UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA II
PROBLEMAS (SOLUCIONES)

Hoja 1: Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1-1. *Calcular los siguientes determinantes:*

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

Solución: La solución del apartado a) es -15, la del apartado b) -36 y la del c) 32.

1-2. *Si* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$, *calcúlese razonadamente el valor de* $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$$

sacando el número 2 en cada una de las filas, obtenemos

$$2^3 \begin{vmatrix} a & c & b \\ u & w & v \\ p & r & q \end{vmatrix}$$

que, intercambiando las columnas 2 y 3 es

$$-2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

e intercambiando las filas 2 y 3,

$$2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 2^3 \times 25 = 200$$

1-3. *Comprueba las siguientes identidades sin desarrollar los determinantes:*

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

Solución: a): En el determinante,

$$\left| \begin{pmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{pmatrix} \right|$$

multiplicamos y dividimos por a obtenemos

$$\frac{1}{a} a \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Haciendo lo mismo con b, obtenemos que este determinante es el mismo que

$$\frac{1}{ab} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

y ahora con c,

$$\frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

pero sacando abc en la primera columna, obtenemos que la última expresión es igual a

$$\frac{1}{abc} abc \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

b): Sumando la segunda columna a la tercera en el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

porque las columnas 1 y 3 son iguales.

1-4. *Resolver la ecuación sin desarrollar el determinante, utilizando las propiedades de los determinantes:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$$

Solución: Debemos suponer que $a \neq 0$, porque si no el determinante es 0 para cualquier valor real x. Como,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x & c \\ 1 & b & x \end{vmatrix}$$

la ecuación del enunciado (suponiendo $a \neq 0$) es equivalente

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x & c \\ 1 & b & x \end{vmatrix} = 0$$

Restamos la primera fila a la segunda y tercer filas y obtenemos la ecuación

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = (x-b)(x-c)$$

por lo que las soluciones son $x = b$ y $x = c$.

1-5. *Calcula, simplificando previamente:* *a)* $\begin{vmatrix} ab & 2b^2 & -bc \\ a^2c & 3abc & 0 \\ 2ac & 5bc & 2c^2 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & a & a & a \\ x & a & b & b \\ x & a & b & c \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Solución: a): En el determinante

$$\begin{vmatrix} ab & 2b^2 & -bc \\ a^2c & 3abc & 0 \\ 2ac & 5bc & 2c^2 \end{vmatrix}$$

sacamos fuera a de la primera columna, b de la segunda y c de la tercera, con lo que obtenemos

$$abc \begin{vmatrix} b & 2b & -b \\ ac & 3ac & 0 \\ 2c & 5c & 2c \end{vmatrix}$$

y ahora sacamos b de la primera fila, a de la segunda y c de la tercera,

$$a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ c & 3c & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Finalmente sacamos c en la segunda fila

$$a^2b^2c^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3a^2b^2c^3$$

b): En el determinante

$$\left|\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & a & a & a \\ x & a & b & b \\ x & a & b & c \end{pmatrix}\right|$$

sacamos x en la primera fila y queda

$$x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & a & b & b \\ x & a & b & c \end{vmatrix}$$

Ahora restamos la primera fila, multiplicada por x, de todas las demás filas, con lo que queda

$$x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-x & a-x & a-x \\ 0 & a-x & b-x & b-x \\ 0 & a-x & b-x & c-x \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera columna este determinante es igual a

$$x\begin{vmatrix} a-x & a-x & a-x \\ a-x & b-x & b-x \\ a-x & b-x & c-x \end{vmatrix}$$

Ahora, restamos la primera fila de las demás,

$$x\left|\begin{pmatrix} a-x & a-x & a-x \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a \end{pmatrix}\right|$$

y sacamos $a-x$, en la primera fila, fuera del determinante,

$$x(a-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a \end{vmatrix}$$

que desarrollando por la primera columna es

$$x(a-x)\begin{vmatrix} b-a & b-a \\ b-a & c-a \end{vmatrix} = x(a-x)(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b-a & c-a \end{vmatrix} = x(a-x)(b-a)(c-b)$$

donde hemos sacado $b-a$ en la primera fila y hemos calculado el determinante 2×2 restante.

c): En el determinante

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

restamos la última fila de las filas 2 y 3 y desarrollamos por la primera columna

