HOJA 5: Optimización

5-1. *Hallar los puntos críticos de las siguiente funciones y clasificarlos:*
(a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$.
(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$.
(c) $f(x,y) = e^{x\cos y}$.
(d) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$.
(e) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$.
(f) $f(x,y) = xe^{-x}(y^2 - 4y)$.

Solución:
(a) El gradiente de $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$ es

$$\nabla f(x,y) = (2x + y, -2y + x)$$

y los puntos críticos son solución el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ -2y + x &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $(0,0)$. El Hessiano es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

que es indefinida. Por tanto $(0,0)$ es un punto de silla.
(b) El gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$ es $\nabla f(x,y) = (2x + 2y, 2y + 2x)$. Los puntos críticos son los puntos de la forma $y = -x$. El Hessiano es

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

que es semidefinido positivo. Las condiciones de segundo orden no permiten clasificar estos puntos críticos. Pero, como $f(x,y) = (x+y)^2 \geq 0$ y $f(x,-x) = 0$ vemos que los puntos de la forma $(x,-x)$ son mínimos globales de f .
(c) El gradiente de $f(x,y) = e^{x\cos y}$ es

$$\nabla f(x,y) = (e^{x\cos y}\cos y, -xe^{x\cos y}\operatorname{sen} y)$$

Los puntos críticos son solución del sistema

$$\left.\begin{aligned} (\cos y)\, e^{x\cos y} &= 0 \\ -x\,(\operatorname{sen} y)\, e^{x\cos y} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \equiv \qquad \left.\begin{aligned} \cos y &= 0 \\ -x \operatorname{sen} y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

La primera ecuación implica que

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Para esos valores de y, $\operatorname{sen} y \neq 0$, y la segunda ecuación implica que $x = 0$. Las soluciones son

$$(0, \frac{\pi}{2} + k\pi) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

El Hessiano es

$$e^{x\cos y}\begin{pmatrix} \cos^2 y & -\operatorname{sen} y - x\operatorname{sen} y\cos y \\ -\operatorname{sen} y - x\operatorname{sen} y\cos y & -x\cos y + x^2\operatorname{sen}^2 y \end{pmatrix}$$

Para $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, obtenemos

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{sen} y \\ -\operatorname{sen} y & 0 \end{pmatrix}\right|_{y=\frac{\pi}{2}+k\pi}$$

cuyo determinante es $-\sin^2(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -1$ por lo que los puntos críticos son puntos de silla.

(d) El gradiente de $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$ es

$$\nabla f(x,y) = 2e^{1+x^2-y^2}(x,-y)$$

y el único punto crítico es $(0,0)$. El Hessiano es

$$\mathrm{H}f(0,0) = e^{1+x^2-y^2}\left.\begin{pmatrix} 2+4x^2 & -4yx \\ -4yx & -2+4y^2 \end{pmatrix}\right|_{x=0,y=0} = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & -2e \end{pmatrix}$$

que es indefinida, por lo que $(0,0)$ es un punto de silla.

(e) El gradiente de $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$ es

$$\nabla f(x,y) = (\operatorname{sen} y, x\cos y)$$

y los puntos críticos son las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} y &= 0 \\ x\cos y &= 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación obtenemos

$$y = k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

por lo que $\cos y = \pm 1$ y la segunda ecuación implica que $x = 0$. Las soluciones son

$$(0, k\pi) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

El Hessiano es

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x\operatorname{sen} y \end{pmatrix}\right|_{x=0,y=k\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(k\pi) \\ \cos(k\pi) & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $-\cos^2(k\pi) = 1$ por lo que es indefinida y los puntos críticos son puntos de silla.

(f) El gradiente de $f(x,y) = xe^{-x}(y^2-4y)$ es

$$\nabla f(x,y) = e^{-x}((1-x)(y^2-4y), x(2y-4))$$

Los puntos críticos son las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} (1-x)(y^2-4y) &= 0 \\ x(2y-4) &= 0 \end{aligned}$$

es decir $(0,0)$, $(0,4)$ y $(1,2)$. El Hessiano es

$$\mathrm{H}f(x,y) = e^{-x}\begin{pmatrix} (x-2)(y^2-4y) & (1-x)(2y-4) \\ (1-x)(2y-4) & 2x \end{pmatrix}$$

Calculado en los puntos críticos obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{H}f(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \text{(indefinida)} \\ \mathrm{H}f(0,4) &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \text{(indefinida)} \\ \mathrm{H}f(1,2) &= \begin{pmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix} \text{(definida positiva)} \end{aligned}$$

por lo que $(0,0)$, $(0,4)$ son puntos de silla y $(1,2)$ es un mínimo local.

