UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA II
PROBLEMAS (SOLUCIONES)

HOJA 5: Optimización

5-1. Hallar los puntos críticos de las siguiente funciones y clasificarlos:
(a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$.
(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$.
(c) $f(x,y) = e^{x \cos y}$.
(d) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$.
(e) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$.
(f) $f(x,y) = xe^{-x}(y^2 - 4y)$.

5-2. Hallar para las siguientes funciones los puntos críticos. Aplicar el criterio de las derivadas segundas y mostrar aquellos puntos en los que el criterio no proporciona información.
(a) $f(x,y) = x^3 + y^3$.
(b) $f(x,y) = \left((x-1)^2 + (y+2)^2\right)^{1/2}$.
(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x + 12y + 7$.
(d) $f(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3}$.

5-3. Sea $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$.
(a) Hallar los puntos críticos y clasificarlos.
(b) ¿Posee f extremos absolutos? (sug: considerar la recta $y = x$)

5-4. Hallar los valores de las constantes a, b y c de forma que la función $f(x,y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$ tenga un mínimo local en el punto $(2/3, 1/3)$ con valor en ese punto de $-1/9$.

5-5. Una función de ingreso es $R(x,y) = x(100-6x) + y(192-4y)$ en donde x e y denotan el número de artículos vendidos de dos productos. Dado que la función de coste correspondiente es $C(x,y) = 2x^2+2y^2+4xy-8x+20$ determinar el beneficio máximo.

5-6. Una lechería produce leche entera y descremada en cantidades x e y respectivamente. Supongamos que el precio de la leche entera es $p(x) = 100 - x$ y el de la descremada $q(y) = 100 - y$. Supongamos que $C(x,y) = x^2 + xy + y^2$ es la función de costes. ¿Cuáles deberían de ser x e y para maximizar los beneficios?

5-7. Un monopolista produce un bien que es comprado por dos tipos de consumidores. Los consumidores del tipo 1 están dispuestos a pagar $50 - 5q_1$ euros para comprar q_1 unidades del bien. Los consumidores del tipo 2 estarían dispuestos a pagar $100 - 10q_2$ euros para comprar q_2 unidades del bien. La función de costes del monopolista es $c(q) = 90 + 20q$ euros. ¿Cuánto debe producir el monopolista en cada mercado?

5-8. Hallar los extremos de las siguientes funciones sujetas a restricciones.
(a) $f(x,,y,z) = x + y + z$ en $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
(b) $f(x,,y) = \cos(x^2 - y^2)$ en $x^2 + y^2 = 1$.

5-9. Minimizar $x^4 + y^4 + z^4$ sobre el plano $x + y + z = 1$.

5-10. Una compañía fabrica productos P_1 y P_2. Los ingresos totales para x_1 unidades de P_1 y x_2 unidades de P_2 son $R = -5x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_1x_2 + 42x_1 + 102x_2$. Hallar x_1 y x_2 de forma que los ingresos sean máximos.

5-11. La precios de venta de dos productos producidos por un monopolista son

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 256 - 3q_1 - q_2 \\
p_2 &= 222 + q_1 - 5q_2
\end{aligned}
$$

donde p_1, p_2 son los precios y q_1, q_2 son las cantidades producidas. La función de costes es $C(q_1,q_2) = q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2$. Hallar las cantidades de cada producto que maximizan los beneficios.

5-12. La función de producción de un fabricante es $4x + xy + 2yz$. La cantidad total disponible para trabajo y capital es de 2000\$. Las unidades de trabajo y capital cuestan 20\$ y 4\$ respectivamente.

(a) Razona que $20x + 4y = 2000$.

(b) Halla el nivel máximo de producción del fabricante con la restricción del apartado anterior.

5-13. A un editor se le han asignado 60.000 para gastar en producción y publicidad de un nuevo libro. Se calcula que si se gastan x miles de dólares e y miles de dólares en publicidad se venderán aproximadamente $f(x,y) = 20x^{3/2}y$ ejemplares del libro. ¿Cuánto dinero debe asignar el editor a producción y cuánto a publicidad para maximizar las ventas?

5-14. Un minorista vende dos productos que se hacen competencia, y cuyos precios respectivos son P_1 y P_2. Hallar P_1 y P_2 de forma que los ingresos sean máximos siendo $R = 500P_1 + 800P_2 + 1,5P_1P_2 - 1,5P_1^2 - P_2^2$.

5-15. La función de utilidad de un consumidor es $u(x,y) = \frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}\ln y$ siendo x e y el consumo realizado de dos bienes, cuyos precios son, respectivamente, p_1 y p_2. Suponiendo que el agente dispone de una renta M, calcular las cantidades que demandará de cada bien, dependiendo de la renta M y de los precios.

5-16. Hallar y clasificar los puntos extremos de la función dada en el conjunto correspondiente.

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ en el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 1, 2x - 3y - z = 4\}$.

(b) $f(x,y,z) = (y + z - 3)^2$ en el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y + z = 2, x + y^2 + 2z = 2\}$.

(c) $f(x,y,z) = x + y + z$ en el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x - y - z = 1\}$.

(d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ en el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, x + y + z = 4\}$.

5-17. Encontrar el máximo de la función $f(x,y,z) = xyz$ en el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \leq 1, \quad x,y,z \geq 0\}$.

5-18. Encontrar el mínimo de la función $f(x,y) = 2y - x^2$ en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad x,y \geq 0\}$.

5-19. Resolver el problema

$$\begin{cases} \text{min} & x^2 + y^2 - 20x \\ \text{s.a.} & 25x^2 + 4y^2 \leq 100 \end{cases}$$

5-20. Resolver el problema

$$\begin{cases} \text{max} & x + y - 2z \\ \text{s.a.} & z \geq x^2 + y^2 \\ & x,y,z \geq 0 \end{cases}$$