

HOJA 3: Derivadas parciales y diferenciación.

3-1. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ para las siguientes funciones.

- (a) $f(x, y) = x \cos x \sin y$
- (b) $f(x, y) = e^{xy^2}$
- (c) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

Solución:

(a) Las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x(\cos x)(\sin y)$ son

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \cos x \sin y - x \sin x \sin y, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x \cos x \cos y$$

(b) Las derivadas parciales de la función $f(x, y) = e^{xy^2}$ son

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y^2 e^{xy^2}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2xy e^{xy^2}$$

(c) Las derivadas parciales de la función $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$ son

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x \ln(x^2 + y^2) + 2x, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y \ln(x^2 + y^2) + 2y$$

3-2. Determinar la productividad marginal de cada factor para la siguiente función de producción Cobb-Douglas

$$F(x, y, z) = 12x^{1/2}y^{1/3}z^{1/4}$$

Solución: Calculamos las derivadas parciales respecto a cada uno de los factores

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 6x^{-1/2}y^{1/3}z^{1/4} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 4x^{1/2}y^{-2/3}z^{1/4} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 3x^{1/2}y^{1/3}z^{-3/4} \end{aligned}$$

3-3. Calcular el gradiente de las siguientes funciones en el punto p indicado.

- (a) $f(x, y) = (a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$ en $p = (a/2, a/2)$.
- (b) $g(x, y) = \ln(1 + xy)^{1/2}$ en $p = (1, 1)$.
- (c) $h(x, y) = e^y \cos(3x + y)$ en $p = (2\pi/3, 0)$.

Solución:

(a) $\nabla(a^2 - x^2 - y^2)^{1/2} = \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right)$ por lo que el gradiente es

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right) \Big|_{x=y=a/2} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$$

(b) $\nabla(\ln(1 + xy)^{1/2}) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{1+xy}, \frac{x}{1+xy} \right)$ por lo que el gradiente en el punto pedido es $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

(c)

$$\begin{aligned} &\nabla(e^y \cos(3x + y)) \Big|_{x=2\pi/3, y=0} = \\ &= (-3e^y \sin(3x + y), e^y \cos(3x + y) - e^y \sin(3x + y)) \Big|_{x=2\pi/3, y=0} = (0, 1) \end{aligned}$$

3-4. Sea la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \operatorname{sen}(xy) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$.
 (b) Comprobar que f es continua en \mathbb{R}^2 . (sug: Utilizar (demostrando primero) que si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces

$$0 \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \leq 1)$$

- (c) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

Solución:

- (a) Las derivada parcial respecto a x es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$$

ya que $\operatorname{sen}(0) = 0$. Análogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

por lo que

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

- (b) Observamos que si $(x, y) \neq (0, 0)$, la función f es un cociente de funciones continuas y, por lo tanto es continua en todos los puntos $(x, y) \neq (0, 0)$.

Recordemos que la función f es continua en el punto $(0, 0)$ si

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0)$$

Vamos a demostrar esto. En primer lugar, como $|x|, |y| \geq 0$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

por lo que

$$0 \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \leq 1)$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon/2$. Supongamos ahora que $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ y entonces tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= 2 \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} |\operatorname{sen}(xy)| \quad (\text{ya que } |\operatorname{sen}(xy)| \leq 1) \\ &\leq 2 \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \\ &= 2 \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \quad (\text{por la observación anterior}) \\ &\leq 2 \sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

- (c) En primer lugar, observamos que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ya que las parciales existen y son continuas en es conjunto.