5-2. *Hallar para las siguientes funciones los puntos críticos. Aplicar el criterio de las derivadas segundas y mostrar aquellos puntos en los que el criterio no proporciona información.*

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3$.
(b) $f(x,y) = \left((x-1)^2 + (y+2)^2\right)^{1/2}$.
(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x + 12y + 7$.
(d) $f(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3}$.

Solución:

(a) El gradiente de $f(x,y) = x^3 + y^3$ es $\nabla f(x,y) = 3(x^2, y^2)$. El único punto crítico es $(0,0)$. El Hessiano es

$$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=0,y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El criterio de la segunda derivada no proporciona información. Sin embargo, observando que $f(0,0) = 0$ y que

$$f(x,0) = x^3 \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0, \\ < 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

vemos que $(0,0)$ es un punto de silla.

(b) El gradiente de $f(x,y) = ((x-1)^2 + (y+2)^2)^{1/2}$ es

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}}(x-1, y+2)$$

que no se anula en su dominio. Observemos que f es diferenciable, excepto en el punto $(1,-2)$. Por tanto, el único punto crítico es $(1,-2)$ y como aquí no es diferenciable no se puede aplicar el criterio de la derivada segunda.
Observando que $f(1,-2) = 0 < ((x-1)^2 + (y+2)^2)^{1/2}$ si $(x,y) \neq (1,-2)$, vemos que $(1,-2)$ es un mínimo global.

(c) El gradiente de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x + 12y + 7$ es

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 6x + 3, 3y^2 + 12y + 12)$$

Los puntos críticos satisfacen el sistema

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$y^2 + 4y + 4 = 0$$

cuya única solución es $x = 1$, $y = -2$. El único punto crítico es $(1,-2)$. El Hessiano es

$$\mathrm{H}f(1,-2) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 6y+12 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=1,y=-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda derivada no proporciona información. Observando que f es un polinomio de grado 3 y que $\nabla f(1,-2) = (0,0$ y $\mathrm{H}f(1,-2) = 0$ vemos que $f(x,y) = (y+2)^3 + (x-1)^3$. Y tenemos que

$$f(x+1,-2) = x^3 \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0, \\ < 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

por lo que $(1,-2)$ es un punto de silla.

(d) La función $f(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3}$ no es diferenciable en $(0,0)$. Para $(x,y) \neq (0,0)$ tenemos que

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}\right)$$

que no se anula en su dominio. El único punto crítico es $(0,0)$. No es posible aplicar el criterio de la derivada segunda. Pero, observando que $f(0,0) = 0$ y que si $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3} > 0$$

vemos que $(0,0)$ es un mínimo global.

5-3. *Sea* $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$.
(a) *Hallar los puntos críticos y clasificarlos.*
(b) *¿Posee* f *extremos absolutos? (sug: considerar la recta* $y = x$*)*

Solución:

(a) La función $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. EL gradiente es

$$\nabla f(x,y) = (-6x - 9y + 18 + 2xy + y^2, -9x - 6y + 18 + x^2 + 2xy)$$

y los puntos críticos satisfacen el sistema

$$-6x - 9y + 18 + 2xy + y^2 = 0$$
$$-9x - 6y + 18 + x^2 + 2xy = 0$$

cuyas soluciones son $(3,0)$, $(3,3)$, $(0,3)$ y $(2,2)$. El Hessiano es

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} -6+2y & 2x+2y-9 \\ 2x+2y-9 & -6+2x \end{pmatrix}$$

Evaluado en en los puntos críticos obtenemos

$$\mathrm{H}f(3,0) = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{que es indefinida}$$
$$\mathrm{H}f(3,3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{que es indefinida}$$
$$\mathrm{H}f(0,3) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{que es indefinida}$$
$$\mathrm{H}f(2,2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{que es definida negativa}$$

De donde, $(2,2)$ es un máximo y $(3,0)$, $(0,3)$ y $(3,3)$ son puntos de silla.

(b) Utilizando la sugerencia de $y = x$, obtenemos $f(x,x) = (3-x)^2(2x-3)$. Observamos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x,x) = -\infty$$

por lo que f no tiene máximo ni mínimo globales en $\mathbb{R}^2$.