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

sumando ahora la primera fila a la segunda y desarrollando por la primera columna, otra vez,

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+2) = -3$$

1-6. *Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que $a_{ij} = i + j$. Calcula su determinante*

Solución: el determinante que nos piden calcular es

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \cdots & n+3 \\ 5 & 6 & 7 & \cdots & n+4 \\ 6 & 7 & 8 & \cdots & n+4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{vmatrix}.$$

Si $n = 2$, vemos que el determinante se reduce a

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

Supongamos ahora que $n \geq 3$. Restamos la segunda fila a la tercera y queda lo siguiente

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & 6 & 7 & \cdots & n+4 \\ 6 & 7 & 8 & \cdots & n+4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{vmatrix}$$

y ahora restamos la primera fila a la segunda, con lo que obtenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & 6 & 7 & \cdots & n+4 \\ 6 & 7 & 8 & \cdots & n+4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{vmatrix} = 0$$

porque las filas 2 y 3 son iguales.

1-7. *Sea A una matriz cuadrada tal que $A^tA = I$. Demuestra que $|A| = \pm 1$.*

Solución: Notemos que $1 = |I| = |A^tA| = |A^t||A| = |A|^2$. Por lo que $|A|^2 = 1$ y los únicos valores posibles son $|A| = 1$ o $|A| = -1$.

1-8. *Hallar el rango de las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: El rango

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es el mismo que (restando a la segunda fila la primera multiplicada por 2 y a la tercera fila la primera multiplicada por 4)

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Por otra parte,

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

1-9. *Estudia, según los valores de x el rango de las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & x^2 & 1 \\ 1 & x^2 & x^3 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: Calculamos el rango de A. En primer lugar, nos fijamos en el menor

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -1$$

por lo que $\operatorname{rg} A \geq 3$, independientemente de lo que valga x. Desarrollando por la tercera fila vemos que el determinante de A es

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x^2 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

y desarrollando por la fila 3 obtenemos

$$|A| = -\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -(x^2 - 1)$$

por lo que el rango es 4 si $x^2 \neq 1$, es decir si $x \neq 1$ y $x \neq -1$. Resumiendo,

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 3, & \text{si } x = 1 \text{ o } x = -1; \\ 4, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Ahora calculamos el rango de B. Observemos que el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

no se anula, por lo que $\operatorname{rg} B \geq 2$. Por otra parte

$$\operatorname{rg} B = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 2-x & 4-x^2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

y este rango es 3, excepto si $5(2-x) = 4 - x^2$. Esto se verifica si y sólo si $x^2 - 5x + 6 = 0$, es decir si

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = 2, 3$$

Resumiendo,

$$\operatorname{rg} B = \begin{cases} 2, & \text{si } x = 2 \text{ o } x = 3; \\ 3, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Finalmente, calculamos el rango de C.

$$\operatorname{rg} C = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ x & -1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & x & 1-2x \\ 0 & x & -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & x & 1-2x \\ 0 & 0 & x^2-1 & 1+x-2x^2 \end{pmatrix}$$

y este rango es 3, excepto si $x^2 - 1 = 0$ y $1 + x - 2x^2 = 0$. ¿Hay algún valor de x que resuelva simultáneamente estas dos ecuaciones? Las soluciones de $x^2 - 1 = 0$ son $x = 1$ y $x = -1$. Mientras que las soluciones de $2x^2 - x - 1$ son

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = 1, -\frac{1}{2}$$

Vemos que $x = 1$ es la única solución simultánea de las dos ecuaciones. Por tanto,

$$\operatorname{rg} C = \begin{cases} 2, & \text{si } x = 1; \\ 3, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

1-10. *Suponiendo que A y B son matrices regulares* ($\det \neq 0$)*, y que hay conformidad de órdenes para poder realizar las operaciones, despeja la matriz X en las expresiones siguientes:*