La función es diferenciable en $(0, 0)$ si

$$\lim_{(v_1, v_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(v_1, v_2) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (v_1, v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0$$

Observamos que $f(0, 0) = 0$, $\nabla f(0, 0) \cdot (v_1, v_2) = 0$. Así que consideramos el cociente

$$\frac{f(v_1, v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 2 \frac{v_1^2 + v_2^2}{(|v_1| + |v_2|) \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \operatorname{sen}(v_1 v_2) = 2 \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{(|v_1| + |v_2|)} \operatorname{sen}(v_1 v_2)$$

con $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$. La función f es diferenciable en $(0, 0)$ si

$$\lim_{(v_1, v_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{(|v_1| + |v_2|)} \operatorname{sen}(v_1 v_2) = 0$$

Por la observación hecha en el apartado anterior, tenemos que

$$0 \leq \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{(|v_1| + |v_2|)} |\text{sen}(v_1 v_2)| \leq |\text{sen}(v_1 v_2)|$$

y como $\text{sen}(v_1 v_2)$ es continua,

$$\lim_{(v_1, v_2) \rightarrow (0, 0)} \text{sen}(v_1 v_2) = 0$$

por lo que

$$\lim_{(v_1, v_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{(|v_1| + |v_2|)} \text{sen}(v_1 v_2) = 0$$

y f es diferenciable en $(0, 0)$.

3-5. Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \text{sen } y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Estudia la continuidad de f en \mathbb{R}^2 .
 (b) Calcula las derivadas parciales en el punto $(0, 0)$.
 (c) ¿En qué puntos es diferenciable la función?

Solución:

- (a) Observamos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2} = 0$$

Por otra parte,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \text{sen } t}{2t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{2t} = \frac{1}{2}$$

como no coinciden, el límite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

no existe y, por tanto, f no es continua en $(0, 0)$.

La función es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ya que es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula.

- (b) Las derivada parcial respecto a x es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^3} = 0$$

ya que $\text{sen}(0) = 0$. Análogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^3} = 0$$

- (c) En primer lugar, observamos que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ya que las parciales existen y son continuas en ese conjunto. La función no es diferenciable en $(0, 0)$ ya que no es continua en ese punto.

3-6. Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 y}{x^2 + 2y^2} \cos(xy) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$.
 (b) Comprobar que f es continua en \mathbb{R}^2 . (sug: Observa que si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces

$$\frac{1}{x^2 + 2y^2} \leq \frac{1}{x^2 + y^2})$$

- (c) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

Solución:

- (a) Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^3} = 0$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{2t^3} = 0$$

- (b) La función es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ya que es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula. Estudiamos ahora la continuidad en $(0, 0)$. Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos $\delta = \sqrt{\varepsilon/2}$. Si $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ entonces,

$$\begin{aligned} \left| 2 \frac{x^3 y}{x^2 + 2y^2} \cos(xy) \right| &= 2 \frac{x^2 |x| |y|}{x^2 + 2y^2} |\cos(xy)| \\ &\leq 2|x||y| \quad (\text{porque } x^2 \leq x^2 + 2y^2 \text{ y } |\cos(xy)| \leq 1) \\ &= 2\sqrt{x^2} \sqrt{y^2} \leq 2 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) < 2\delta^2 = \varepsilon \end{aligned}$$

- (c) La función es diferenciable en $(0, 0)$ si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Como $f(0,0) = 0$, $\nabla f(0,0) \cdot (x,y) = 0$, La función es diferenciable en $(0,0)$ si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{(x^2 + 2y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \cos(xy) = 0$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$. Si $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ entonces,

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^3 y}{(x^2 + 2y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \cos(xy) \right| &\leq \left| \frac{x^3 y}{(x^2 + 2y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\ &= \frac{x^2 |x| |y|}{(x^2 + 2y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\leq \frac{|x| |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

por lo que f es diferenciable en $(0,0)$.

3-7. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en el punto p según el vector v indicados en cada caso.

- (a) $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$, con $p = (1, 2)$, $v = (3, 4)$
 (b) $g(x,y) = e^{xy} + y \arctg x$, con $p = (1, 1)$, $v = (1, -1)$
 (c) $h(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$, con $p = (0, 5)$, $v = (1, -1)$.