5-4. *Hallar los valores de las constantes a, b y c de forma que la función $f(x,y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$ tenga un mínimo local en el punto $(2/3, 1/3)$ con valor en ese punto de $-1/9$.*

Solución: El gradiente de $f(x,y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$ es

$$\nabla f(x,y) = (2axy + by + 2y^2, ax^2 + bx + 4xy)$$

Los puntos críticos son solución del sistema

$$\begin{aligned} 2axy + by + 2y^2 = 0 \\ ax^2 + bx + 4xy = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, los puntos críticos son

$$(0,0), (-\frac{b}{a}, 0), (0, -\frac{b}{2}), (-\frac{b}{3a}, -\frac{b}{6})$$

Para que $(2/3, 1/3)$ sea un punto crítico debe verificarse que

$$(2/3, 1/3) = (-\frac{b}{3a}, -\frac{b}{6})$$

es decir, $a = 1$, $b = -2$.

Ahora elegimos c de tal forma que el valor la función en el punto $(2/3, 1/3)$ sea $-1/9$.

$$f(2/3,1/3) = \left(x^2y - 2xy + 2xy^2 + c\right)\Big|_{x=2/3, y=1/3} = -\frac{4}{27} + c = -1/9$$

de donde $c = \frac{1}{27}$.

Comprobamos que $(2/3, 1/3)$ es un mínimo. El hessiano es $\mathrm{H}f(2/3,1/3) = \begin{pmatrix} 2y & 2x-2+4y \\ 2x-2+4y & 4x \end{pmatrix}\Big|_{x=2/3, y=1/3} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ que es definido positivo y $(2/3, 1/3)$ es un mínimo.

5-5. *Una función de ingreso es $R(x,y) = x(100-6x) + y(192-4y)$ en donde x e y denotan el número de artículos vendidos de dos productos. Dado que la función de coste correspondiente es $C(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20$ determinar el beneficio máximo.*

Solución: El beneficio es

$$B(x,y) = R(x,y) - C(x,y) = x(100-6x) + y(192-4y) - (2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20)$$

cuyo gradiente es

$$\nabla B(x,y) = (108 - 16x - 4y, 192 - 4x - 12y)$$

Obtenemos el punto crítico $(3, 15)$. El Hessiano

$$\mathrm{H}B(x,y) = \begin{pmatrix} -16 & -4 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}$$

es definido negativo en todo $\mathbb{R}^2$. La función es cóncava en todo $\mathbb{R}^2$ y, por tanto, $(3,15)$ es un máximo global.

5-6. *Una lechería produce leche entera y descremada en cantidades x e y respectivamente. Supongamos que el precio de la leche entera es $p(x) = 100-x$ y el de la descremada $q(y) = 100-y$. Supongamos que $C(x,y) = x^2+xy+y^2$ es la función de costes. ¿Cuáles deberían de ser x e y para maximizar los beneficios?*

Solución: El beneficio es

$$B(x,y) = x(100-x) + y(100-y) - (x^2+xy+y^2)$$

El único punto crítico es $(20,20)$. Como el Hessiano es $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ que es definido negativo, el punto crítico es máximo. Además, como la función es cóncava, se trata de un máximo global.

5-7. *Un monopolista produce un bien que es comprado por dos tipos de consumidores. Los consumidores del tipo 1 están dispuestos a pagar $50-5q_1$ euros para comprar q_1 unidades del bien. Los consumidores del tipo 2 estarían dispuestos a pagar $100-10q_2$ euros para comprar q_2 unidades del bien. La función de costes del monopolista es $c(q) = 90+20q$ euros. ¿Cuánto debe producir el monopolista en cada mercado?*

Solución: Si el monopolista vende q_1 unidades en el primer mercado y q_2 unidades en el segundo mercado, su beneficio es

$$q_1(50-5q_1) + q_2(100-10q_2) - 90 - 20(q_1+q_2) = 30q_1 - 5q_1^2 + 80q_2 - 10q_2^2 - 90$$

Las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} 30 &= 10q_1 \\ 80 &= 20q_2 \end{aligned}$$

por lo que la solución es

$$q_1 = 3, \quad q_2 = 4$$

5-8. *Hallar los extremos de las siguientes funciones sujetas a restricciones.*
(a) $f(x,y,z) = x+y+z$ *en* $x^2+y^2+z^2 = 2$.
(b) $f(x,y) = \cos(x^2-y^2)$ *en* $x^2+y^2 = 1$.