(a) $X^t \cdot A = B$

(b) $(X \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B$

Calcula la matriz X en las ecuaciones anteriores si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a): Tomando transpuestas en la ecuación $X^t A = B$, obtenemos que $B^t = (X^t A)^t = A^t X$ y, despejando X, queda que $X = (A^t)^{-1} B^t = (A^{-1})^t B^t$. En el caso particular en que

$$A = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)\right) \qquad B = \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)$$

obtenemos que

$$X = (A^{-1})^t B^t = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -9 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b): Tomando inversas en la ecuación $(XA)^{-1} = A^{-1}B$ vemos que $XA = (A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}(A^{-1})^{-1} = B^{-1}A$. Y, como A es invertible, la podemos despejar $X = B^{-1}AA^{-1} = B^{-1}$. En el caso particular en que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

queda

$$X = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

1-11. *Calcula, siempre que sea posible, la inversa de las matrices siguientes:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

Solución: Utilizando la fórmula para calcular la inversa de A, obtenemos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ x & 1 & \frac{-x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nosotros vamos a calcularla utilizando transformaciones elementales por filas. Empezamos con

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y le añadimos a la segunda fila la primera multiplicada por x, con lo que obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{x^2}{2} & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ahora restamos de la primera fila la tercera multiplicada por x,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & \frac{x^2}{2} & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y a la segunda fila le restamos la tercera fila multiplicada por $\frac{x^2}{2}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

de donde se deduce la inversa de A. Calculamos ahora la inversa de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula se obtiene que

$$B^{-1} = \frac{1}{x^2-4x+3}\begin{pmatrix} x^2+3 & 1 & -x \\ -12 & x-4 & 3 \\ 4x & 1 & -x \end{pmatrix}$$

También se puede hacer observando que

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -t & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y le restamos a la tercera fila, la primera multiplicada por 4,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4-t & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

intercambiamos las filas 2 y 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-t & -4 & 0 & 1 \\ 0 & t & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

a la tercera fila le restamos la segunda multiplicada por t

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-t & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t^2-4t+3 & 4t & 1 & -t \end{array}\right)$$

De aquí vemos que el determinante de$A$ es t^2-4t+3. Las raíces de este polinomio son

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 1, 3$$

por lo que la inversa existe si y sólo si $t \neq 1$ y $t \neq 3$. Suponiendo esto, podemos dividir la última fila por t^2-4t+3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-t & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4t}{t^2-4t+3} & \frac{1}{t^2-4t+3} & -\frac{t}{t^2-4t+3} \end{array}\right)$$

y ahora sumamos la tercera fila a la primera y le sumamos a la segunda la tercera fila multiplicada por $t-4$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{t^2+3}{t^2-4t+3} & \frac{1}{t^2-4t+3} & \frac{-t}{t^2-4t+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-12}{t^2-4t+3} & \frac{t-4}{t^2-4t+3} & \frac{3}{t^2-4t+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4t}{t^2-4t+3} & \frac{1}{t^2-4t+3} & \frac{-t}{t^2-4t+3} \end{array}\right)$$

por lo que

$$A^{-1} = \frac{1}{t^2-4t+3}\begin{pmatrix} t^2+3 & 1 & -t \\ -12 & t-4 & 3 \\ 4t & 1 & -t \end{pmatrix}$$

1-12. *Calcula, siempre que sea posible, la inversa de las matrices siguientes:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Utilizaremos el método de Gauss para calcular la inversa. Empezamos con la matriz

$$(A|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dividiendo la primera fila entre 4 obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y ahora restamos la tercera fila a la segunda, con lo que obtenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y sumamos a la tercera fila la primera multiplicada por 3,

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3/2 & 1 & 3/4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ahora sumamos la tercera fila a la primera

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3/2 & 1 & 3/4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

a la tercera fila le sumamos la segunda multiplicada por 3/2,

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

multiplicamos la tercera fila por -2

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

y la tercera fila la sumamos a la segunda y la restamos a la primera

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

con lo que la inversa es

$$\begin{pmatrix} 5/2 & 3 & 0 \\ -3/2 & -2 & 0 \\ -3/2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz B es $|B| = 0$, por lo que no tiene inversa.