Solución:

- (a) $\nabla(x + 2xy - 3y^2)|_{x=1,y=2} = (1 + 2y, 2x - 6y)|_{x=1,y=2} = (5, -10)$. Por lo que la derivada según el vector $(3, 4)$ es

$$(5, -10) \cdot (3, 4) = -25$$

- (b) $\nabla(e^{xy} + y \arctan x)|_{x=1,y=1} = \left(ye^{xy} + \frac{y}{1+x^2}, xe^{xy} + \arctan x \right)|_{x=1,y=1} = (e + \frac{1}{2}, e + \arctan 1) = (e + \frac{1}{2}, e + \frac{\pi}{4})$. Por lo que la derivada según el vector $(1, -1)$ es

$$(e + \frac{1}{2}, e + \frac{\pi}{4}) \cdot (1, -1) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

- (c) $\nabla((x^2 + y^2)^{1/2})|_{x=0,y=5} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)|_{x=0,y=5} = (0, 1)$. Por lo que la derivada según el vector $(1, -1)$ es

$$(0, 1) \cdot (1, -1) = -1$$

3-8. Sea $B(x,y) = 10x - x^2 - \frac{1}{2}xy + 5y$ los beneficios de una empresa. El año pasado vendió $x = 4$ unidades de la mercancía 1 e $y = 2$ unidades de la mercancía 2. Si este año desea aumentar sus ventas en una pequeña cantidad de la forma más beneficiosa posible, ¿a qué deberá ser igual $\frac{\Delta x}{\Delta y}$?

Solución:

$$\nabla(10x - x^2 - \frac{xy}{2} + 5y)|_{x=4,y=2} = \left(10 - 2x - \frac{y}{2}, -\frac{x}{2} + 5 \right)|_{x=4,y=2} = (1, 3)$$

Como el gradiente indica la dirección de máximo crecimiento de la función, si hay un incremento $(\Delta x, \Delta y)$, para que ese aumento sea lo más beneficioso posible, se debe cumplir que $(\Delta x, \Delta y) = k(1, 3)$. De ahí obtenemos que $\Delta x = k$ y $\Delta y = 3k$ y, por tanto, $\Delta x/\Delta y = 1/3$.

- 3-9. Se sabe que $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 7$ y $D_{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})}f(2, 3) = 3\sqrt{5}$ obtener $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)$ y $D_v f(2, 3)$ con $v = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Solución: Sabemos que

$$D_{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})}f(2, 3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3), \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 3\sqrt{5}$$

y que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 7$$

Llamando

$$z = \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)$$

se debe cumplir que

$$(7, z) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 3\sqrt{5}$$

Y eso equivale a

$$\frac{7\sqrt{5}}{5} + \frac{2z\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$$

y, por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = 4$$

Ahora podemos calcular

$$D_{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})}f(2, 3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3), \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) \right) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = (7, 4) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = \frac{37}{5}$$

- 3-10. Dada la función $f(x, y, z) = xy^2 + z^2y$, calcula la derivada según el vector $v = (1, -1, 2)$ en el punto $(1, 1, 0)$. Determina la dirección para la que se maximiza (resp. minimiza) la derivada direccional en el punto $(1, 1, 0)$, así como su valor.

Solución: El gradiente de la función $f(x, y, z) = xy^2 + z^2y$ en el punto $(1, 1, 0)$ es

$$\nabla f(1, 1, 0) = \nabla(xy^2 + z^2y)|_{x=1, y=1, z=0} = (y^2, 2xy + z^2, 2zy)|_{x=1, y=1, z=0} = (1, 2, 0)$$

La derivada según vector v es

$$D_v f(1, 1, 0) = \nabla f(1, 1, 0) \cdot v = (1, 2, 0) \cdot (1, -1, 2) = -1$$

La dirección que maximiza la derivada direccional es

$$\frac{\nabla f(1, 1, 0)}{\|\nabla f(1, 1, 0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$$

y el valor máximo de la derivada direccional es $\|\nabla f(1, 1, 0)\| = \sqrt{5}$.