Solución:
(a) El lagrangiano es

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

Obtenemos las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} D_x(L(x,y,z)) =& 1 - 2\lambda x = 0 \\ D_y(L(x,y,z)) =& 1 - 2\lambda y = 0 \\ D_z(L(x,y,z)) =& 1 - 2\lambda z = 0 \\ & x^2+y^2+z^2 = 2 \end{aligned}$$

Comparando las tres primeras ecuaciones vemos que $x = y = z$ y por tanto $3x^2 = 2$, es decir

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

(b) El lagrangiano es

$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

Las ecuaciones de Lagrange pueden escribirse como

$$\begin{aligned} & x(\operatorname{sen}(-x^2+y^2) - \lambda) = 0 \\ & y(\operatorname{sen}(-x^2+y^2) + \lambda) = 0 \\ & x^2+y^2 = 1 \end{aligned}$$

Vemos que $(0,\pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$ son soluciones. Si ahora, suponemos que $x \neq 0$, $y \neq 0$, de las dos primeras ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda =& \operatorname{sen}\left(-x^2+y^2\right) \\ \lambda =& -\operatorname{sen}\left(-x^2+y^2\right) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\operatorname{sen}\left(-x^2+y^2\right) = -\operatorname{sen}\left(-x^2+y^2\right)$$

de donde
$$x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$$
y, por tanto, $x = y$ ó $x = -y$. Las soluciones son
$$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$
Sustituyendo en la función objetivo vemos que $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$ son mínimos y $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, son máximos.

5-9. *Minimizar $x^4 + y^4 + z^4$ sobre el plano $x + y + z = 1$.*

Solución: El lagrangiano es
$$L(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$
Las ecuaciones de Lagrange son
$$\begin{aligned} D_x(L(x, y, z)) =& 4x^3 - \lambda = 0 \\ D_y(L(x, y, z)) =& 4y^3 - \lambda = 0 \\ D_z(L(x, y, z)) =& 4z^3 - \lambda = 0 \\ & x + y + x - z = 1 \end{aligned}$$
y obtenemos que $x = y = z$. Sustituyendo en la última ecuación tenemos que $3x = 1$, es decir
$$x = y = z = \frac{1}{3}$$
Observemos que el Hessiano es $\mathrm{H}L = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=1/3, y=1/3, z=1/3} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ que es definido positivo y por tanto, es un mínimo local.

5-10. *Una compañía fabrica productos P_1 y P_2. Los ingresos totales para x_1 unidades de P_1 y x_2 unidades de P_2 son $R = -5x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_1x_2 + 42x_1 + 102x_2$. Hallar x_1 y x_2 de forma que los ingresos sean máximos.*

5-11. *La precios de venta de dos productos producidos por un monopolista son*
$$\begin{aligned} p_1 =& 256 - 3q_1 - q_2 \\ p_2 =& 222 + q_1 - 5q_2 \end{aligned}$$
donde p_1, p_2 son los precios y q_1, q_2 son las cantidades producidas. La función de costes es $C(q_1, q_2) = q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2$. Hallar las cantidades de cada producto que maximizan los beneficios.

5-12. *La función de producción de un fabricante es $4x + xy + 2y$. La cantidad total disponible para trabajo y capital es de 2000\$. Las unidades de trabajo y capital cuestan 20\$ y 4\$ respectivamente.*
(a) *Razona que $20x + 4y = 2000$.*
(b) *Halla el nivel máximo de producción del fabricante con la restricción del apartado anterior.*

5-13. *A un editor se le han asignado 60.000 para gastar en producción y publicidad de un nuevo libro. Se calcula que si se gastan x miles de dólares en producción e y miles de dólares en publicidad se venderán aproximadamente $f(x, y) = 20x^{3/2}y$ ejemplares del libro. ¿Cuánto dinero debe asignar el editor a producción y cuánto a publicidad para maximizar las ventas?*

Solución: El problema planteado al editor es
$$\left.\begin{array}{cc} \text{max.} & 20x^{3/2}y \\ \text{s.a.} & x + y = 60000 \\ x, y \geq 0 & \end{array}\right\}$$
El conjunto factible es compacto y la función objetivo es continua. Por lo tanto, existe una solución. Los puntos esquina $(0, 60000)$ y $(60000, 0)$ producen un valor de 0 en la función objetivo. Estos puntos corresponden a un mínimo y podemos suponer que la solución es interior,
$$\left.\begin{array}{cc} \text{max.} & 20x^{3/2}y \\ \text{s.a.} & x + y = 60000 \end{array}\right\}$$

El lagrangiano es

$$L(x,y) = 20x^{3/2}y + \lambda(60000 - x - y)$$

Obtenemos las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} 30x^{1/2}y - \lambda &= 0 \\ 20x^{3/2} - \lambda &= 0 \\ x + y &= 60000 \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones se obtiene

$$30x^{1/2}y = 20x^{3/2}$$

Si suponemos que $x \neq 0$, obtenemos que $y = 2x/3$, por lo que la solución es $x = 36000$, $y = 24000$. Este punto satisface las restricciones.

