

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía Examen final de Matemáticas I 2 de septiembre de 2002

Apellidos:

Nombre:

DNI:

Titulación:

Grupo:

1. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 2, x+y \geq 1\}$. Se pide:

a) Dibujar el conjunto A .

b) Hallar los elementos maximales y minimales, máximo y mínimo de A según el orden de Pareto.

1 punto

-
2. a) Enuncia el Teorema de Bolzano de los valores intermedios.
b) Sea $f(x) = x \ln(x^2 + 2)$. Justifica, utilizando el teorema anterior, si existe un valor c en el intervalo $(0, 1)$ tal que $f(c) = 1$.
c) El valor c del apartado anterior, caso de existir, ¿es único? Justifíquese la respuesta.
Sugerencia para el apartado b): $e = 2.7\dots$

1,5 puntos

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 5 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ e^{-x+2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

- a) Estudia la continuidad de f .
- b) Estudia la derivabilidad de f .
- c) Dibuja la gráfica de f y determina la imagen de f .

1,5 puntos

-
4. **Se considera la función** $f(x) = 4xe^{-2x}$.
- a) Estudiar el crecimiento, decrecimiento y los extremos (locales o relativos) de $f(x)$.
 - b) Estudiar la concavidad, convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$.
 - c) Calcular las asíntotas y representar la gráfica de $f(x)$.

1,5 puntos

5. Sea $y = f(x)$ la función definida por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$, en un entorno del punto $(1, 1)$.

a) Calcular $f'(x)$.

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto $(1, 1)$.

1 punto

6. **Dada la función $f(x) = \cos(x - x^2)$, se pide:**

a) Hallar el polinomio de Taylor de f , de orden 2, en el punto $a = 0$.

b) Supongamos que una función g tiene el mismo polinomio de Taylor de orden 2, en el punto $a = 0$ y la función g no está acotada. ¿Es eso posible?

c) Caso de que el apartado b sea posible, ¿tiene g algún tipo de extremo local o relativo en $a = 0$?

1,5 puntos

-
7. a) Calcula la siguiente integral indefinida $\int x^2 \ln x \, dx$.
b) Calcula la siguiente integral definida $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$.

1 punto

-
8. a) Dibuja la región encerrada por el eje x , la curva $y = 4 - x^2$ y la tangente a la curva anterior en el punto $(1, 3)$.
b) Calcula el área de la región anterior.

1 punto