Análogamente, la dirección que minimiza la derivada direccional es

$$-\frac{\nabla f(1, 1, 0)}{\|\nabla f(1, 1, 0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, -2, 0)$$

y el valor mínimo de la derivada direccional es $-\|\nabla f(1, 1, 0)\| = -\sqrt{5}$.

- 3-11. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ y $g(x, y) = (x + y, ay)$ determinar,
 (a) El valor de a para que la función $f \circ g$ tenga como dirección de máximo crecimiento la del vector $v = (5, 7)$ en el punto $p = (1, 1)$.
 (b) Las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva $xy^2 - 2x^2 + y + 5x = 6$ en el punto $(4, 2)$.

Solución: Consideramos las funciones $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ y $g(x, y) = (x + y, ay)$

- (a) La composición es $f(g(x, y)) = f(x + y, ay) = (x + y)^2 + a^2y^2 + 1$ y el gradiente en el punto $(1, 1)$ es

$$\nabla(f(g(1, 1))) = (2x + 2y, 2x + 2y + 2a^2y) \Big|_{x=1, y=1} = (4, 4 + 2a^2)$$

Para que $f(g(x, y))$ tenga en el punto $(1, 1)$ como dirección de máximo crecimiento la del vector $v = (5, 7)$, debe verificarse v y $\nabla(f(g(x, y)))(1, 1)$ sean paralelos. Es decir,

$$\frac{4 + 2a^2}{4} = \frac{7}{5}$$

cuya solución es

$$a = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

- (b) Notemos primero que el punto $(4, 2)$ satisface la ecuación $xy^2 - 2x^2 + y + 5x = 6$. Ahora, el gradiente de la función $g(x, y) = xy^2 - 2x^2 + y + 5x = 6$ en el punto $(4, 2)$ es

$$\nabla g(4, 2) = (y^2 - 4x + 5, 2xy + 1) \Big|_{\substack{x=4 \\ y=2}} = (-7, 17)$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$(-7, 17) \cdot (x - 4, y - 2) = 0$$

y las ecuaciones paramétricas de la recta normal son

$$(x(t), y(t)) = (4, 2) + t(-7, 17)$$

3-12. Calcular la matriz Jacobiana de F en los casos siguientes.

- (a) $F(x, y, z) = (xyz, x^2z)$
 (b) $F(x, y) = (e^{xy}, \ln x)$
 (c) $F(x, y, z) = (\sin xyz, xz)$

Solución:

- (a) La matriz Jacobiana de F es

$$D F(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2xz & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

- (b) La matriz Jacobiana de F es

$$D F(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1/x & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) La matriz Jacobiana de F es

$$D F(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \sin xyz & xz \sin xyz & xy \sin xyz \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

3-13. Utilizando la regla de la cadena calcula las derivadas

$$\frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

en los casos siguientes.

- (a) $z = x^2 - 2xy + y^2$, $x = r + \theta$, $y = r - \theta$
 (b) $z = \sqrt{25 - 5x^2 - 5y^2}$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

Solución:

- (a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= 2x - 2y - 2x + 2y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= 2x - 2y - (-2x + 2y) = 4(x - y) = 8\theta \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\
&= -\frac{10x}{2\sqrt{25-5x^2-5y^2}} \cos \theta - \frac{10y}{2\sqrt{25-5x^2-5y^2}} \sin \theta \\
&= -\frac{5r \cos^2 \theta}{\sqrt{25-5r^2}} - \frac{5r \sin^2 \theta}{\sqrt{25-5r^2}} = -\frac{5r}{\sqrt{25-5r^2}} \\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= -\frac{10x}{\sqrt{25-5x^2-5y^2}} + \frac{10y}{\sqrt{25-5x^2-5y^2}} \\
&= -\frac{10x}{2\sqrt{25-5x^2-5y^2}} (-r \sin \theta) - \frac{10y}{2\sqrt{25-5x^2-5y^2}} (r \cos \theta) \\
&= \frac{5r^2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{25-5r^2}} - \frac{5r^2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{25-5r^2}} = 0
\end{aligned}$$

3-14. La utilización del capital K en el instante t genera unos beneficios en ese momento de

$$B(t) = 5(1+t)^{1/2}K$$

Supongamos que el capital varía en el tiempo según la ecuación $K(t) = 120e^{t/4}$. Determinar la tasa de cambio de B .