La matriz Hessiana de L es

$$\mathrm{H}\,L(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{15x}{\sqrt{x}} & 30\sqrt{x} \\ 30\sqrt{x} & 0 \end{pmatrix} = 15\begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x}} & 2\sqrt{x} \\ 2\sqrt{x} & 0 \end{pmatrix}$$

En el punto $(36000, 24000)$ obtenemos

$$\mathrm{H}\,L(36000,24000) = 15\begin{pmatrix} 40 & 120 \\ 120 & 0 \end{pmatrix} = 600\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La restricción del problema es $g(x,y) = x + y - 60000$ y $\nabla g(36000, 24000) = (1,1)$. Entonces

$$\begin{aligned} T_{(36000,24000)}M &= \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : (v_1,v_2)\cdot(1,1) = 0\} \\ &= \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : v_1 + v_2 = 0\} \\ &= \{(t,-t) : t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

La forma cuadrática

$$(t,-t)\cdot \mathrm{H}\,L(36000,24000)\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = 600\left((t,-t)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}\right) = -3000t^2$$

es definida negativa. Por lo tanto, el punto $(36000, 24000)$ es un máximo local. Y por el Teorema de Weierstrass también es un máximo global.

5-14. *Un minorista vende dos productos que se hacen competencia, y cuyos precios respectivos son P_1 y P_2. Hallar P_1 y P_2 de forma que los ingresos sean máximos siendo $R = 500P_1 + 800P_2 + 1,5P_1P_2 - 1,5P_1^2 - P_2^2$.*

Solución: El minorista maximiza la función

$$R(P_1,P_2) = 500P_1 + 800P_2 + \frac{3}{2}P_1P_2 - \frac{3}{2}P_1^2 - P_2^2$$

El gradiente es

$$\nabla R(P_1,P_2) = (500 + \frac{3}{2}P_2 - 3P_1, 800 + \frac{3}{2}P_1 - 2P_2)$$

El único punto crítico es

$$P_1 = \frac{2800}{3}, \qquad P_2 = 600$$

como

$$\mathrm{H}R(P_1,P_2) = \begin{pmatrix} -3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

verifica $D_1 < 0$, $D_2 > 0$ y, por tanto es definido negativo, la función es cóncava en todo $\mathbb{R}^2_{++}$ y el punto crítico es un máximo global.

5-15. *La función de utilidad de un consumidor es $u(x,y) = \frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}\ln y$ siendo x e y el consumo realizado de dos bienes, cuyos precios son, respectivamente, p_1 y p_2. Suponiendo que el agente dispone de una renta M, calcular las cantidades que demandará de cada bien, dependiendo de la renta M y de los precios.*

Solución: El consumidor demandará las cantidades de bienes que resuelven el problema siguiente,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{max.} & \frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}\ln y \\ \text{s.a.} & p_1x + p_2y = M \end{array}\right\}$$

El lagrangiano es

$$L(x,y) = \frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}\ln y + \lambda(M - p_1x - p_2y)$$

Obtenemos las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x} - \lambda p_1 &= 0 \\ \frac{2}{3y} - \lambda p_2 &= 0 \\ p_1 x + p_2 y &= M \end{aligned}$$

Reescribimos las dos primeras ecuaciones como

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \lambda p_1 x \\ \frac{2}{3} &= \lambda p_2 y \end{aligned}$$

Sumando y teniendo en cuenta que $p_1 x + p_2 y = M$ obtenemos que $1 = \lambda M$. Sustituyendo ahora,

$$\lambda = \frac{1}{M}$$

en las dos primeras ecuaciones y despejando vemos que

$$x = \frac{M}{3p_1}, \quad y = \frac{2M}{3p_2}$$

5-16. *Hallar y clasificar los puntos extremos de la función dada en el conjunto correspondiente.*
 (a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ *en el conjunto* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 1, 2x - 3y - z = 4\}$.
 (b) $f(x,y,z) = (y + z - 3)^2$ *en el conjunto* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y + z = 2, x + y^2 + 2z = 2\}$.
 (c) $f(x,y,z) = x + y + z$ *en el conjunto* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x - y - z = 1\}$.
 (d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ *en el conjunto* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, x + y + z = 4\}$.