Ahora calculamos la inversa de C, por el método de Gauss. Empezamos con la matriz

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En primer lugar, multiplicamos la fila 3 por -1 e intercambiamos las filas 1 y 3

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

sumamos a la tercera fila la segunda multiplicada por 2

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

y sumamos a la segunda fila, la primera multiplicada por 2

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

intercambiamos las filas 2 y 3

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

multiplicamos la tercera fila por -1

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

sumamos la tercera fila a la primera

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

y ahora restamos la segunda fila a la primera

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

y obtenemos

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1-13. *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{l} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{array}\right.$ *se pide calcular m para que el sistema*

(a) *no tenga solución,*
(b) *tenga infinitas soluciones,*
(c) *tenga solución única*
(d) *tenga una solución para la que $x = 3$.*

Solución: La matriz ampliada asociada al sistema es

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m-1 \end{array}\right)$$

cuyo rango es el mismo que

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m-1 \\ m & -1 & 1 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m-1 \\ 0 & m^2-1 & 1+m-2m^2 \end{array}\right)$$

Por tanto, el rango es 2 si $m^2 \neq 1$. Es decir, si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, entonces el sistema es compatible determinado. En este caso, el sistema original es equivalente a

$$\begin{aligned} x - my &= 2m - 1 \\ (m^2-1)y &= 1 + m - 2m^2 \end{aligned}$$

y las solución es

$$\begin{aligned} y &= \frac{1+m-2m^2}{m^2-1} = \frac{-(m-1)(1+2m)}{(m-1)(m+1)} = \frac{-1-2m}{m+1} \\ x &= 2m - 1 + my = 2m - 1 - m\frac{1+2m}{m+1} = \frac{-1}{m+1} \end{aligned}$$

Para que $x = 3$ debe verificarse que

$$3 = \frac{-1}{m+1}$$

es decir $m = -4/3$.

Estudiemos ahora que pasa si $m = 1$. En este caso,

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m-1 \\ 0 & m^2-1 & 1+m-2m^2 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 1 = \mathrm{rg}\, A$$

y el sistema es compatible indeterminado. El sistema original es equivalente al sistema

$$x - y = 1$$

Y el conjunto de soluciones es $\{1+y, y) : y \in R\}$. Tomando $y = 2$, obtenemos la solución $(3, 2)$.

En el caso en que $m = -1$,

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m-1 \\ 0 & m^2-1 & 1+m-2m^2 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right) = 2 \neq \mathrm{rg}\, A$$

y el sistema es incompatible.

1-14. *Dado el sistema de ecuaciones lineales* $\left\{\begin{array}{l} x+ay=1 \\ ax+z=1 \\ ay+z=2 \end{array}\right.$ *se pide*

(a) *Expresarlo en forma matricial y escribir el vector de incógnitas, el del término independiente y el sistema homogóneo asociado.*
Solución: En forma matricial, el sistema queda expresado como $AX=B$ con

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(b) *Discutir y resolver según los valores de a.*
Solución: Consideramos la matriz ampliada

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \end{array}\right)$$

En primer lugar, intercambiamos las filas 2 y 3. Entonces,

$$\operatorname{rg}(A|B)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Restando la primera fila, multiplicada por a a la tercera fila obtenemos

$$\operatorname{rg}(A|B)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & -a^2 & 1 & 1-a \end{array}\right)$$

Ahora sumamos a la tercera fila la segunda multiplicada por a,

$$\operatorname{rg}(A|B)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1+a & 1+a \end{array}\right)$$

De aquí deducimos que si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ entonces $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(A|B)=3=$ número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado.
En este caso, el sistema original es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{aligned} x+ay &= 1 \\ ay+z &= 2 \\ (1+a)z &= 1+a \end{aligned}$$

y obtenemos la solución $z=1$, $y=1/a$, $x=0$.
Si $a=-1$, entonces

$$\operatorname{rg}(A|B)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de donde $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(A|B)=2$ que es menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado. Ahora, el sistema original es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{aligned} x-y &= 1 \\ -y+z &= 2 \end{aligned}$$

para obtener las soluciones tomamos z como un parámetro y despejamos $y=z-2$, $x=1+y=z-1$.
Por tanto el conjunto de soluciones es

$$\{(z-1, z-2, z) \in R^3 : z \in R\}$$

Finalmente, Si $a=0$, entonces

$$\operatorname{rg}(A|B)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

y vemos que $\operatorname{rg}(A)=2<\operatorname{rg}(A|B)=3$, por lo que el sistema es incompatible.