Solución:

Como

$$\frac{dK}{dt} = 30e^{t/4}$$

vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}B &= \frac{5}{2}(1+t)^{-1/2}K + 5(1+t)^{1/2} \frac{dK}{dt} \\
&= 300(1+t)^{-1/2}e^{t/4} + 150(1+t)^{1/2}e^{t/4}
\end{aligned}$$

3-15. Verificar la regla de la cadena para la función $h = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ con $x = e^t$, $y = e^{t^2}$, $z = e^{t^3}$.

Solución: Tenemos $h(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ y $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{t^2}$, $z(t) = e^{t^3}$. Sustituyendo,

$$\begin{aligned}
h(x(t), y(t), z(t)) &= \frac{e^t}{e^{t^2}} + \frac{e^{t^2}}{e^{t^3}} + \frac{e^t}{e^{t^3}} \\
&= e^{-t(-1+t)} + e^{-t^2(-1+t)} + e^{(-t(-1+t)(t+1))}
\end{aligned}$$

Ahora derivamos, $D_t(e^{-t(-1+t)} + e^{-t^2(-1+t)} + e^{(-t(-1+t)(t+1))}) = e^{-t(-1+t)} - 2e^{-t(-1+t)}t + 2e^{-t^2(-1+t)}t - 3e^{-t^2(-1+t)}t^2 + e^{(-t(-1+t)(t+1))} - 3e^{(-t(-1+t)(t+1))}t^2$. Etc.

$$\begin{aligned}
D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x}g(x) - f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x}}{g^2(x)} \\
D_t\left(\frac{e^t}{e^{t^2}}\right) &= e^{-t(-1+t)} - 2te^{-t(-1+t)} \\
D_t\left(\frac{e^{t^2}}{e^{t^3}}\right) &= 2te^{-t^2(-1+t)} - 3t^2e^{-t^2(-1+t)} \\
D_t\left(\frac{e^t}{e^{t^3}}\right) &= e^{(-t(-1+t)(t+1))} - 3t^2e^{(-t(-1+t)(t+1))}
\end{aligned}$$

3-16. Verificar la regla de la cadena para la composición $f \circ c$ en los casos.

(a) $f(x, y) = xy$, $c(t) = (e^t, \cos t)$.

(b) $f(x, y) = e^{xy}$, $c(t) = (3t^2, t^3)$.

Solución:

- (a) Las funciones son $f(x, y) = xy$ y $c(t) = (x(t), y(t)) = (e^t, \cos t)$. Por lo que, $f(x(t), y(t)) = f(e^t, \cos t) = e^t \cos t$ y

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = e^t \cos t - e^t \sin t$$

Ahora calculamos

$$\nabla f(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt}$$

Por un parte,

$$\nabla f(x, y) = (y, x)$$

mientras que

$$\frac{dc}{dt} = (e^t, -\sin t)$$

Por tanto,

$$\nabla f(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt} = y(t)e^t - x(t) \sin t$$

que coincide con lo que hemos encontrado más arriba.

- (b) Las funciones son $f(x, y) = e^{xy}$ y $c(t) = (x(t), y(t)) = (3t^2, t^3)$. Por lo que, $f(x(t), y(t)) = f(3t^2, t^3) = e^{3t^5}$ y

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = 15t^4 e^{3t^5}$$

Ahora calculamos

$$\nabla f(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt}$$

Por un parte,

$$\nabla f(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

mientras que

$$\frac{dc}{dt} = (6t, 3t^2)$$

Y por tanto,

$$\nabla f(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt} = (6ye^{xy}t + 3xe^{xy}t^2)|_{x=3t^2, y=t^3} = 15t^4 e^{3t^5}$$

3-17. Expresar mediante la regla de la cadena $h'(x)$ en los siguientes casos.