Solución:

(a) El Lagrangiano es

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) - \mu h(x,y,z)$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} D_x(L(x,y,z)) &= 2x - \lambda - 2\mu = 0 \\ D_y(L(x,y,z)) &= 2y - 2\lambda + 3\mu = 0 \\ D_z(L(x,y,z)) &= 2z - \lambda + \mu = 0 \\ & x + 2y + z = 1 \\ & 2x - 3y - z = 4 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$x = \frac{92}{59}, y = -\frac{19}{59}, z = \frac{5}{59}, \mu = \frac{58}{59}, \lambda = \frac{68}{59}$$

(b) El Lagrangiano es

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) - \mu h(x,y,z)$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{gathered} -2\lambda x - \mu = 0 \\ 2y + 2z - 6 - \lambda - 2\mu y = 0 \\ 2y + 2z - 6 - \lambda - 2\mu = 0 \\ x^2 + y + z = 2 \\ x + y^2 + 2z = 2 \end{gathered}$$

De la ecuaciones segunda y tercera obtenemos

$$\mu = \mu y$$

hay dos posibilidades $\mu = 0$ 0 $y = 1$.
Si $\mu = 0$, la primera ecuación implica $\lambda x = 0$. Uno de los factores debe ser 0. Si $\lambda = 0$, obtenemos las ecuaciones,

$$\begin{gathered} 2y + 2z - 6 = 0 \\ x^2 + y + z = 2 \\ x + y^2 + 2z = 2 \end{gathered}$$

Pero la primera ecuación implica $y+z=3$ y sustituyendo en la segunda quedaría $x^2=-1$, que es imposible. Si $x=0$, las dos últimas ecuaciones se reducen a

$$\begin{gathered} y+z=2 \\ y^2+2z=2 \end{gathered}$$

pero sustituyendo $z=2-y$ en la segunda obtenemos la ecuación $y^2-2y+2=0$ que no tiene soluciones reales.
Concluimos que $\mu \neq 0$, por lo que $y=1$. Ahora podemos utilizar las dos últimas ecuaciones para calcular x y z. Las soluciones de las ecuaciones de Lagrange son

$$(\frac{-1}{2}, 1, \frac{3}{4}), \quad (1,1,0)$$

Observación: *El razonamiento de arriba ilustra hasta dónde podemos llegar con los métodos que hemos estudiado en clase. Si queremos determinar is alguno de los puntos obtenidos corresponde a un mínimo global necesitamos hacer un estudio más detallado que va más allá del objetivo de este curso. A continuación presentamos el argumento para aquellas personas que estén interesadas en la respuesta.*
De las restricciones obtenemos que $z=2-x^2-y$. Reemplazando este valor de z en la segunda restricción obtenemos

$$2=x+y^2+2z=x+y^2+4-2x^2-2y$$

y, por lo tanto, y verifica la ecuación

$$y^2-2y+x-2x^2+2=0$$

Despejamos

$$y=1 \pm \sqrt{2x^2-x-1}$$

Es decir, para obtener una solución de las restricciones necesitamos que $2x^2-x-1 \geq 0$. Dibujando la gráfica de la parábola $y=2x^2-x-1$ vemos que $2x^2-x-1 \geq 0$ para $x \leq -1/2$ y $x \geq 1$. Es decir, si definimos $I=(-\infty-\frac{1}{2}] \cup [1,\infty)$, podemos parametrizar el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y+z=2, x+y^2+2z=2\}$ de la manera siguiente

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in I, y=1 \pm \sqrt{2x^2-x-1}, z=2-x^2-y,\}$$

Ahora reemplazanos $y+z=2-x^2$ en la función objetivo y obtenemos $f(x,y,z)=(y+z-3)^2=(1+x^2)^2$. Observemos que la función de una variable $h(x)=(1+x^2)^2$, definida en el dominio I, es estrictamente convexa, decreciente si $x \leq 0$ y creciente si $x \geq 0$. Por lo tanto, h alcanza dos mínimos locales en los puntos $-1/2$ and 1. Además,

$$h\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}, \quad h(1)=4$$

Por lo tanto, el mínimo se alcanza en el punto $x=-\frac{1}{2}$, $y=1$, $z=\frac{3}{4}$.

(c) El lagrangiano es $L(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)-\mu h(x,y,z)$ Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{gathered} 1-2\lambda x-\mu=0 \\ 1-2\lambda y+\mu=0 \\ 1-2\lambda z+\mu=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x-y-z=1 \end{gathered}$$

De las ecuaciones segunda y tercera obtenemos $\lambda y=\lambda z$.
Si $\lambda=0$, las dos primeras ecuaciones son inconsistentes. Por tanto, $\lambda \neq 0$ y $y=z$. Ahora, podemos utilizar las dos últimas ecuaciones para despejar y y z. Obtenemos las soluciones

$$(1,0,0) \text{ máximo}$$

$$-\frac{1}{3}(1,2,2) \text{ mínimo}$$

5-17. *Encontrar el máximo de la función $f(x,y,z)=xyz$ en el conjunto $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z\le 1, \quad x,y,z\ge 0\}$.*