1-15. *Discutir y resolver el sistema siguiente* $\left\{\begin{aligned} x+y+z+2t-w&=1\\ -x-2y+2w&=-2\\ x+2z+4t&=0\end{aligned}\right.$

Solución: La matriz ampliada $(A|B)$ es

$$(A|B)=\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 0 & 0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Haciendo operaciones elementales con filas vemos que

$$\operatorname{rg}(A|B)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

y vemos que $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(A|B)=2$ menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado. Como hay cinco incógnitas obtendremos $5-2=3$ parámetros. El sistema que tenemos que resolver es equivalente al siguiente sistema,

$$\begin{aligned} x+y+z+2t-w &= 1\\ -y+z+2t+w &= -1\end{aligned}$$

Elegimos los parámetros z, w, y t y despejamos $y=z+2t+w+1$, $x=1-y-z-2t-w=-2z-4t$. El conjunto de soluciones es

$$\{(-2z-4t, z+2t+w+1, z, t, w)\in\mathbb{R}^5 : z, t, w\in\mathbb{R}\}$$

1-16. *Discutir y resolver el sistema siguiente, según los valores de los parámetros:*

$$\left\{\begin{aligned} x+y+z&=0\\ ax+y+z&=b\\ 2x+2y+(a+1)\,z&=0\end{aligned}\right.$$

Solución: La matriz ampliada es

$$\operatorname{rg}(A|B)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ a & 1 & 1 & b\\ 2 & 2 & a+1 & 0\end{array}\right)$$

Haciendo operaciones elementales por filas obtenemos

$$\operatorname{rg}(A|B)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1-a & 1-a & b\\ 0 & 0 & a-1 & 0\end{array}\right)$$

Si $a\neq 1$, entonces el sistema es compatible determinado y es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0\\ y+z &= \frac{b}{1-a}\\ (a-1)z &= 0\end{aligned}$$

La solución es

$$z=0,\quad y=\frac{b}{1-a},\quad x=\frac{-b}{1-a}$$

Ahora estudiamos el sistema para el valor $a=1$. Entonces,

$$\operatorname{rg}(A|B)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

y vemos que, si $b\neq 0$, entonces el sistema es incompatible, porque, es ese caso $\operatorname{rg}(A)=1$, $\operatorname{rg}(A|B)=2$.

Por último, si $a=1$ y $b=0$, entonces $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(A|B)=1$ y el sistema es compatible indeterminado con $3-1=2$ parámetros. En este caso, el sistema original es equivalente al sistema siguiente

$$x+y+z=0$$

utilizando y, z como parámetros, el conjunto de soluciones es

$$\{(-y-z, y, z) : y, z \in R\}$$

Resumiendo,

$$\begin{cases} a \neq 1, & \text{S.C.D. cuya solución es } z = 0, \quad y = \frac{b}{1-a}, \quad x = \frac{-b}{1-a} \\ a = 1, & \text{Si} \begin{cases} b \neq 0, & \text{S.I.;} \\ b = 0, & \text{S.C.I. cuyas soluciones es el conjunto } \{(-y-z, y, z) : y, z \in R\}. \end{cases} \end{cases}.$$

1-17. *Discutir y resolver el sistema siguiente, según los valores de los parámetros:*

$$\begin{cases} x - 2y + bz = 3 \\ 5x + 2y = 1 \\ ax + z = 2 \end{cases}$$

Solución: La matriz ampliada es

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Haciendo operaciones elementales por filas obtenemos

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 2a & 1-ab & 2-3a \end{array} \right)$$

Restando a la tercer fila la segunda multiplicada por $a/6$ queda

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 0 & 1-\frac{ab}{6} & 2-\frac{2a}{3} \end{array} \right)$$

De aquí vemos que si $ab \neq 6$, entonces el sistema es compatible determinado y la (única) solución es

$$z = \frac{12-4a}{6-ab}, \quad y = \frac{-7}{6} + \frac{5}{12}\frac{12-4a}{6-ab}b, \quad x = 3 + \frac{12-4a}{6-ab}b - \frac{7}{3} + \frac{5}{6}\frac{12-4a}{6-ab}b$$

En el caso en que $ab = 6$, despejamos $a = 6/b$ (ya que $b \neq 0$) y obtenemos

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2b-4}{b} \end{array} \right)$$

por lo que si $b = 2$ (y por tanto $a = 3$, entonces $\text{rg}(A|B) = \text{rg}(A) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado. El sistema propuesto es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 3 \\ 12y - 10z &= -14 \end{aligned}$$

Tomando a z como parámetro, las soluciones son

$$\{(\frac{2-z}{3}, \frac{5z-7}{6}, z) : z \in R\}$$

Finalmente, si $b \neq 2$, entonces el sistema es incompatible.

