinante de la submatriz obtenida de A al eliminar varias filas y el mismo núnero de columnas de A.

2. Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$, se llama menor complementario del elemento a_{ij} y se denota M_{ij}, al menor de orden $n-1$ obtenido al suprimir la fila i y la columna j.

3. Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$, se llama adjunto del elemento a_{ij}, y se denota A_{ij}, al menor complementario a_{ij} multiplicado por $(-1)^{i+j}$, es decir, $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

4. Se llama matriz adjunta de la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,nm\\ j=1,\dots,n}}$, y se denota por A^*, a la matriz cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de A, es decir

$$A^* = (A_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}.$$

4.2. **Desarrollo del determinante por filas o columnas.** Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} \in \mathcal{M}_{n\times n}$. El determinante de la matriz se define como sigue:

- Desarrollo por la fila i:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

- Desarrollo por la columna j:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Ejemplo 4.2. Cacular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Respuesta: Es más eficiente hacer el desarrollo por la fila que tenga un mayor número de ceros. En este caso son la cuarta fila y la tercera columna (dos ceros cada una). Desarrollando el determinante por la tercera columna, obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (-2)\times 11 + 3\times 15 = 23.$$

4.3. **Propiedades de los determinantes.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) $|A| = |A^t|$.

(2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

(3) $|AB| = |A||B|$.

(4) Si se intercambian dos líneas paralelas (filas o columnas), entonces el determinante cambia de signo.

(5) Si dos líneas paralelas (filas o columnas) son iguales, entonces el determinante es cero.

(6) Si se multiplican todos los elementos de una fila o columna por un mismo número, entonces el determinante queda multiplicado por ese número.

(7) Si a una línea (fila o columna) se le suma otra paralela multiplicada por un nḿero, entonces el valor del determinante no cambia.

(8) Si una línea (fila o columna) está formada por ceros, entonces el determinante es cero.

5. Matriz inversa

Considere la ecuación $5x = 10$; para resolverla, multiplicamos por el inverso de 5 (con respecto a la multiplicación) $5^{-1}5x = 5^{-1}10$, obteniendo $x = 2$. En el caso de una ecuación *matricial*

$$AX = B,$$

donde A y B son matrices dadas y X es la matriz incógnita, nos gustaría utilizar el mismo tipo de argumento, es decir, multiplicar por la "matriz inversa con respecto al producto de matrices" de A y resolver. Pero antes debemos aclarar qué se entience por matriz inversa y saber qué matrices tienen inversa.

Definición 5.1. Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ se llama regular o inversible (o simplemente, se dice que tiene inversa), si existe otra matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_n$. Si existe, a la matriz B se le llama inversa de A y se denota por A^{-1}.

5.1. **Propiedades.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

(1) A es inversible si sólo si $\det A \neq 0$.

(2) La inversa de una matriz, si existe, es única, y está dado por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^*)^t.$$

(3) I_n es inversible, con $I_n^{-1} = I_n$.

(4) Si A es inversible, entonces A^{-1} es inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

(5) Si A es inversible, entonces λA es inversible, con $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.

(6) Si A y B son inversibles, entonces AB es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(7) Si A es inversible, entonces A^t es inversible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Definición 5.2. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es una matriz ortogonal sy y sólo si es inversible y $A^{-1} = A^t$.

6. Rango y traza

El rango de una matriz es un número que se asigna a la matriz y que será muy útil en el estudio de los sistema de ecuaciones lineales.

Definición 6.1. El rango de la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, denotado rango A, es el orden del mayor menor no nulo de A.

Ejemplo 6.2. Hallar el rago de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Respuesta: Por supuesto, el rango no puede ser mayor que 3. Dado que $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, el rango de A es 2 al menos. Vamos a calcular los menores de orden 3. Basta que uno de ellos sea no nulo para que el rango sea 3. Por el contrario, si todos los menores de orden 3 son nulos, entonces el rango será 2.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.1. **Propiedades del rango de una matriz.**

(1) El rango de una matriz no cambia al realizar las siguientes operaciones:

- El intercambio de dos líneas paralelas (filas o columnas).
- La eliminación de una línea de ceros.
- La eliminación de una línea que es combinación lineal de otras líneas paralelas.
- La multiplicación de una línea por un número no nulo.
- La suma de una línea con otra paralela multiplicada por un número.

(2) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces rango $A \leq \min\{m, n\}$.

(3) Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, entonces A es inversible si y sólo si rango $A = n$.

(4) rango $I_n = n$ y rango $O = 0$.

(5) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces rango $A =$ rango A^t.

(6) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$, entonces

$$\text{rango } AB \leq \min\{\text{rango } A, \text{rango } B\}.$$

Definición 6.3. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, donde $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. La traza de A, denotada por traza A, es la suma de los elementos diagonales de A

$$\text{traza } A = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

6.2. **Propiedades de la traza.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) traza $A^t =$ traza A.

(2) traza $\lambda A = \lambda$ traza A.

(3) traza $A + B =$ traza $A +$ traza B.

(4) traza $AB =$ traza BA.

7. Operaciones elementales con matrices

Definición 7.1. Se consideran operaciones elementales sobre una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, a las operaciones efectuadas en las filas o columnas de A con las siguientes pautas:

- El intercambio de líneas paralelas de A (filas o columnas).
- La multiplicación de una línea de A por una constante distinta de cero.
- La suma a una línea de A de otra línea paralela multiplicada por una constante.

Definición 7.2. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ son equivalentes si y sólo si cualquiera de ellas puede obtenerse partiendo de la otra matriz mediante un número finito de operaciones elementales.

Estamos interesados en el cálculo de matrices inversas mediante operaciones elementales.

Teorema 7.3. *Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es inversible, entonces A es equivalente a la matriz identidad I_n.*

Supongamos que hemos encontrado las operaciones elementales que transforman A en I_n. Al aplicar este conjunto de operaciones en el mismo orden sobre la matriz I_n, obtendremos A^{-1} (obtendríamos la propia matriz A si las aplicáramos en el orden inverso). Desde un punto de vista práctico, este cálculo puede organizarse de la siguiente forma

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Mediante operaciones elementales sobre las filas que transforman A en I_n, al mismo tiempo I_n se transforma en A^{-1} (se utiliza el método de Gauss para realizar las operaciones).

Ejemplo 7.4. Encontrar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Respuesta: Considere el esquema matricial $(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. En lo que sigue, f_i denota la fila i, y $\mu f_i \pm \lambda f_j$ significa que a la fila i multiplicada por μ se le suma (o resta) la fila j multiplicada por λ.

$$(f_3 - f_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad (f_3 + f_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(2f_2 - f_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad (2f_1 - f_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Luego, la matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Definición 7.5. La forma escalonada superior de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es cualquiera de las matrices triangulares superiores $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ equivalentes a A y tal que, si $b_{ii} = 0$ para algún $i \in \{1,\dots,m-1\}$, entonces $b_{i+1,i+1} = 0$.

Teorema 7.6. *El rango de la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es el número de filas no nulas de cualquiera de las formas escalonadas superiores de A.*

Ejemplo 7.7. Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Respuesta: Calcularemos el rango de A hallando su forma escalonada.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{2f_1+f_3}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{(1/2)f_2+f_3}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

Luego el rango es 3 (pues hay tres filas no nulas en la forma escalonada de A).