HOJA 2: Límites y continuidad de funciones en $\mathbb{R}^n$.

2-1. Dibuja cada uno de los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ siguientes. Dibuja su frontera y su interior. Estudia si son abiertos, cerrados, acotados o convexos.
(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x, y) - (1, 3)\| < 2\}$.
(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^3\}$.
(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| \leq 2\}$.
(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$.
(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2, y < 1/x, x > 0\}$.
(f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq y + 1\}$.
(g) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, x \leq 1\}$.

2-2. Halle el dominio de las siguientes funciones:
(a) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^{1/2}$.
(b) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$.
(c) $f(x, y) = e^x - e^y$.
(d) $f(x, y) = e^{xy}$.
(e) $f(x, y) = \ln(x + y)$.
(f) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.
(g) $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x^2+1}{yz}}$.
(h) $f(x, y) = \sqrt{x - 2y + 1}$.

2-3. Halla la imagen de las siguientes funciones:
(a) $f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{1/2}$.
(b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.
(c) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
(d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.
(e) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$.
(f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2-4. Dibuja las curvas de nivel de las siguientes funciones para los valores de c propuestos:
(a) $f(x, y) = xy$, $c = 1, -1, 3$.
(b) $f(x, y) = e^{xy}$, $c = 1, -1, 3$.
(c) $f(x, y) = \ln(xy)$, $c = 1, -1, 3$.
(d) $f(x, y) = (x + y)/(x - y)$, $c = 0, 2, -2$.
(e) $f(x, y) = x^2 - y$, $c = 0, 1, -1$.
(f) $f(x, y) = ye^x$, $c = 0, 1, -1$.

2-5. Sea $f(x, y) = Cx^\alpha y^{1-\alpha}$ (con $0 < \alpha < 1$ y $C > 0$) la función de Cobb-Douglas donde x e y representan las unidades de trabajo y capital respectivamente y f las unidades producidas.
(a) Halla, representa e interpreta distintas curvas de nivel de f.
(b) Demuestra que si se duplican las unidades de trabajo y las de capital, entonces se duplica el nivel de producción.

2-6. Estudia la existencia y el valor de los siguientes límites.
(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$.
(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.
(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}$.
(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}$.

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.
(f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.
(g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$.

2-7. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^3+y^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+1}{y}x^2 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^6+y^3} & \text{si } y \neq -x^2 \\ 0 & \text{si } y = -x^2 \end{cases}$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

2-8. Sea el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ y la función $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida mediante

$$f(x,y) = \left(\frac{x+1}{y+2}, \frac{y+1}{x+2}\right)$$

Comprueba que se verifican las hipótesis del Teorema de Brouwer ¿Es posible determinar el (o los) punto(s) fijo(s)?

2-9. Considera la función $f(x,y) = 3y - x^2$ definida en el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x < 1/2, y \geq 0\}$. Dibuja el conjunto D y las curvas de nivel de f. Alcanza f un máximo y un mínimo sobre D?

2-10. Sean los conjuntos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$ y sea la función

$$f(x,y) = \frac{(x+1)\left(y+\frac{1}{5}\right)}{y+\dfrac{1}{2}}$$

¿Qué se puede afirmar de los extremos absolutos de f sobre A y B?

2-11. Sea el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq 2\}$.
(a) Dibujar el conjunto A, su frontera y su interior, y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.
(b) Demuestra que la función $f(x,y) = y^2 + (x-1)^2$ tiene un máximo y un mínimo en A.
(c) Utilizando las curvas de nivel de $f(x,y)$, hallar el máximo y el mínimo de f en A.

2-12. Sea el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0; \ln(xy) \geq 0\}$.
(a) Dibujar el conjunto A, su frontera y su interior, y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.
(b) Considerar la función $f(x,y) = x + 2y$. ¿Se puede utilizar el teorema de Weierstrass para determinar si esta función alcanza un máximo y/o un mínimo en el conjunto A? Dibujar las curvas de nivel de f, indicando la dirección de crecimiento de la función.
(c) Utilizando las curvas de nivel de $f(x,y)$, determinar gráficamente (sin utilizar, por tanto, las condiciones de primer orden) los extremos absolutos de la función f en el conjunto A.