Solución: En primer lugar escribimos el problema de forma canónica,

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x,y,z} & xyz \\ \text{s.a.} & x+y+z\le 1 \\ & -x\le 0 \\ & -y\le 0 \\ & -z\le 0 \end{array}$$

El Lagrangiano es

$$L = xyz+\lambda_1(1-x-y-z)+\lambda_2 x+\lambda_3 y+\lambda_4 z$$

y las ecuaciones de Kuhn–Tucker son

$$\begin{aligned}
&(1) & \frac{\partial L}{\partial x}=yz-\lambda_1+\lambda_2 &= 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = yz+\lambda_2 \\
&(2) & \frac{\partial L}{\partial y}=xz-\lambda_1+\lambda_3 &= 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = xz+\lambda_3 \\
&(3) & \frac{\partial L}{\partial z}=xy-\lambda_1+\lambda_4 &= 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = xy+\lambda_4 \\
&(4) & \lambda_1(1-x-y-z) &= 0 \\
&(5) & \lambda_2 x &= 0 \\
&(6) & \lambda_3 y &= 0 \\
&(7) & \lambda_4 z &= 0 \\
&(8) & \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 &\ge 0 \\
&(9) & x+y+z &\le 1 \\
&(10) & x,y,z &\ge 0
\end{aligned}$$

Caso 1 $\lambda_1=0$. En este caso, de las ecuaciones 1, 2 y 3 obtenemos que

$$yz+\lambda_2 = xz+\lambda_3 = xy+\lambda_4 = 0$$

Pero como todas las variables son positivas, esto implica que

(11) $$yz=xz=xy=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$$

Las ecuaciones 11 dan lugar a un numero infinito de soluciones en las que al menos dos de las variables x,y,z se anulan. El valor de la función objetivo en todas estas soluciones es 0.

Caso 2 $\lambda_1>0$. Entonces $x+y+z=1$. Si, por ejemplo $x=0$ obtenemos de las ecuaciones 2 y 3 que

$$\lambda_3=\lambda_4=\lambda_1>0$$

y por las ecuaciones 6 y 7 vemos que también se verifica que $y=z=0$. Pero esto contradice que $x+y+z=1$. Concluimos que $x>0$. Un razonamiento análogo demuestra que $y,z>0$. Por las ecuaciones 5, 6 y 7 vemos que

$$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$$

y las ecuaciones 1, 2 y 3 implican que

$$yz=xz=xy$$

es decir

$$x=y=z$$

y como $x+y+z=1$, concluimos que

$$x=y=z=\frac{1}{3};\quad \lambda_1=\frac{1}{9}$$

Como el valor de la función objetivo es

$$f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$$

el punto

$$x=y=z=\frac{1}{3}$$

corresponde al máximo.

5-18. *Encontrar el mínimo de la función* $f(x,y) = 2y - x^2$ *en el conjunto* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad x, y \geq 0\}$.

Solución: Escribimos el problema en forma canónica

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x,y,z} & x^2 - 2y \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ & -x \leq 0 \\ & -y \leq 0 \end{array}$$

El Lagrangiano asociado es

$$L = x^2 - 2y + \lambda_1(1 - x^2 - y^2) + \lambda_2 x + \lambda_3 y$$

y las ecuaciones de Kuhn–Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_1 x = 2x + \lambda_2 \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2 - 2\lambda_1 y + \lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = 2 + 2\lambda_1 y \tag{13}$$

$$\lambda_1(1 - x^2 - y^2) = 0 \tag{14}$$

$$\lambda_2 x = 0 \tag{15}$$

$$\lambda_3 y = 0 \tag{16}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \tag{17}$$

$$x^2 + y^2 \leq 1 \tag{18}$$

$$x, y \geq 0 \tag{19}$$

Como todas las variables que aparecen en la ecuación 13 son positivas, tenemos que

$$\lambda_3 \geq 2 > 0$$

por lo que

$$y = 0$$

y de la ecuación 13 vemos que

$$\lambda_3 = 2$$

Caso 1: $x = 0$**.** Por la ecuación 14 vemos que $\lambda_1 = 0$ y por la ecuación 12 vemos que $\lambda_2 = 0$. Es decir una solución de las ecuaciones de Kuhn–Tucker es

$$x^* y^* = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2$$

El valor de la función objetivo en este punto es $f(0,0) = 0$.

Caso 2: $x > 0$**.** Entonces $\lambda_2 = 0$ y por la ecuación 12, $\lambda_1 = 1$. Ahora deducimos de la ecuación 14 que $x^2 + y^2 = 1$. Y como $y = 0$, $x \geq 0$ tenemos que

$$x = 1$$

Otra solución de las ecuaciones de Kuhn–Tucker es

$$x^* = 1, \quad y^* = 0; \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2$$

El valor de la función objetivo en este punto es $f(1,0) = -1$. Por lo tanto, el mínimo se alcanza en el punto $(1,0)$.