- (a) $h(x) = f(x, u(x, a))$, donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.
 (b) $h(x) = f(x, u(x), v(x))$.

Solución:

(a)

$$h'(x) = \frac{\partial f(x, u(x, a))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, u(x, a))}{\partial y} \frac{\partial u(x, a)}{\partial x}$$

(b)

$$h'(x) = \frac{\partial f(x, u(x), v(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, u(x), v(x))}{\partial y} u'(x) + \frac{\partial f(x, u(x), v(x))}{\partial z} v'(x)$$

3-18. Determinar en qué puntos la superficie $z = e^{(x-1)^2+y^2}$ tiene un plano tangente horizontal y calcular su ecuación en esos puntos.

Solución: Consideramos la función de 3 variables

$$g(x, y, z) = e^{(x-1)^2+y^2} - z$$

Nos piden el plano tangente a la superficie de nivel

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$$

en un punto (x, y, z) en el que ese plano sea horizontal. En ese punto debe verificarse

$$\nabla g(x, y, z) = (0, 0, -1)$$

Como,

$$\nabla g(x, y, z) = (2(x-1)e^{(x-1)^2+y^2}, 2ye^{(x-1)^2+y^2}, -1)$$

debe verificarse que $x = 1$, $y = 0$. La coordenada z es

$$z = e^{(x-1)^2+y^2} \Big|_{x=1, y=0} = 1$$

El plano tangente es horizontal en el punto $(1, 0, 1)$ y su ecuación es

$$z = 1$$

3-19. Considerar la función $f(x, y) = (xe^y)^3$.

- (a) Calcular el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 0)$.
 (b) Aproximar, utilizando el plano tangente a la gráfica de f , el valor de $(1, 999e^{0,002})^3$.

Solución:

- (a) Nos piden el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 0, f(2, 0)) = (2, 0, 8)$. Consideramos la función de 3 variables

$$g(x, y, z) = x^3e^{3y} - z$$

La gráfica de f es la superficie de nivel de g ,

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$$

Por tanto, nos piden calcular el plano tangente a la superficie de nivel A en el punto $(2, 0, 8)$. Como,

$$\nabla g(2, 0, 8) = (3x^2e^y, 3x^3e^y, -1)|_{x=2, y=0, z=8} = (12, 24, -1)$$

la ecuación del plano tangente es

$$(12, 24, -1) \cdot (x - 2, y, z - 8) = 0$$

es decir

$$12x + 24y - z = 16$$

- (b) Nos piden calcular la función $f(x, y) = x^3e^{3y}$ en el punto $(1'999, 0'002)$. Como f es diferenciable y este punto es muy cercano al punto $(2, 0)$, utilizamos la aproximación del plano tangente

$$z = 12x + 24y - 16$$

con lo que obtenemos

$$f(1'999, 0'002) \approx (12x + 24y - 16)|_{x=1'999, y=0'002} = 8'036$$

3-20. Calcular el plano tangente y la recta normal a las superficies de nivel en los puntos que se indican a continuación.

- (a) $x^2 + 2xy + 2y^2 - z = 0$ en el punto $(1, 1, 5)$.
 (b) $x^2 + y^2 - z = 0$ en el punto $(1, 2, 5)$.
 (c) $(y - x^2)(y - 2x^2) - z = 0$ en el punto $(1, 3, 2)$.