1-18. *Resolver mediante el método de Cramer el sistema siguiente,*

$$\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Solución: El determinante de la matriz asociada es

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

Por tanto, las soluciones son

$$x=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}3&1&1\\7&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=\frac{16}{4}=4\quad y=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}-1&3&1\\1&7&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=\frac{8}{4}=2\quad z=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}-1&1&3\\1&-1&7\\1&1&1\end{vmatrix}=\frac{20}{4}=5$$

1-19. *Resolver mediante el método de Cramer el sistema siguiente,*

$$\begin{cases} x+y=12\\ y+z=8\\ x+z=6\end{cases}$$

Solución: El determinante de la matriz asociada es

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=2$$

por lo que la solución es

$$x=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}12&1&0\\8&1&1\\6&0&1\end{vmatrix}=\frac{10}{2}=5\quad y=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&12&0\\0&8&1\\1&6&1\end{vmatrix}=\frac{14}{2}=7\quad z=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&12\\0&1&8\\1&0&6\end{vmatrix}=\frac{2}{2}=1$$

1-20. *Resolver mediante el método de Cramer el sistema siguiente,*

$$\begin{cases} x+y-2z=9\\ 2x-y+4z=4\\ 2x-y+6z=-1\end{cases}$$

Solución: El determinante de la matriz asociada es

$$\begin{vmatrix}1&1&-2\\2&-1&4\\2&-1&6\end{vmatrix}=-6$$

y la solución es

$$x=\frac{1}{-6}\begin{vmatrix}9&1&-2\\4&-1&4\\1&-1&6\end{vmatrix}=\frac{-36}{-6}=6\quad y=\frac{1}{-6}\begin{vmatrix}1&9&-2\\2&4&4\\2&1&6\end{vmatrix}=\frac{12}{-6}=-2\quad z=\frac{1}{-6}\begin{vmatrix}1&1&9\\2&-1&4\\2&-1&1\end{vmatrix}=\frac{15}{-6}=\frac{-5}{2}$$

1-21. *Dado el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas siguiente,*

$$\begin{cases} x+2y+z=3\\ ax+(a+3)y+3z=1\end{cases}$$

(a) *Estudiar si para algún valor de a el sistema es incompatible.*
(b) *Para cada valor del parámetro a, para el que el sistema sea compatible, escribir la expresión general de todas sus soluciones.*

Solución: El rango de la matriz asociada es

$$\mathrm{rg}(A|B)=\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\a&a+3&3&1\end{array}\right)=\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\0&3-a&3-a&1-3a\end{array}\right)$$

Vemos que si $a=3$ el sistema es incompatible porque $\mathrm{rg}(A|B)=2$, $\mathrm{rg}(A)=1$. En el caso en que $a\neq 3$ el sistema es compatible indeterminado y equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 3\\ (3-a)y+(3-a)z &= 1-3a\end{aligned}$$

y tomando z como parámetro, obtenemos las soluciones

$$\{(\frac{7+3a}{3-a}+z,\frac{1-3a}{3-a}-z,z):z\in R\}$$

1-22. *Dado el sistema homogóneo*

$$\begin{cases} 3x+3y-z=0 \\ -4x-2y+mz=0 \\ 3x+4y+6z=0 \end{cases}$$

(a) *Calcular m para que tenga algunas solución distinta a la trivial.*

(b) *resolverlo para el valor calculado en el apartado anterior.*

Solución: El rango de la matriz asociada al sistema es

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & m \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

intercambiamos las dos primeras filas

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & m-1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & m-1 \\ 0 & 6 & 3m-4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

intercambiamos las dos últimas filas

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 3m-4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3m-46 \end{pmatrix}$$

para que tenga solución distinta de la trivial, el determinante ha de valer cero. Esto ocurre cuando $m = 46/3$. Para este valor de m, el sistema original es equivalente a

$$\begin{aligned} -x+y+\frac{43}{3}z &= 0 \\ y+7z &= 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos las soluciones

$$\{(22z/3, -7z, z) : z \in \mathbb{R}\}$$