5-19. *Resolver el problema*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & x^2 + y^2 - 20x \\ s.a. & 25x^2 + 4y^2 \leq 100 \end{array} \right.$$

Solución: Escribimos el problema como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & -x^2 - y^2 + 20x \\ \text{s.a.} & 25x^2 + 4y^2 \leq 100 \end{array} \right.$$

El Lagrangiano asociado es

$$L = -x^2 - y^2 + 20x + \lambda(100 - 25x^2 - 4y^2)$$

y las ecuaciones de Kuhn-Tucker son

$$-2x + 20 - 50\lambda x = 0 \tag{20}$$
$$-2y - 8\lambda y = 0 \tag{21}$$
$$25x^2 + 4y^2 \leq 100 \tag{22}$$
$$\lambda(100 - 25x^2 - 4y^2) = 0 \tag{23}$$
$$\lambda \geq 0 \tag{24}$$

De 20 tenemos $y(1 + 4\lambda) = 0$, por lo que si $y \neq 0$, entonces $\lambda = -1/4$ lo cual contradice 24. Concluimos que $y = 0$ y el sistema se reduce a

$$-2x + 20 - 50\lambda x = 0 \tag{25}$$
$$x^2 \leq 4 \tag{26}$$
$$\lambda(4 - x^2) = 0 \tag{27}$$
$$\lambda \geq 0 \tag{28}$$

Si $\lambda = 0$ de 25 obtenemos que $x = 10$. Pero esto no verifica 26. Entonces $\lambda \neq 0$ y de 27 deducimos que $x^2 = 4$. Hay dos posibilidades $x = \pm 2$. Despejando en 25 obtenemos

$$\lambda = \frac{10 - x}{25x}$$

por lo que si $x = -2$ entonces $\lambda = -12/50$ que no verifica 28. Por lo tanto, la solución es

$$x = 2, \quad y = 0, \qquad \lambda = \frac{8}{50}$$

5-20. *Resolver el problema*

$$\begin{cases} \max & x + y - 2z \\ s.a. & z \geq x^2 + y^2 \\ & x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

Solución: En primer lugar escribimos el problema de forma canónica,

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x,y,z} & x + y - 2z \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 - z \leq 0 \\ & -x \leq 0 \\ & -y \leq 0 \\ & -z \leq 0 \end{array}$$

El Lagrangiano es

$$L = x + y - 2z + \lambda_1(z - x^2 - y^2) + \lambda_2 x + \lambda_3 y + \lambda_4 z$$

y las ecuaciones de Kuhn–Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_1 x = 1 + \lambda_2 \tag{29}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 y + \lambda_3 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_1 y = 1 + \lambda_3 \tag{30}$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = -2 + \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_4 = 2 \tag{31}$$
$$\lambda_1(x^2 + y^2 - z) = 0 \tag{32}$$
$$\lambda_2 x = 0 \tag{33}$$
$$\lambda_3 y = 0 \tag{34}$$
$$\lambda_4 z = 0 \tag{35}$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0 \tag{36}$$
$$x, y, z \geq 0 \tag{37}$$

De la ecuación 29, vemos que si $\lambda_1 = 0$ o $x = 0$, entonces $1 + \lambda_2 = 0$ con lo que $\lambda_2 < 0$. Por lo tanto, debe verificarse que $\lambda_1 > 0$ y $x > 0$. Análogamente de la ecuación 30 deducimos que $y > 0$. De las ecuaciones 33 y 34 vemos ahora que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Las ecuaciones de Kuhn–Tucker pueden escribirse ahora como

$$2\lambda_1 x = 1 \tag{38}$$
$$2\lambda_1 y = 1 \tag{39}$$
$$\lambda_1 + \lambda_4 = 2 \tag{40}$$
$$x^2 + y^2 = z \tag{41}$$
$$\lambda_4 z = 0 \tag{42}$$
$$\lambda_1, \lambda_4 \geq 0 \tag{43}$$
$$x, y, z \geq 0 \tag{44}$$

Como $\lambda_1 > 0$, de las ecuaciones 38 y 39 obtenemos que

$$x = y = \frac{1}{2\lambda_1}$$

por lo que

$$z = 2x^2 > 0$$

Y deducimos de la ecuación 42 que $\lambda_4 = 0$ y de la ecuación 40 que $\lambda_1 = 2$. Por lo tanto, la solución es

$$x = y = \frac{1}{4}, \quad z = \frac{1}{8}; \qquad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$