Solución:

- (a) Calculamos el gradiente

$$\nabla(x^2 + 2xy + 2y^2 - z)|_{(x,y,z)=(1,1,5)} = (2x + 2y, 2x + 4y, -1)|_{(x,y,z)=(1,1,5)} = (4, 6, -1)$$

por lo que la ecuación del plano tangente es

$$(4, 6, -1) \cdot (x - 1, y - 1, z - 5) = 0$$

es decir,

$$4x + 6y - z = 5$$

- (b) Calculamos el gradiente

$$\nabla(x^2 + y^2 - z)|_{(x,y,z)=(1,2,5)} = (2x, 2y, -1)|_{(x,y,z)=(1,2,5)} = (2, 4, -1)$$

por lo que la ecuación del plano tangente es

$$(2, 4, -1) \cdot (x - 1, y - 2, z - 5) = 0$$

es decir,

$$2x + 4y - z = 5$$

(c) Calculamos el gradiente

$$\begin{aligned}\nabla((y-x^2)(y-2x^2)-z)|_{(x,y,z)=(1,3,2)} &= (-2x(y-2x^2) - 4x(y-x^2), 2y-3x^2, -1)|_{(x,y,z)=(1,3,2)} \\ &= (-10, 3, -1)\end{aligned}$$

por lo que la ecuación del plano tangente es

$$(-10, 3, -1) \cdot (x-1, y-3, z-2) = 0$$

es decir,

$$10x - 3y + z = 3$$

3-21. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones cuyas derivadas parciales son continuas en todo \mathbb{R}^2 .

(a) Probar que si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

para todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $f - g$ sólo depende de y .

(b) Probar que si

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

para todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $f - g$ sólo depende de x .

(c) Probar que si $\nabla(f - g)(x, y) = (0, 0)$ para todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $f - g$ es constante en todo \mathbb{R}^2 .

(d) Encontrar una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = yx^2 + x + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2x + y, \quad f(0, 0) = 1$$

¿Hay más funciones que verifiquen estas condiciones?

Solución: Las funciones f y g son de clase C^1 .

(a) Fijamos dos puntos $(a, b), (x, b) \in \mathbb{R}^2$. Sea $h(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$. Por el Teorema del Valor medio,

$$h(x, b) - h(a, b) = \nabla h(c) \cdot (x - a, 0)$$

para algún punto $c = (c_1, c_2) = t(x, b) + (1 - t)(a, b) = (tx + (1 - t)a, b)$ con $0 < t < 1$. Como

$$\frac{\partial h}{\partial x}(c) = 0,$$

tenemos que $h(x, b) - h(a, b) = 0$. Es decir, $h(x, b) = h(a, b)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y la función h no depende de y

(b) Análogo al caso anterior.

(c) Tenemos que en todos los puntos de \mathbb{R}^2 ,

$$\frac{\partial(f - g)}{\partial x} = \frac{\partial(f - g)}{\partial y} = 0$$

y por tanto $f - g$ no depende ni de x ni de y .

(d) Si sabemos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = yx^2 + x + 2y$, podemos integrar con respecto a y , es decir

$$f(x, y) = \int (yx^2 + x + 2y) dy = \frac{1}{2}y^2x^2 + xy + y^2 + C(x)$$

donde $C(x)$ es una función que depende sólo de x . La otra condición es que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2x + y$; probamos con la función que hemos obtenido

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}y^2x^2 + xy + y^2 + C(x) \right) = y^2x + y + C'(x)$$

por tanto, $C'(x) = 0$, por lo que $C(x) = c$ una constante. Para encontrar c usamos la última condición que es $f(0, 0) = 1$, por tanto

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{1}{2}y^2x^2 + xy + y^2 + c \\ f(0, 0) &= c \text{ por un lado y, por otro, } f(0, 0) = 1, \text{ por tanto } c = 1\end{aligned}$$

La función $f(x, y) = \frac{1}{2}y^2x^2 + xy + y^2 + 1$ verifica las condiciones pedidas. Si hubiera otra función g de clase C^1 que verificara estas condiciones tendríamos que $\nabla(f - g)(x, y) = (0, 0)$ en todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por el apartado (c) tenemos que hay una constante $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$(f - g)(x, y) = A$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pero, como $f(0, 0) = 1 = g(0, 0)$, tenemos que $A = 0$ y las dos funciones coinciden.